Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 17
Некоторые сведения из теории множеств

17.1. Понятие множества

С понятием множества вы познакомились на уроках математики ещё в начальной школе, а затем работали с ним при изучении математики и информатики в основной школе.

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Примерами множеств могут служить: множество всех учеников вашего класса, множество всех жителей Санкт-Петербурга, множество всех натуральных чисел, множество всех решений некоторого уравнения и т. п.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, ...). Объекты, входящие в состав множества, называются его элементами.

Множество можно задать следующими способами:

1) перечислением всех его элементов;
2) характеристическим свойством его элементов.

В первом случае внутри фигурных скобок перечисляются все объекты, составляющие множество. Каждый объект, входящий в множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

Например, запись $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ означает, что множество M состоит из чисел 1, 3, 5, 7 и 9. Точно такой же смысл будет иметь запись $M = \{3, 1, 5, 9, 7\}$. Иначе говоря, порядок расположения элементов в фигурных скобках значения не имеет. Важно точно указать, какие именно объекты являются элементами множества.

Например:

- число 5 является элементом множества M: $5 \in M$[1];
- число 4 не является элементом множества M: $4 \notin M$.

Это же множество можно задать с помощью характеристического свойства образующих его элементов — такого свойства, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. В нашем примере можно говорить о множестве натуральных однозначных нечётных чисел.

В рассматриваемом множестве M содержится 5 элементов. Это обозначают так: $|M| = 5$. Можно составить множество, содержащее любое число элементов. Например, множество всех корней уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ конечно (два элемента), а множество всех точек прямой бесконечно. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Первый способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Вторым способом можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Из некоторых элементов множества M можно составить новое множество, например P: $P = \{1, 3, 5\}$.

Если каждый элемент множества P принадлежит множеству M, то говорят, что P есть **подмножество** M, и записывают: $P \subset M$.

Само множество M является своим подмножеством, т. к. каждый элемент M принадлежит множеству M. Пустое множество также является подмножеством M.

Работая с объектами какой-то определённой природы, всегда можно выделить «самое большое» или универсальное множество, содержащее все возможные подмножества. Пусть A — множество чётных чисел, B — множество натуральных чисел, C — множество чисел, кратных пяти. Тогда самым большим множеством, содержащим в себе множества A, B и C, а также другие подобные множества, будет множество целых чисел. Универсальное множество будем обозначать буквой U.

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера (рис. 4.1). Точки внутри круга считаются элементами множества.

---

[1] Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

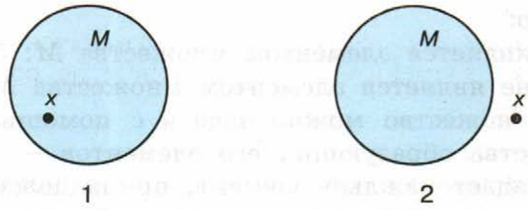


Рис. 4.1. Графическое изображение множеств: 1) $x \in M$, 2) $x \notin M$

17.2. Операции над множествами

Над множествами, как и над числами, производят некоторые операции.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Пересечение множеств обозначают с помощью знака $\cap$: $X \cap Y$. На рисунке 4.2 закрашено множество $X \cap Y$.

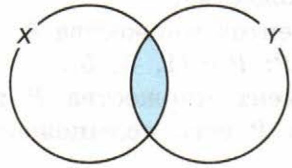


Рис. 4.2. Графическое изображение множества $X \cap Y$

Пусть множества X и Y состоят из букв:

$$X = \{ш;\ к,\ о,\ л,\ а\};$$
$$Y = \{у,\ р,\ о,\ к\}.$$

Эти множества имеют общие элементы: к, о.

$$X \cap Y = \{к,\ о\}.$$

Множества M и X не имеют общих элементов, их пересечение — пустое множество:

$$M \cap X = \varnothing.$$

Пересечение множеств M и P есть множество P, а пересечение множеств M и M есть множество M:

$$M \cap P = P;$$
$$M \cap M = M.$$

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Объединение множеств обозначают с помощью знака $\cup$: $X \cup Y$.

На рисунке 4.3 закрашено множество $X \cup Y$.

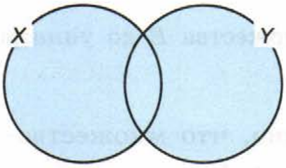


Рис. 4.3. Графическое изображение множества $X \cup Y$

Для наших примеров:

$$X \cup Y = \{ш,\ к,\ о,\ л,\ а,\ у,\ р\};$$
$$M \cup X = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ ш,\ к,\ о,\ л,\ а\};$$
$$M \cup P = M; \quad M \cup M = M.$$

Подумайте, возможно ли равенство: $A \cup B = A \cap B$.

Пересечение и объединение выполняются для любой пары множеств. Третья операция — дополнение — имеет смысл не для всех множеств, а только тогда, когда второе множество является подмножеством первого.

Пусть множество P является подмножеством множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Дополнение P до M обозначают $\overline{P}$: $\overline{P} = \{7,\ 9\}$.

Дополнение M до M есть пустое множество, дополнение пустого множества до M есть M: $\overline{M} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = M$.

Особый интерес представляет дополнение некоторого множества B до универсального множества U. Например, если B — это множество точек, принадлежащих некоторому отрезку, то его дополнением $\overline{B}$ до универсального множества U, которым в данном случае является множество всех точек числовой прямой, является множество точек, не принадлежащих данному отрезку.

В общем случае можем записать: $B \cup \overline{B} = U$ (рис. 4.4)

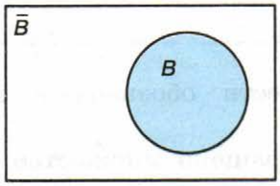


Рис. 4.4. Дополнение множества B до универсального множества

На рисунке 4.5 видно, что множество $A \cup B$ будет совпадать с универсальным, если A будет совпадать с множеством $\overline{B}$ или содержать его в качестве подмножества. В первом случае, т. е. при $A = \overline{B}$, мы имеем дело с минимальным множеством A, таким что $A \cup B = U$.

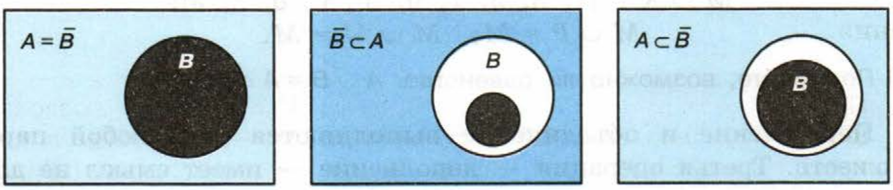


Рис. 4.5. Выбор такого множества A, что $A \cup B = U$

Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\overline{A} \cup B$ совпадало с универсальным множеством?
Для ответа на этот вопрос воспользуйтесь рисунком 4.6.

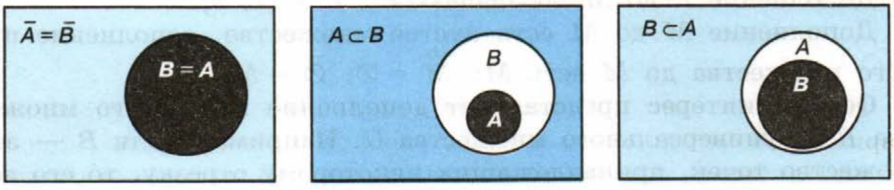


Рис. 4.6. Выбор такого множества A, что $\overline{A} \cup B = U$

17.3. Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Мощность множества X обозначается $|X|$.

В рассмотренных выше примерах $|X| = 5$, $|M| = 5$.

Число элементов объединения двух непересекающихся множеств равно сумме чисел элементов этих множеств. Так, в объединении множеств M и X содержится 10 элементов: $|M \cup X| = 10$.

Если же множества пересекаются, то число элементов объединения находится сложнее. Так, X состоит из 5 элементов, множество Y — из 4, а их объединение — из 7. Сложение чисел 5 и 4 даёт нам число 9. Но в эту сумму дважды вошло число элементов пересечения. Чтобы получить правильный результат, надо к числу элементов X прибавить число элементов Y и из суммы вычесть число элементов пересечения. Полученная формула подходит для любых двух множеств: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. Это частный случай так называемого принципа включений-исключений.

Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Для случая объединения трёх множеств формула имеет вид:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Аналогичные формулы справедливы и для пересечения множеств:

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|;$$

$$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|.$$

Пример. В зимний оздоровительный лагерь отправляется 100 старшеклассников. Почти все они увлекаются сноубордом, коньками или лыжами. При этом многие из них занимаются не одним, а двумя и даже тремя видами спорта. Организаторы выяснили, что всего кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на лыжах — 28, на коньках — 42. Всего умением кататься на лыжах и сноуборде из них могут похвастаться 8 ребят, на лыжах и коньках — 10, на сноуборде и коньках — 5, но только трое из них владеют всеми тремя видами спорта. Сколько ребят не умеет кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках?

Обозначим через S, L и K множества сноубордистов, лыжников и любителей коньков соответственно. Тогда $|S| = 30$, $|L| = 28$ и $|K| = 42$. При этом $|S \cap L| = 8$, $|K \cap L| = 10$, $|S \cap K| = 5$, $|S \cap L \cap K| = 3$.

Объединение множеств S, L и K — это множество ребят, увлекающихся хотя бы каким-то видом спорта.

По формуле включений-исключений находим:

$$|S \cup L \cup K| = 30 + 28 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, из 100 старшеклассников 20 не умеют кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Пусть множество P является подмножеством множества M. Дополнением P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

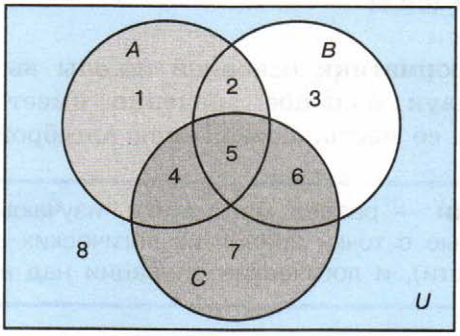
Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Формула включений-исключений позволяет вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Вопросы и задания

1. Если множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 2, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 3, то что будет:
   1) пересечением этих множеств;
   2) объединением этих множеств?

2. Пусть множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 18, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 14. Укажите наименьшее число, входящее:
   1) в пересечение этих множеств;
   2) в объединение этих множеств?
3. Пусть A, B и C — некоторые множества, обозначенные кругами, U — универсальное множество.



С помощью операций объединения, пересечения и дополнения до универсального множества выразите через A, B и C следующие множества:

1) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;
2) $2 \cup 5$;
3) 5;
4) $2 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;
5) $1 \cup 2 \cup 3$;
6) 8.

4. В первую смену в лагере «Дубки» отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. При этом 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличниками, и спортсменами, и победителями олимпиад. Сколько ребят отдыхало в лагере?
5. Старшеклассники заполняли анкету с вопросами об экзаменах по выбору. Оказалось, что выбрали они информатику, физику и обществознание. В классе 38 учеников. Обществознание выбрал 21 ученик, причём трое из них выбрали ещё и информатику, а шестеро — ещё и физику. Один ученик выбрал все три предмета. Всего информатику выбрали 13 учеников, пятеро из которых указали в анкете два предмета. Надо определить, сколько же учеников выбрали физику.