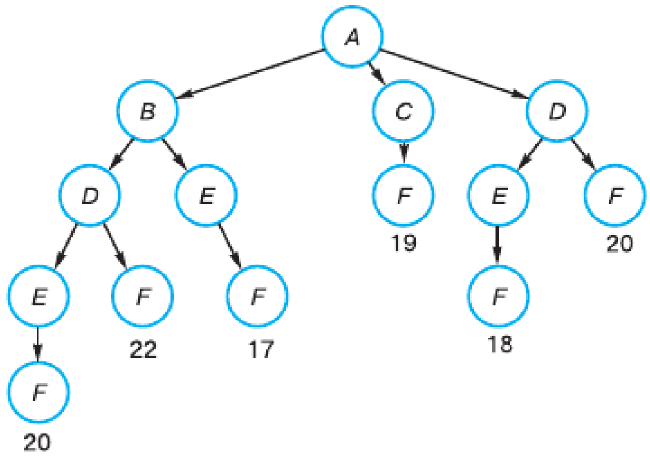


Рис. 3.8. Полное дерево перебора решений

На рисунке 3.8 видно, что кратчайший путь из вершины A в вершину F равен 17 и имеет вид $A–B–E–F$.

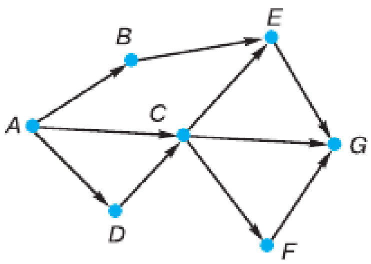


Рис. 3.9. Схема дорог

<u>Пример 4.</u> На рисунке 3.9 представлена схема дорог, связывающих города A, B, C, D, E, F, G. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько разных путей существует из города A в город G?

Существует несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим их.

Вариант 1. По графу можно построить матрицу смежности, а на её основе построить дерево, корнем которого будет служить вершина A. Число листьев построенного дерева будет равно числу дорог из города A в город G.

Постройте дерево и подсчитайте число дорог из города A в город G самостоятельно.

Вариант 2. Пусть K_X — число путей из города A в город X. Начнем считать число путей с конца маршрута. Так как в город G есть дороги из городов C, E, F, то $K_G = K_C + K_E + K_F$.

В свою очередь $K_C = 1 + K_D = 1 + 1 = 2$,

$K_E = K_B + K_C = 1 + 2 = 3$, $K_F = K_C = 2$.

Таким образом, $K_G = 2 + 3 + 2 = 7$.

Вариант 3. Можно считать число путей с начала маршрута. При этом процесс подсчёта удобно изображать на самом графе — рисунок 3.10.

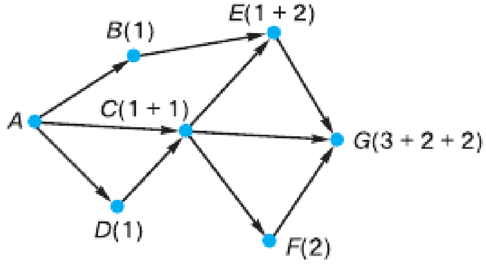
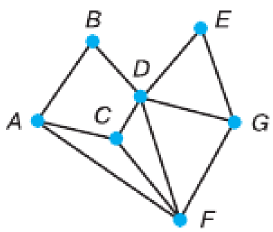


Рис. 3.10. Схема дорог с подсчётом числа путей

Пример 5. На рисунке 3.11 представлена схема дорог, связывающих населённые пункты A, B, C, D, E, F, G. В таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Схему и таблицу создавали независимо друг от друга, поэтому в них используются разные обозначения. Необходимо выяснить длину пути в километрах из пункта D в пункт F.



	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		15	10	20			25
П2	15			25			10
П3	10					30	20
П4	20	25			15		
П5				15			10
П6			30				15
П7	25	10	20		10	15	

Рис. 3.11. Схема дорог и таблица их длин

Рассмотрим имеющийся граф и выясним степень каждой вершины — число рёбер соединяющих некоторую вершину с другими вершинами. Получим:

A	B	C	D	E	F	G
3	2	3	5	2	4	3

На основании имеющейся таблицы мы также можем сделать выводы о том, сколькими дорогами соединён тот или иной населённый пункт с другими населёнными пунктами:

Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7
4	3	3	3	2	2	5

Сопоставив полученную информацию, можем сказать, что через Г1 в таблице обозначен населённый пункт *F*, а через Г7 — *D*. Согласно таблице, расстояние между этими пунктами равно 25 км.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Модель — это новый объект, который имеет свойства данного объекта, существенные для определённого исследования. Моделирование — метод познания, заключающийся в создании и исследовании моделей. Информационная модель — описание объекта-оригинала на одном из языков кодирования информации.

В информатике рассматриваются общие подходы к созданию и использованию информационных моделей, связанные с использованием компьютерной техники.

Информационные модели, реализованные с помощью систем программирования, электронных таблиц, специализированных математических пакетов или программных средств для моделирования, называются компьютерными моделями. Компьютерное моделирование включает в себя процесс реализации информационной модели на компьютере и исследование с помощью этой модели объекта моделирования — проведение вычислительного эксперимента.

Между данными, используемыми в той или иной информационной модели, всегда существуют некоторые связи, определяющие ту или иную структуру данных. Различают линейные и нелинейные структуры данных.

Линейный односвязный список — последовательность линейно связанных элементов, для которых разрешены операции добавления элемента в произвольное место списка и удаление любого элемента. Частным случаем линейного односвязного списка является стек — последовательность, в которой включение и исключение элементов осуществляются с одной стороны этой последовательности. Ещё один частный случай линейного односвязного списка — очередь, представляющая собой последовательность, у которой включение элементов производится с одной стороны последовательности, а исключение — с другой.

Примерами нелинейных структур данных являются графы и деревья. Граф — это множество элементов (вершин графа) вместе с набором отношений между ними, называемых рёбрами (дугами) графа. Дерево — это совокупность элементов (вершин), в которой выделен один элемент (корень), а остальные элементы разбиты на непересекающиеся множества (поддеревья). Каждое поддерево является деревом, а его корень является потомком корня дерева, т. е. все элементы связаны между собой отношением «предок — потомок». Частным случаем дерева является бинарное дерево, в котором каждая вершина может иметь не более двух потомков.

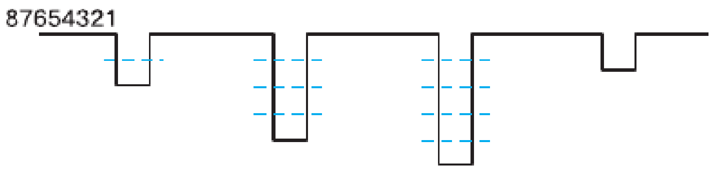
Таблица — это структура данных, состоящая из строк и граф (столбцов, колонок), пересечение которых образуют ячейки. Таблицы применяют для наглядности и удобства сравнения показателей. Табличный способ представления данных является универсальным — любую структуру данных, в том числе и представленную в форме графа, можно свести к табличной форме. Это тем более важно в связи с тем, что для компьютерной обработки табличное представление данных является предпочтительным.

Вопросы и задания

1. Что такое модель? Что такое моделирование? В каких областях науки и техники оно применяется?
2. Какие модели называются натурными? Приведите примеры натурных моделей.
3. Какие модели называются информационными? Приведите примеры информационных моделей. Какова роль информатики в информационном моделировании?
4. Создайте информационную модель одной из комнат вашей квартиры с целью оклейки её обоями. Представьте информационную модель в знаковой и графической формах.
5. Какие модели называются компьютерными информационными моделями?
6. Опишите основные этапы компьютерного моделирования.
7. Приведите примеры линейных структур данных. Чем очередь отличается от стека?
8. Муравьи идут друг за другом по неровной лесной тропе. На их пути встречаются ямки, в которые могут провалиться несколько муравьёв. Когда ямка заполняется муравьями,

остальные муравьи проходят через неё, а затем по одному вытаскивают провалившихся. Например, вот как четыре муравья проходят через ямку, вмещающую двух муравьёв:

Пусть по тропе идут 8 муравьёв. В каком порядке они будут идти после преодоления участка с четырьмя ямками, вмещающими 2, 4, 5 и 1 муравья соответственно?



Какую структуру данных иллюстрирует данный пример?[1)]

9. Выясните, что представляет собой обратная польская запись, и вычислите значение записанного с её помощью выражения: 1 2 + 3 × 4 5 × +.
10. Что такое граф? Какой граф называется ориентированным? Какой граф называется неориентированным? Какой граф называется взвешенным? Приведите примеры.
11. Что такое дерево? Какое дерево называется бинарным? Приведите примеры.
12. Почему графы и деревья считаются многоуровневыми структурами данных?
13. Информация о родственных связях в некоторой семье представлена следующим образом:

    parent(Юрий, Пётр); parent(Анна, Ева);
    parent(Ирина, Георгий); parent(Маргарита, Анна);
    parent(Анна, Николай); parent(Пётр, Георгий);
    parent(Михаил, Николай); parent(Маргарита, Пётр);
    parent(Юрий, Анна); parent(Маргарита, Александр);
    parent(Дарья, Руслан); parent(Александр, Руслан);
    parent(Михаил, Ева); parent(Юрий, Александр).

    Запись parent(*A*, *B*) означает, что *A* является родителем *B*. Нарисуйте генеалогическое древо этой семьи. Сколько у Ирины племянников и племянниц?

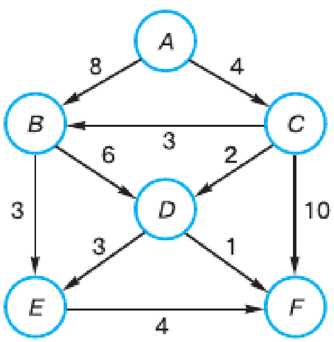
---

1) По материалам международного конкурса по информатике «Бобёр» (**bebras.ru**).

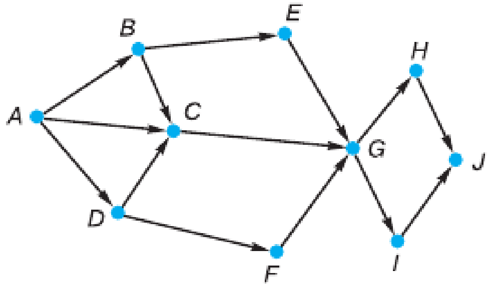
14. В кладовке хранятся ёлочные игрушки — большие и маленькие красные и золотые шары и звёзды. При этом игрушки разного размера, цвета и формы хранятся в отдельных коробках. Например, в одной коробке — большие красные звёзды, в другой — маленькие красные звёзды и т. д. Известно, что среди игрушек нет ни маленьких шаров, ни маленьких золотых звёзд. Всего звёзд 25, а шаров — 17. Всего больших игрушек — 32; красных игрушек — 28. Золотых звёзд на 2 больше, чем золотых шаров. В скольких коробках хранятся игрушки? Сколько игрушек в каждой коробке?

    Постройте граф, представляющий состав игрушек. Используйте его для решения задачи. Представьте эту же информацию в табличной форме.
15. Что с вашей точки зрения более наглядно представляет структуру системы: граф или таблица? Какая форма представления информации предпочтительна для компьютерной обработки данных?
16. Решите следующую задачу, составив двоичную матрицу.

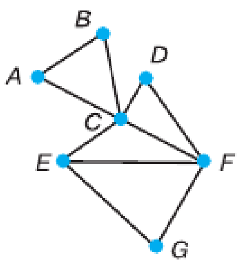
    Ваня, Кирилл, Петя и Саша учатся в 5, 6, 7 и 8 классах. Как-то они отправились в лес за белыми грибами. Шестикласснику не повезло — он не нашёл ни одного гриба, а Петя с пятиклассником нашли много грибов. Ваня и семиклассник нашли куст малины и позвали Кирилла полакомиться ягодами. Восьмиклассник, шестиклассник и Кирилл объясняли Саше, как ориентироваться на местности. В каком классе учится каждый из мальчиков?
17. Как осуществляется переход от ориентированного графа к дереву решений?
18. Найдите кратчайший путь от вершины A до вершины F в ориентированном графе:



19. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько разных путей существует из города A в город J?



20. На рисунке представлена схема дорог, связывающих населённые пункты A, B, C, D, E, F, G. В таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах). Схему и таблицу создавали независимо друг от друга, поэтому в них используются разные обозначения. Необходимо выяснить длину пути в километрах из пункта E в пункт F.



	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5	Г6	Г7
Г1		9		2			
Г2	9			8		11	
Г3					3	12	
Г4	2	8				4	7
Г5			3			11	
Г6		11	12	4	11		9
Г7				7		9	

§ 11
Моделирование на графах

11.1. Алгоритмы нахождения кратчайших путей между вершинами графа

Графы как информационные модели находят широкое применение во многих сферах нашей жизни. Например, с их помощью можно планировать оптимальные транспортные маршруты, кратчайшие объездные пути, расположение торговых точек и других объектов. Необходимость решения задач, связанных с поиском кратчайшего пути на графе, возникает при проектировании инженерных сетей и линий электропередач, в микроэлектронике и во многих других случаях.

Путь между вершинами A и B графа считается кратчайшим, если:

- эти вершины соединены минимальным числом ребер (в случае, если граф не является взвешенным);
- сумма весов рёбер, соединяющих эти вершины, минимальна (для взвешенного графа).

Есть множество алгоритмов определения кратчайшего пути между вершинами графа, в том числе:

1) алгоритм построения дерева решений;
2) алгоритм Дейкстры;
3) метод динамического программирования.

Алгоритм построения дерева решений, как правило, используется для нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе. Его мы рассмотрели в предыдущем параграфе.

Алгоритм Дейкстры служит для нахождения кратчайшего пути между одной конкретной вершиной (источником) и всеми остальными вершинами графа.

Суть алгоритма состоит в следующем. Каждой вершине графа ставится в соответствие метка — минимальное известное расстояние от источника до этой вершины. Метка самого источника полагается равной 0. Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки.

На первом шаге расстояние от источника до всех остальных вершин неизвестно. Метки вершин (кроме источника) считаются равными бесконечности, все вершины считаются непосещёнными.

Далее, из всех непосещённых вершин выбирается вершина, имеющая минимальную метку. Для каждого из соседей этой вершины (кроме отмеченных как посещённые) рассчитывается новая длина пути, как сумма значений текущей метки этой вершины и длины ребра, соединяющего её с соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, то значение метки заменяется полученным значением длины. После рассмотрения всех соседей вершина помечается как посещённая. Этот шаг алгоритма повторяется, пока есть непосещённые вершины. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. На рисунке 3.12 кружками обозначены вершины графа, в кружки вписаны имена вершин. Вершины соединены линиями — рёбрами графа. Около каждого ребра обозначен его «вес» — длина пути. Рядом с каждой вершиной дана метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины A: для вершины A — это 0, для всех других вершин она неизвестна и обозначена знаком «бесконечность».

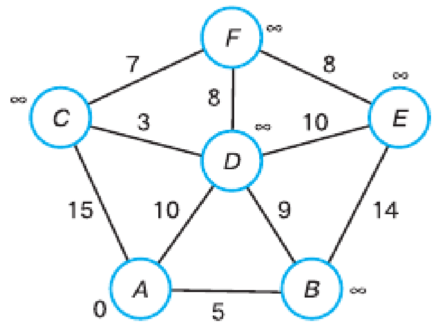


Рис. 3.12. Алгоритм Дейкстры. Начальное состояние

Минимальную метку (0) имеет вершина A. Её соседи — вершины B, C, D. Очерёдность рассмотрения соседей: B, D, C. После изменения их меток получим результат, представленный на рисунке 3.13.

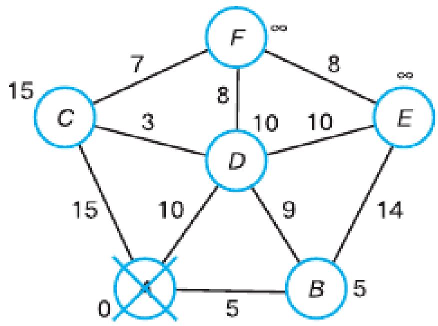


Рис. 3.13. Алгоритм Дейкстры. Шаг 1

После изменения меток всех соседей вершины A она помечается как просмотренная. Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины B. Её соседи — вершины D и E. Так как $5 + 9 > 10$, метка вершины D не изменяется. Вершина E получает метку 19 (рис. 3.14).

Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины D. Её соседи — вершины C, E и F. Так как $10 + 3 < 15$, метка вершины C изменяется. Вершина F получает метку 18. Метка вершины E не изменяется (рис. 3.15).

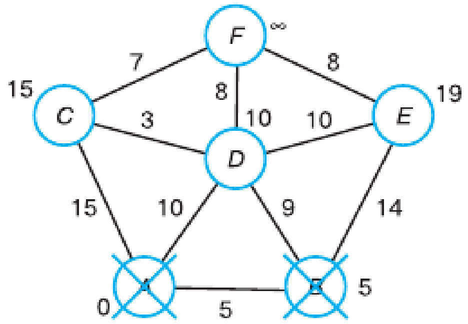


Рис. 3.14. Алгоритм Дейкстры. Шаг 2

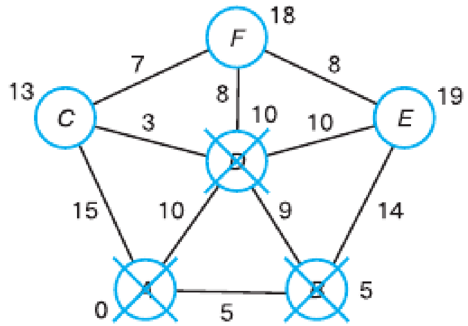


Рис. 3.15. Алгоритм Дейкстры. Шаг 3

Далее в качестве вершин с минимальными метками будут поочерёдно рассматриваться вершины C, F и E. К изменению меток соседних с ними вершин это не приведёт (рис. 3.16).

Полученные в результате работы алгоритма метки вершин графа — это и есть кратчайшие расстояния от вершины A до каждой из этих вершин.

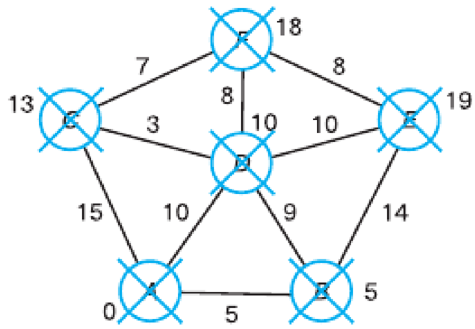


Рис. 3.16. Алгоритм Дейкстры. Результат работы

Метод динамического программирования основан на том, что процесс решения задачи разбивается на стадии (шаги), на каждой из которых принимаются решения, приводящие к достижению поставленной цели.

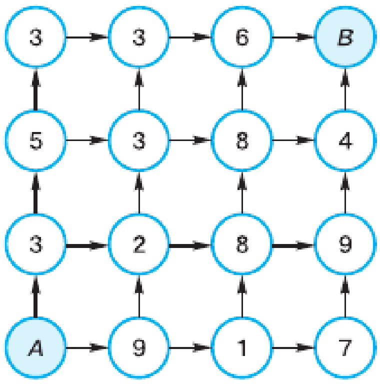


Рис. 3.17. Лабиринт

Предположим, персонажу некоторой игры необходимо пройти по лабиринту из пункта *A* в пункт *B*, набрав при этом как можно меньше штрафных баллов, количество которых указано в клетках лабиринта, причём перемещаться можно только вверх или вправо. С помощью графа начальные условия могут быть заданы так, как показано на рисунке 3.17.

Составим таблицу, в которой каждая ячейка будет соответствовать определённой клетке лабиринта. Числа в ячейках будут равны минимальному числу штрафных баллов, которое можно получить, пройдя путь от начала до соответствующей клетки.

Заполнять таблицу будем снизу вверх и слева направо. При этом для заполнения каждой новой ячейки будем рассматривать числа двух соседних с ней заполненных ячеек, находящихся слева от неё и под ней. Будем выбирать наименьшее из этих двух чисел, прибавлять к ним число текущей ячейки и результат записывать в неё.

3			
A	9		

3	5		
A	9		

8	8		
3	5	13	
A	9	10	

11			
8	8	16	
3	5	13	
A	9	10	17

11	11		
8	8	16	
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	17
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

Ответ равен числу в правом верхнем углу таблицы.