1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 51 по дисциплине
ООД.11 «Математика»

**Раздел 12. Множества. Элементы теории графов**

**Тема № 12.3: «Графы»**

**Лекционное занятие № 51**

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

**Лекционное занятие № 51** «История возникновения понятия графа. Задачи, приводящие к понятию графа. Определение графа, виды графов: полные, неполные. Элементы графов: вершины, ребра; степень вершины. Цикл в графе. Связанные графы. Деревья. Ориентированный граф. Изображение графа на плоскости. Применение теории графов при решении профессиональных задач: в экономике и логистике»
**по Теме № 12.3 «Графы»**

**Цель занятия:** изучить со студентами историю возникновения понятия графа, задачи, приводящие к понятию графа, определение графа, виды графов: полные, неполные, элементы графов: вершины, ребра; степень вершины, цикл в графе, связанные графы, деревья, ориентированный граф, изображение графа на плоскости, применение теории графов при решении профессиональных задач: в экономике и логистике

**Вид занятия:** классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

**Метод проведения занятия:** доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

**Время проведения:** 2 ч

**Основные вопросы:**

1. История возникновения понятия графа.
2. Задачи, приводящие к понятию графа.
3. Определение графа, виды графов: полные, неполные.
4. Элементы графов: вершины, ребра; степень вершины.
5. Цикл в графе.
6. Связанные графы. Деревья.
7. Ориентированный граф.
8. Изображение графа на плоскости.
9. Применение теории графов при решении профессиональных задач: в экономике и логистике.
10. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

**Литература:**

1. Учебник: Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/584924, п. 3.3 главы 3 Раздела I.
2. Учебник: Босова, Л. Л., Информатика. 9 класс. Базовый уровень : учебник / Л.Л. Босова, А. Ю. Босова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. —

208с. , ISBN 978-5-9963-3045-4, § 1.3 главы 1, с 21-31.

3. Учебник: Босова, Л. Л., Информатика. 11 класс. Базовый уровень : учебник / Л.Л. Босова, А. Ю. Босова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 208с. , ISBN 978-5-9963-3142-0, § 10-11 главы 3, с 135-152.

## Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

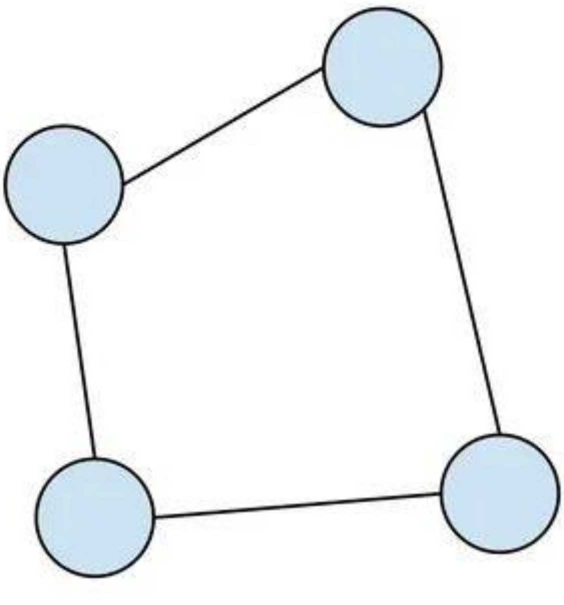
## Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

## Основная часть (теоретическая):

**Первый вопрос: <u>История возникновения понятия графа.</u>**

Понятие графа как математического объекта возникло в XVIII веке и связано с решением ряда задач, связанных с визуализацией и анализом связей между объектами.



***Задача о Кёнигсбергских мостах***

Одним из ключевых событий в истории теории графов стало решение **задачи о Кёнигсбергских мостах**, которая была популярна среди жителей города. Город был разделён рекой на четыре части, а семь мостов

соединяли берега с двумя островами. Задача заключалась в том, чтобы определить, возможно ли обойти все мосты, пройдя по каждому ровно один раз.
**Леонард Эйлер** в 1736 году сформулировал и решил эту задачу. В письме итальянскому математику и инженеру Мариони он изложил свои рассуждения и доказал, что обойти все мосты, не проходя по каждому дважды, невозможно. При этом Эйлер не использовал термин «граф», а также термины теории графов и не применял их изображения.
**1736 год** часто называют датой рождения теории графов. Эйлер считается её «отцом», а его работа заложила основы для дальнейшего развития этой области математики.

### *Дальнейшее развитие*

После Эйлера идеи, связанные с графами, развивались в XIX веке:

- **1847 год** – Густав Кирхгоф использовал схемы, похожие на графы, при изучении электрических цепей.
- **1857 год** – Артур Кэли изучал число изомеров органического соединения с помощью графов, где точки соединялись линиями в соответствии с числом химических связей.
- **1869 год** – Камиль Жордан независимо от Кэли исследовал деревья, используя термины «вершина» и «ребро», но не термин «граф».

**Термин «граф»** впервые ввёл **Венгерский математик Денеш Кёниг** в 1936 году. Он назвал графами схемы, состоящие из множества точек и связывающих эти точки отрезков прямых и кривых линий. В том же году вышла его книга «Теория конечных и бесконечных графов», которая систематизировала известные на тот момент результаты.

### *Последующие этапы*

- **Конец XIX – начало XX века** – теория графов оформилась в самостоятельную математическую дисциплину. Появились важные практические приложения: анализ электрических цепей, изучение молекулярных структур, задачи маршрутизации и другие.
- **1976 год** – решение проблемы четырёх красок стало поворотным моментом в истории теории графов, после чего она начала активно развиваться как основа современной прикладной математики.
- **1950-е годы** – широкое развитие теории графов связано с становлением кибернетики и развитием вычислительной техники. Графы сегодня применяются в различных областях: информатике, физике, химии, социологии, экономике и других. Они позволяют анализировать взаимосвязи между объектами и сложные системы, упрощать решение задач и моделировать разнообразные ситуации.

**Второй вопрос:** **<u>Задачи, приводящие</u>** **<u>к понятию графа.</u>**

Понятие графа возникает при решении задач, в которых нужно изобразить ситуацию в виде рисунка из точек (вершин) и линий (рёбер). Точки представляют элементы множества, а линии отражают связи между ними.

Рассмотрим следующую задачу:

**«В шахматном турнире по круговой системе, в котором каждый игрок должен встретиться с каждым, участвуют 6 школьников. Известно, что Ваня сыграл 5 партий, Толя — 4, Леша и Дима — по 3, Семен — 2, Женя — 1. С кем сыграл каждый из участников?»**

Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости — вершину графа. Если два игрока встречались между собой, то будем соединять соответствующие вершины линией — ребром графа. Пусть вершина 1 соответствует Ване, вершина 2 — Толе, вершина 3 — Леше, вершина 4 — Диме, вершина 5 — Семену, вершина 6 — Жене.

Поскольку степень вершины 1 равна 5, то соединим эту вершину со всеми остальными 5 вершинами графа. Из вершины 2 должно выходить 4 ребра, а выходит пока только одно. Соединим эту вершину ребрами с вершинами 3, 4 и 5, поскольку степень вершины 6 уже равна 1, т.е. из этой вершины все выходящие ребра проведены. Из вершин 3, 4 и 5 выходит по два ребра, степень вершин 3 и 4 должна быть равной 3. Поэтому соединим эти вершины ребром. Построенный граф описывает встречи, проведенные детьми.

**Третий вопрос:** **<u>Определение графа, виды графов: полные, неполные.</u>**

**<u>Многообразие графических информационных моделей.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во втором учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, на с.21-23, Приложении № 1 к данному План-Конспекту.

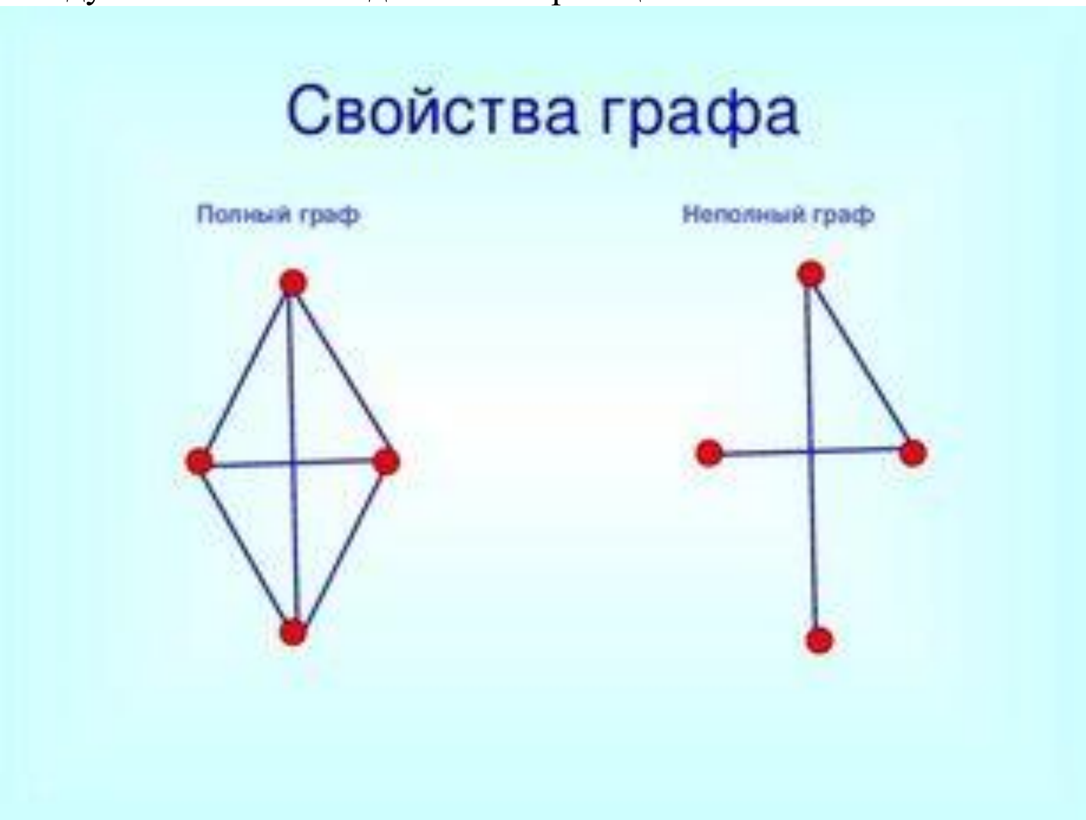
*Теория графов* — один из фундаментальных разделов дискретной математики. Графы являются очень продуктивным средством информационного моделирования структур систем и процессов, представления задач информационного характера. Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС). Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т.п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередач и т.п. — как ребра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

**Граф** – это математическая модель, состоящая из множества точек (вершин) и множества линий (рёбер), соединяющих некоторые пары вершин. Вершины могут представлять объекты, а рёбра – связи между ними.

**Полный граф** – это граф, в котором любые две различные вершины соединены одним и только одним ребром. В таком графе каждая вершина напрямую связана с любой другой вершиной. Полный граф с n вершинами обычно обозначается как Kn.

**Неполный граф** – это граф, в котором не построены все возможные рёбра при неизменном множестве вершин.

**Полный граф** может использоваться для отображения всех возможных связей между объектами, например для вычисления попарных расстояний или сходства между элементами в задаче кластеризации.



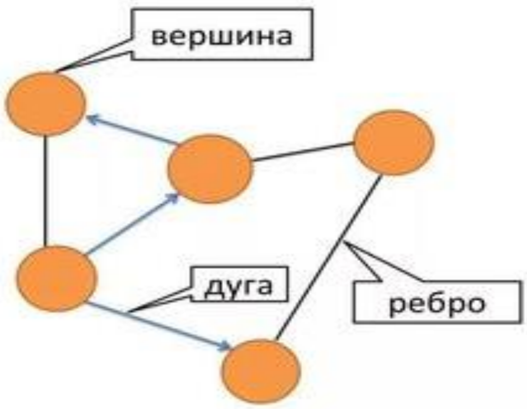

**Неполный граф** может моделировать ситуации, где не все связи реализованы. Например, в железнодорожной сети некоторые станции могут быть напрямую не соединены, но к ним можно добраться через другие точки.


Также к видам графов относятся, например, **пустой граф** (граф без рёбер, состоящий только из изолированных вершин) и **неполный связный граф** (в котором несколько точек напрямую друг с другом не соединены, но к ним можно добраться через другие точки).

Существуют и другие классификации графов – по ориентации рёбер, наличию кратных рёбер, петлей, связности и т. д.

**Четвёртый вопрос:** **Элементы графов: вершины, ребра; степень вершины.**

**Граф** – это математическая структура, которая состоит из множества вершин и рёбер, соединяющих некоторые пары вершин. Используется для моделирования связей между объектами.



### *Вершины*

**Вершина** — базовый элемент графа, обозначающий объект или сущность в рассматриваемой системе. Вершины обычно обозначаются заглавными буквами (A, B, C) или числами (1, 2, 3).

**Некоторые свойства вершин:**

- **Изолированная вершина** — не связана ни с одной другой вершиной, то есть из неё не выходит ни одно ребро.
- **Висячая вершина** — из неё выходит ровно одно ребро.
- **Шарнир** — вершина, удаление которой приводит к потере связности графа (граф перестаёт быть единым целым и распадается на несколько частей).

### *Рёбра*

**Ребро** — соединение между двумя вершинами, отражающее существование связи или отношения между ними. Ребро соединяет две вершины, которые называются концевыми точками или концами ребра.

**Некоторые виды рёбер:**

- **Петля (цикл)** — ребро, у которого начальная и конечная вершины совпадают. При подсчёте степени вершины петля учитывается дважды.
- **Кратные рёбра** — рёбра, имеющие одинаковые концевые вершины.

**Инцидентность** — отношение между вершиной и ребром: вершина инцидентна ребру, если является одной из его концевых вершин.

### *Степень вершины*

**Степень вершины** — это количество рёбер, инцидентных (прилежащих) к данной вершине, то есть количество рёбер, исходящих из этой вершины. Иногда степень вершины называют валентностью.

**Обозначение степени вершины:** d(v) или deg(v), где v — вершина.

**Некоторые свойства степени вершины:**

- **Чётная вершина** — если степень вершины — чётное число. **Нечётная вершина** — если степень вершины — нечётное число.
- **Лемма о рукопожатиях:** сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер.
- **Следствие из леммы о рукопожатиях:** в любом графе число вершин нечётной степени чётно.
- **Регулярный граф** — граф, в котором все вершины имеют одинаковую степень k.

**Пример:** в графе на рисунке степень вершины A равна 2, степень вершины B — 4, степени вершин C, D, E, F — 1.

Если все вершины графа имеют одинаковую степень, граф называют **k-регулярным** или **регулярным графом степени k**

Также сведения по данному вопросу представлены во втором учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, на с.23-24, Приложении № 1 к данному План-Конспекту, в третьем учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, на с.135-138, Приложении № 2 к данному План-Конспекту.

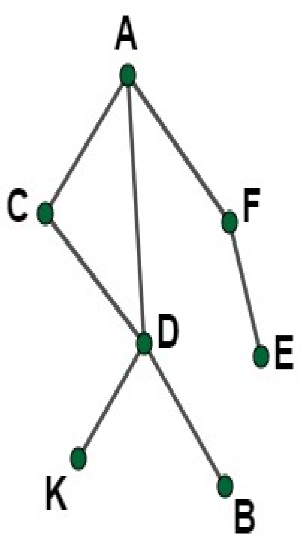
**Пятый вопрос:** **Цикл в графе.**

В путешествиях нам приходится тщательно выстраивать свой маршрут. Выбирать оптимальный путь из нескольких, которые предлагают нам онлайн-карты.
Мы помним, что графы применяют для изучения связей между различными объектами. Введём понятие пути в графе.

Путём в графе от вершины A до вершины B назовём такую последовательность рёбер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину.

*Пример:*

*в графе на рис. 1 путь от точки A до точки B можно записать так:*
*AD — DB или AC — CD — DB.*



Длина пути — это количество рёбер в этом пути.

*Пример:*

*в графе на рис. 1 длина пути AD — DB равна 2, а длина пути AC — CD — DB равна 3.*

Путь в графе, у которого вершины не повторяются, называется цепью.

Цепь в графе можно задавать перечислением только вершин или только рёбер.

Например, A — C — D — B или AC — CD — DB.

Цикл в графе — это путь, у которого начало и конец — в одной вершине, а рёбра и промежуточные вершины не повторяются.

Обозначается цикл так: A — C — D — B — A или C — D — B — A — C.
Началом можно считать любую вершину графа.

Если существует путь, ведущий из одной вершины в другую, то эти вершины называются связанными.

**Шестой вопрос: <u>Связанные графы. Деревья.</u>**

Если в графе любые две вершины соединены путём, то такой граф называется связным.

*Пример:*

*на рис. 2 вершины A и C, C и D, C и K, A и F, F и B — связанные, а сам граф является связным.*

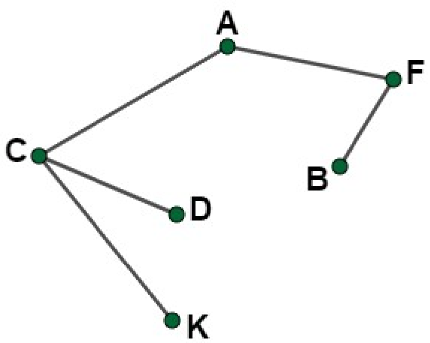



*Рис. 2. Связный граф*

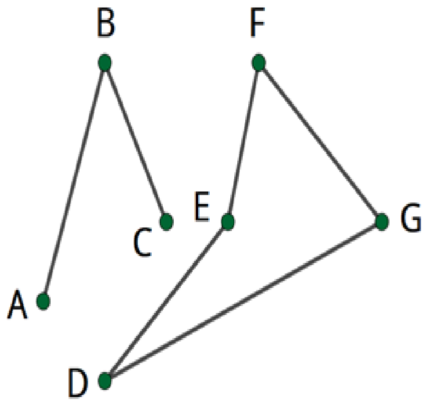



*Рис. 3. Несвязный граф*

**Граф, у которого каждая вершина соединена ребром с любой другой вершиной, называется полным.**

Например, граф на рис. 4 является полным, так как каждая вершина соединена с другими.

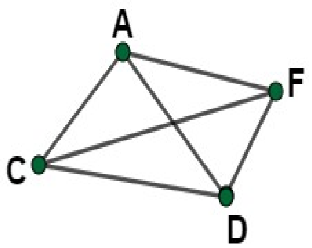



*Рис. 4. Полный граф*

Найдём количество рёбер, выходящих из каждой вершины. Так как одна вершина должна быть соединена со всеми остальными, то рёбер будет 3.
Тогда по лемме о рукопожатиях можем найти количество всех рёбер.

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Сформулируем это правило в общем виде.

Чтобы найти количество рёбер в полном графе, у которого $n$ вершин, нужно воспользоваться формулой:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

**Седьмой вопрос: <u>Ориентированный граф.</u>**

**Ориентированный граф** (орграф) — это граф, в котором **каждое ребро (дуга) направлено от одной вершины к другой**. По таким рёбрам можно двигаться только в указанном стрелкой направлении.


**Восьмой вопрос: <u>Изображение графа на плоскости.</u>**

Изображение графа на плоскости — это визуальное представление графа, где вершины и рёбра изображаются с помощью геометрических объектов на плоскости. При этом важно учитывать определённые условия, чтобы правильно отобразить структуру графа и его свойства.

Основные принципы изображения графов

Вершины обычно изображаются точками на плоскости. В некоторых случаях для конкретизации смысла вершины могут использоваться другие фигуры — прямоугольники, овалы и т. д.

Рёбра изображаются отрезками прямых или кривыми линиями (ломаными).

Внутренние точки ломаной, изображающей ребро, не должны совпадать с вершинами графа.

Для ориентированных графов дуги заменяют стрелками или явно указывают направленность ребра.

## Практическая часть.

**Девятый вопрос: <u>Применение теории графов при решении профессиональных задач: в экономике и логистике.</u>**

Теория графов — это раздел математики, который изучает свойства и взаимосвязи между объектами, представленными в виде узлов (вершин) и связей (ребер) между ними. В современных транспортных сетях и логистике теория графов находит множество практических применений, позволяя оптимизировать маршруты, распределение ресурсов и планирование доставки.

### Моделирование транспортных сетей

Транспортные сети могут быть представлены в виде графов, где узлы соответствуют перекресткам, станциям или портам, а ребра — дорогам, железнодорожным путям или морским маршрутам. Такое представление позволяет анализировать и оптимизировать движение по сети, вычислять кратчайшие пути, пропускную способность маршрутов и идентифицировать узкие места.

### Оптимизация маршрутов

Одной из основных задач в логистике является оптимизация маршрутов доставки. Алгоритмы, основанные на теории графов, такие как алгоритм Дейкстры или Алгоритм Беллмана-Форда, позволяют находить кратчайшие пути между точками в сети, что способствует сокращению времени и стоимости доставки.

### Расписание транспорта

Теория графов применяется для создания эффективных расписаний транспорта, учитывая ограничения по времени и доступности ресурсов. Проблема составления расписания может быть сформулирована как задача цветного раскраса графа, где каждый цвет соответствует определенному временному интервалу.

### Управление потоками

Задача о максимальном потоке и минимальном разрезе позволяет определить максимально возможное количество товаров или пассажиров, которое может быть перевезено по сети за определенный период времени. Это важно для планирования загрузки сети и предотвращения перегрузок.

**Логистическая координация**

Теория графов используется для координации множества логистических операций, включая управление запасами, складирование и мультимодальные перевозки. Графы помогают визуализировать и анализировать сложные логистические системы, позволяя принимать обоснованные управленческие решения.

**Заключение**

Теория графов предоставляет мощные инструменты для решения сложных задач в транспортных сетях и логистике. Она позволяет упростить и улучшить понимание сложных систем, оптимизировать процессы и снизить затраты, обеспечивая более эффективное и надежное движение товаров и услуг в глобальной экономике.

**Десятый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.**

Сведения по данному вопросу также представлены во втором учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, на с.25-31, Приложении № 1 к данному План-Конспекту, во третьем учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, на с.139-152, Приложении № 2 к данному План-Конспекту.

**Задание:**

**1.** Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 1.3** 2-ого учебника, указанного на с. 2 текущего документа, **§ 10-11** 2-ого учебника, указанного на с. 2 текущего документа,

**2.** Решить задачи, заданные преподавателем.

**Заключительная часть занятия:**

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

**Задание на самоподготовку:**

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в текущем План-конспекте, приложении, в учебнике, указанном на с.2 текущего План-конспекта.
2. Решить задания, указанные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.