

1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 56
по дисциплине «Математика»

Раздел 13. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Тема № 13.5: «Задачи математической статистики»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

**Лекционное занятие № 56 «Задачи математической статистики»
по Теме № 13.4 «Дискретная случайная величина, закон её распределения»**

Цель занятия: изучить со студентами вариационный ряд, полигон частот, гистограмма, статистические характеристики ряда наблюдаемых данных, решение задач на применение указанных понятий

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по повторению, проверке знаний, умений по пройденному материалу, применению на практике полученных знаний).

Метод проведения занятия: доведение основных теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Вариационный ряд.
2. Полигон частот и гистограмма.
3. Статистические характеристики ряда наблюдаемых данных.
4. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. — 13-е изд., стер. — 463 с., — Москва: Просвещение, 2025, ISBN 978-5-09-127034-1. — Текст: электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/497603> (печатный: ISBN 978-5-09-120157-4), 364-386 (часть 8) § 71-73 (2012-2017,2025 годы издания, глава XIII).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, изучение нового материала, выполнение практических заданий).

Первый вопрос: Вариационный ряд.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 364-368 (часть 8) § 71 (2012-2017,2024 годы издания, глава XIII).

Вариационный ряд

Вариационный ряд представляет ряд вариантов, (значений признака) расположенных в порядке убывания или возрастания

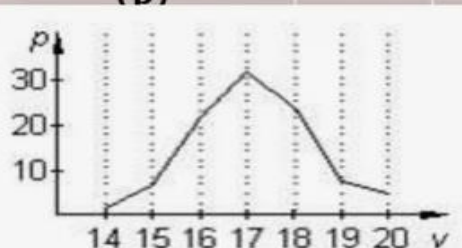
(например: если собрать листья с одного и того же дерева и расположить их по мере увеличения длины листовой пластинки, то получается вариационный ряд изменчивости данного признака).



Вариационный ряд

- Например, если взять 100 колосьев пшеницы ($n = 100$), подсчитать число колосков в колосе (v) и число колосьев с данным количеством колосков, то вариационный ряд будет выглядеть следующим образом.

Варианта (v)	14	15	16	17	18	19	20
Частота встречаемости (p)	2	7	22	32	24	8	5



Вариационная кривая

На основании вариационного ряда строится **вариационная кривая** - графическое отображение частоты встречаемости каждой варианты.

Среднее значение признака встречается чаще, а вариации, значительно отличающиеся от него, - реже. Это называется «**нормальным распределением**». Кривая на графике бывает, как правило, симметричной.

Примеры вариационного ряда

Пример вариационного ряда по количественному признаку — распределение учеников по оценкам за контрольную работу:

Оценка (x_i) 2 3 4 5 Всего К-во учеников (f_i) 3 15 10 5 33

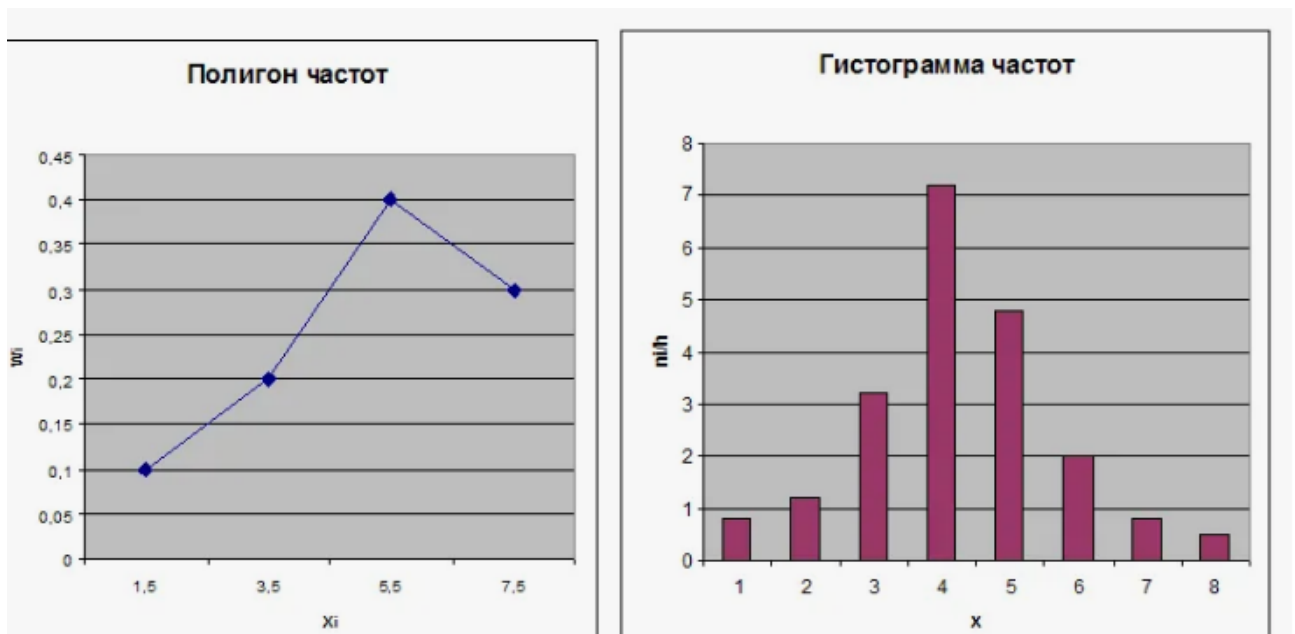
В данном ряду признак — это оценка, варианты признака (x_i) — это множество {2;3;4;5}, частоты (f_i) — это количество учеников, получивших каждую из оценок.

Ещё один пример вариационного ряда — значения артериального давления у 10 обследованных пациентов (мм рт.ст.): 160; 162; 165; 170; 173; 180; 185; 186; 190; 200.

Также в качестве примера вариационного ряда можно привести длительность амбулаторного приёма у врача-хирурга (мин): 10; 12; 15; 16; 18; 20; 25; 30.

Второй вопрос: Полигон частот и гистограмма.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 364-368 (часть 8) § 71 (2012-2017,2024 годы издания, глава XIII).

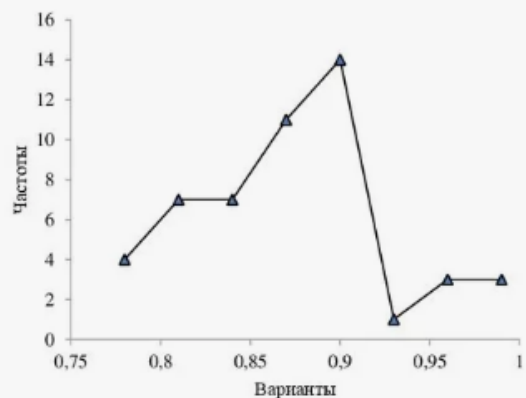
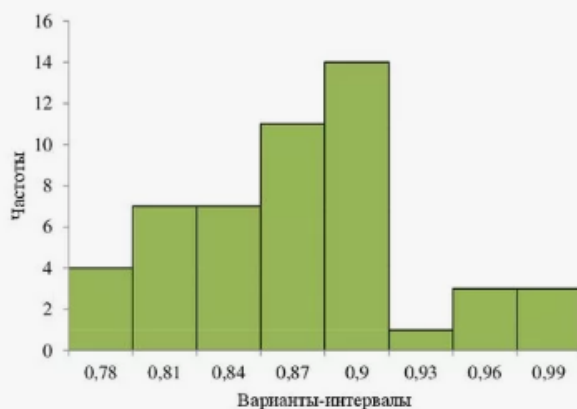




Гистограмма и полигон

Гистограммой называется ступенчатая фигура, для построения которой по оси абсцисс откладывают отрезки, изображающие частичные интервалы $(x_{i-1}; x_i)$ варьирования признака X , и на этих отрезках, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными частотам соответствующих интервалов.

Полигоном называется ломанная соединяющая точки с координатами $(x_i; n_i)$.

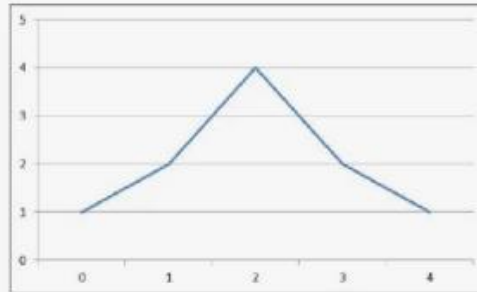


Визуализация выборок

- **Полигон** – график, сопоставляющий варианты значений признака с их частотами (абсолютными или относительными) (для дискретных признаков)

Пример. Изучаем количество детей в семьях Казани. Объем выборки – 10 семей.

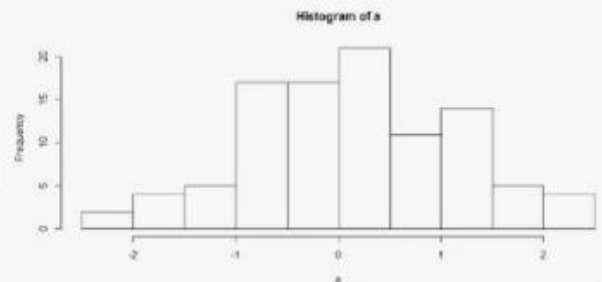
Кол-во семей	Кол-во детей
1	4
2	3
4	2
2	1
1	0



x – кол-во детей в семье;
y – кол-во семей с таким кол-вом детей
Значения по y абсолютные.

- **Гистограмма** – ступенчатая фигура из прямоугольников с основанием, равным ширине интервала по оси x (значения признака) и высотой, равной частоте значений признака из этого интервала (абсолютной или относительной) (для непрерывных признаков)

Пример. Гистограмма абсолютных частот нормально распределённого признака с параметрами $\mu=0$ и $\sigma=1$ (объем выборки 100)



Третий вопрос: Статистические характеристики ряда наблюдаемых данных.

Среднее арифметическое

Среднее арифметическое (среднее значение) — это частное от деления суммы всех чисел ряда на их количество. kopilkaurokov.ru

multiurok.ru

Например, если нужно определить среднее время, затраченное учащимися на выполнение домашнего задания по алгебре, и получены данные: 23, 18, 25, 20, 25, 25, 32, 37, 34, 26, 34, 25, то среднее арифметическое будет равно 27 (сумма всех чисел делится на 12).

kopilkaurokov.ru multiurok.ru

Среднее арифметическое.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

$$5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5. \\ (5 + 2 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5) / 10 = 4,4$$

Число 4,4, которое получается в результате, называется **средним арифметическим**.

Размах

Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда. kopilkaurokov.ru ru.wikihow.com

Если размах большой, то значения сильно разбросаны; если размах — небольшая величина, то значения лежат близко друг к другу.

ru.wikihow.com

Расчет показателей вариации

1. Размах вариации

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 2950 - 450 = 2500 \text{ млн. ден. ед.}$$

2. Среднее линейное отклонение

$$\bar{i} = \frac{\sum |x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f} = \frac{|450 - 1755| \cdot 3 + |950 - 1755| \cdot 11 + \dots + |2950 - 1755| \cdot 6}{100}$$

$$= \frac{46890}{100} = 468,9 \text{ млн. ден. ед.}$$

Мода

Мода — это число, которое встречается в ряду наиболее часто.

kopilkaurokov.ru dzen.ru

Чтобы найти моду, нужно подсчитать, сколько раз каждое значение встречается в ряду, и выбрать то, которое встречается чаще всего. Если два или более значений встречаются одинаково часто, ряд может иметь несколько мод. dzen.ru mathema.me

Пример. В таблице приведены данные о торговой площади магазинов:

Торговая площадь магазинов, м ²	Число магазинов
До 100	3
От 100 до 120	13
От 120 до 140	15
От 140 до 160	20
От 160 до 180	8
Свыше 180	1
ИТОГО	60



Необходимо рассчитать моду из интервального ряда.

$$M_o = 140 + 20 \frac{20 - 15}{(20 - 15) + (20 - 8)} = 145,88 \text{ м}^2$$

Медиана

Медиана — это срединное значение упорядоченного ряда чисел.

Медиана ряда с нечётным количеством чисел — это число, которое находится посередине. Медиана ряда с чётным количеством чисел — это среднее арифметическое двух чисел, которые находятся посередине.  

- **ПРИМЕР**
- Чтобы вычислить медиану выборки, сначала необходимо упорядочить исходные данные.

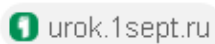
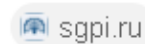

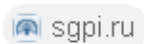
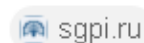

-6,1	-2,8	-1,2	-0,7	4,3	5,5	5,9	6,5	7,6	8,3	9,6	9,8	12,9	13,1	18,5
							↑							
							Медиана = 6,5							
							↓							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

- В соответствии с правилом, относящимся к выборкам, содержащим нечетное количество элементов, позиция медианы вычисляется по формуле

$$\frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8.$$
- Таким образом, медиана равна 6,5.
- Обратите внимание на то, что медиана, равная 6,5, ненамного больше среднего значения, равного 6,08.

Другие статистические характеристики

Кроме среднего арифметического, размаха, моды и медианы, существуют и другие статистические характеристики, например:

- **Дисперсия** — мера разброса значений вокруг среднего арифметического.  
- **Среднеквадратичное отклонение** — показывает, насколько значения различаются от среднего арифметического.  
- **Коэффициент вариации** — выражает изменчивость признака в относительных величинах (в процентах).  

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 364-386 (часть 8) § 71-73 (2012-2017,2025 годы издания, глава XIII).

Практическая часть.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 364-386 (часть 8) § 71-73 (2012-2017,2025 годы издания, глава XIII).

Четвёртый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Задание:

1. Рассмотреть теоретические сведения, примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 71-73 Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа, приложения к ЛЗ № 56.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ 1184 2), № 1194 2) (ответ 9), 4) (ответ 6 и 8), № 1195 2) (ответ 20), 4)(ответ 10,5), № 1196 2) (ответ 4,4), 4)(ответ 1,2), № 1197 2) (ответ Моды выборка не имеет, 1,5 , 1 2/3), № 1201 2) (ответ 24), № 1202 2) (ответ 2,5 r²), 4)(ответ 9,2 м²), 1204 2) (ответ: $\sigma \approx 2,9$) (с.368,374,381,382 соответственно) Учебника по Алгебре.

Построение по заданному условию ряда распределения случайной величины, определение числовых характеристик в железнодорожной отрасли при организации перевозок.

Построение ряда распределения случайной величины и определение её числовых характеристик в контексте организации перевозок на железнодорожном транспорте требуют анализа конкретных условий задачи. Например, это может быть связано с распределением грузопотоков, загруженностью инфраструктуры, вероятностью определённых событий в перевозочном процессе.

Построение ряда распределения

Ряд распределения — это таблица или функция, которая устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Для дискретной случайной величины ряд распределения задаётся в виде таблицы, где указываются все возможные значения величины и вероятности их наступления.

Пример условия для построения ряда распределения: например, рассматривается случайная величина X — количество поездов определённого типа, прибывающих на станцию за определённый период времени, а вероятности — вероятности этого события. Тогда ряд распределения будет выглядеть так:

X ...

... ..

При этом сумма всех вероятностей должна равняться 1.

Определение числовых характеристик

К основным числовым характеристикам случайной величины относятся:

- **Математическое ожидание (среднее значение).** Для дискретной случайной величины рассчитывается как сумма произведений всех возможных значений на их вероятности: $M(X) = \sum_i x_i p_i$.
- **Дисперсия.** Характеризует степень разбросанности значений относительно математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, где $M(X^2)$ — математическое ожидание квадрата случайной величины.
- **Среднее квадратическое отклонение.** Квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
- **Асимметрия и эксцесс.** Эти показатели описывают форму распределения (например, скошенность или «крутость» плотности распределения).

Для непрерывных случайных величин вместо ряда распределения используется функция распределения $F(x)$ или плотность распределения $f(x)$, а числовые характеристики рассчитываются через интегралы или суммы.

Особенности в контексте железнодорожных перевозок

При анализе перевозок на железнодорожном транспорте могут рассматриваться, например:

- **Распределение грузопотоков** по направлениям, включая транзитные перевозки. Для этого могут использоваться математические модели, например, параметрические графы, где вершинам соответствуют пункты погрузки, выгрузки и транзитные пункты, а дугам — железнодорожные участки.
- **Загруженность инфраструктуры** (станций, путей, локомотивного парка).
- **Вероятность определённых событий** в перевозочном процессе (например, вероятность задержки поезда, превышения лимита времени на обработку грузов).

Выбор конкретного закона распределения для случайной величины может быть обоснован экспериментально или теоретически, а параметры распределения определяются на основе экспериментальных данных. Для точного построения ряда распределения и расчёта числовых характеристик необходимо знать конкретные условия задачи: перечень возможных значений случайной величины, их вероятности, а также контекст (например, тип перевозок, условия эксплуатации инфраструктуры).

Построение по заданному условию ряда распределения случайной величины, определение числовых характеристик в железнодорожной отрасли при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений.

Построение ряда распределения случайной величины и определение её числовых характеристик — важный инструмент анализа в железнодорожной отрасли, в том числе в сфере строительства и эксплуатации зданий и сооружений. Это позволяет оценить вероятности различных исходов, проанализировать риски и оптимизировать процессы.

Ряд распределения

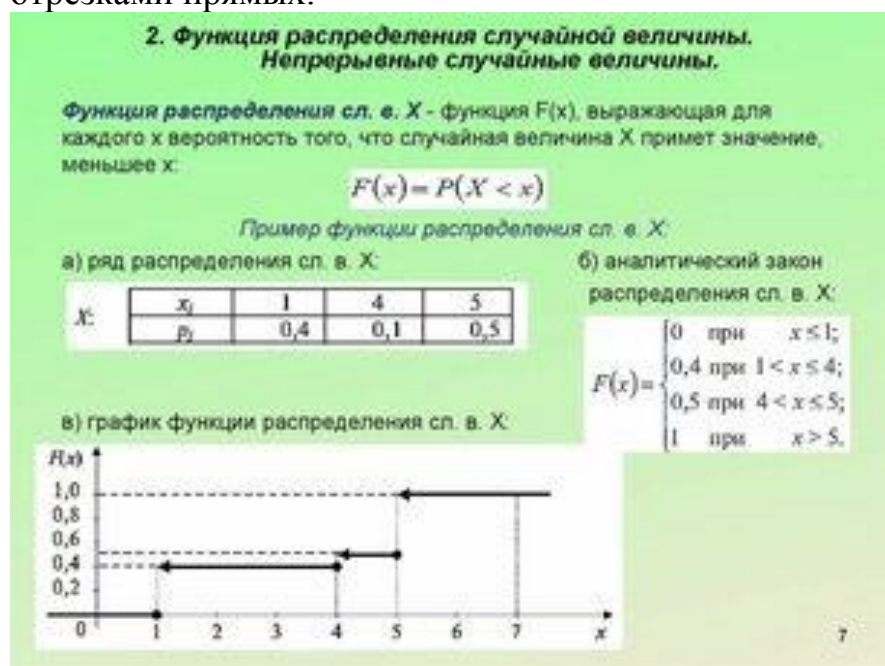
Ряд распределения — это таблица, в которой перечислены все возможные значения дискретной случайной величины X (например, количество дефектов, сроки строительства, затраты ресурсов) и соответствующие им вероятности p_i . Форма таблицы:

X x_1 x_2 \dots x_n

P p_1 p_2 \dots p_n

При этом сумма всех вероятностей должна равняться 1: $\sum_{(i=1)}^n p_i = 1$.

Графическое представление ряда распределения — многоугольник распределения. Он строится путём соединения точек с координатами (x_i, p_i) отрезками прямых.



Числовые характеристики

Для дискретных случайных величин используются следующие числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание (среднее значение) $M(X)$** — сумма произведений всех возможных значений величины на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Если случайная величина принимает бесконечное множество значений, математическое ожидание существует, если ряд в правой части сходится абсолютно.

2. **Дисперсия $D(X)$** — мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания. Рассчитывается по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$\text{где } M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n.$$

3. **Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$** — квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Особенности применения в железнодорожной отрасли

В железнодорожной сфере ряд распределения может использоваться для анализа таких параметров, как:

- количество дефектов при строительстве (например, количество некачественных сварных швов, нарушений технологии монтажа);
- сроки строительства объектов;
- затраты ресурсов (материалы, рабочая сила);
- показатели надёжности конструкций (например, вероятность отказа элементов здания или сооружения).

При работе с эмпирическими данными (на основе реальных наблюдений) могут применяться методы статистического анализа, включая группировку данных, расчёт статистических оценок числовых характеристик и подбор теоретического распределения.

Для точного построения ряда распределения и расчёта числовых характеристик необходимо иметь конкретные данные о случайной величине, например, результаты обследований, статистические наблюдения или проектные расчёты.

Построение по заданному условию ряда распределения случайной величины, определение числовых характеристик в железнодорожной отрасли при эксплуатации объектов сетевой инфраструктуры (информатизации, вычислительной техники, АПК, связи).

Построение ряда распределения случайной величины и определение её числовых характеристик в железнодорожной отрасли при эксплуатации объектов сетевой инфраструктуры (информатизации, вычислительной техники, АПК, связи) требует анализа конкретных условий задачи и применения методов теории вероятностей и математической статистики.

Построение ряда распределения

Ряд распределения — это таблица, которая связывает возможные значения случайной величины с соответствующими им вероятностями. Для дискретной случайной величины он имеет вид:

[|c|c| X_i x_1 x_2 ... x_n ; p_i p_1 p_2 ... p_n]

При этом выполняется условие нормировки: сумма всех вероятностей должна быть равна единице:

$$\sum_{(i=1)}^n p_i = 1$$

Графическое представление ряда распределения — полигон распределения (многоугольник распределения). Для его построения на плоскости откладывают точки с координатами (x_i, p_i) и соединяют их по порядку ломаной линией.

В контексте железнодорожной отрасли при эксплуатации объектов сетевой инфраструктуры ряд распределения может строиться на основе данных о вероятности отказов оборудования, времени безотказной работы систем, интенсивности сбоев и других параметров, связанных с работой сетей и информационных систем.

Определение числовых характеристик

К основным числовым характеристикам случайной величины относятся:

- **Математическое ожидание (среднее значение)** — сумма произведений значений случайной величины на соответствующие им вероятности.
- **Дисперсия** — мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.
- **Среднеквадратичное отклонение** — квадратный корень из дисперсии.

Для других характеристик (например, моды, медианы) они также могут быть определены на основе ряда распределения или функции распределения.

В железнодорожной отрасли при анализе объектов сетевой инфраструктуры могут рассчитываться, например, такие числовые характеристики:

- надёжность работы вычислительных комплексов и сетей;
- вероятность возникновения сбоев или отказов;
- параметры, связанные с интенсивностью использования ресурсов сети;

- показатели, учитывающие время безотказной работы и время восстановления после сбоев.

Особенности в контексте железнодорожной отрасли

При эксплуатации объектов сетевой инфраструктуры в железнодорожной отрасли важно учитывать:

- **Критические объекты.** Некоторые системы могут относиться к объектам критической информационной инфраструктуры (согласно ст. 2 ФЗ № 187-ФЗ).
- **Требования к надёжности.** В железнодорожной отрасли критически важны показатели надёжности систем, обеспечивающих безопасность и непрерывность перевозочного процесса.
- **Интеграцию информационных систем.** В условиях развития цифровых технологий важно обеспечивать совместимость и безопасность сетевых инфраструктур, используемых в железнодорожной отрасли.

Для точного построения ряда распределения и расчёта числовых характеристик необходимо иметь конкретные условия задачи, включая данные о возможных значениях случайной величины и соответствующих им вероятностях.

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку:

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, указанного на с. 2 Конспекта занятия, приложении.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.