

1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 58
по дисциплине «Математика»

Раздел 14. Уравнения и неравенства

Тема № 14.1: «Равносильность уравнений и неравенств.
Общие методы решения»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

Лекционное занятие № 58 «Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения»
по Теме № 14.1 «Равносильность уравнений и неравенств. Общие методы решения»

Цель занятия: повторно изучить со студентами понятия равносильности уравнений и неравенств, общие методы решения уравнений и неравенств, решение задач на применение указанных понятий, методов

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по повторению, проверке знаний, умений по пройденному материалу, применению на практике полученных знаний).

Метод проведения занятия: доведение основных теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Равносильность уравнений и неравенств. Определения.
2. Основные теоремы о равносильных переходах в уравнениях и неравенствах.
3. Общие методы решения уравнений.
4. Переход от равенства функций к равенству аргументов для монотонных функций.
5. Метод разложения на множители.
6. Метод введения новой переменной.
7. Функционально-графический метод.
8. Линейные уравнения с двумя неизвестными.
9. Нелинейные уравнения с двумя неизвестными.
10. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408656>, с. 54-59 (часть 1) § 8 главы II, с. 395-399 (части 8,9) § 5 Приложения (2012-2017,2024 годы издания).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.

2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, изучение нового материала, выполнение практических заданий).

Первый вопрос: Равносильность уравнений и неравенств. Определения.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 54-59 (часть 1) § 8 (2012-2017, 2024 годы издания, глава II).

Второй вопрос: Основные теоремы о равносильных переходах в уравнениях и неравенствах.

Основные теоремы о равносильных переходах в уравнениях и неравенствах описывают преобразования, которые не меняют множество решений. Для уравнений это, например, перенос членов, умножение/деление на ненулевое число, возведение в одну и ту же нечетную степень. Для неравенств – перенос членов, умножение/деление на положительное число, сохранение знака неравенства.

Теоремы о равносильных переходах:

Теорема 1 (Уравнения):

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же ненулевое число, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

Теорема 2 (Уравнения):

Если член уравнения перенести из одной части в другую с противоположным знаком, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

Теорема 3 (Уравнения):

Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

Теорема 4 (Неравенства):

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится, и полученное неравенство будет равносильно исходному.

Теорема 5 (Неравенства):

Если член неравенства перенести из одной части в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменений, то полученное неравенство будет равносильно исходному.

Теорема 6 (Неравенства):

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный, и полученное неравенство будет равносильно исходному.

Равносильность:

Два уравнения (или неравенства) называются равносильными, если их множества решений совпадают.

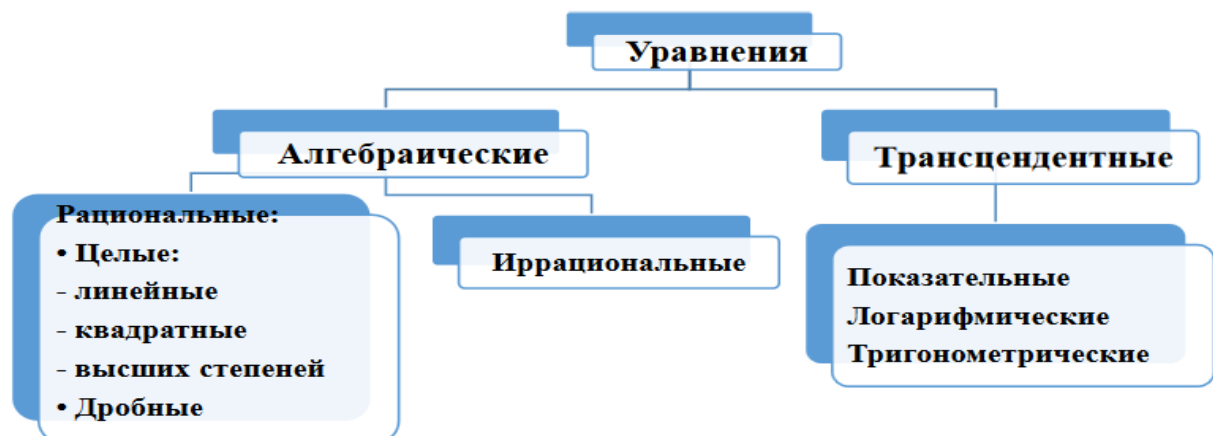
Равносильные переходы:

Операции, которые не меняют множество решений уравнения или неравенства.

Неравносильные переходы:

Операции, которые изменяют множество решений, например, возведение в четную степень, умножение/деление на выражение, которое может быть равно нулю.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 54-59 (часть 1) § 8 (2012-2017, 2024 годы издания, глава II).

Третий вопрос: Классификация уравнений. Общие методы решения.

Вопрос 3.1: Линейные уравнения.

Линейным называется уравнение, содержащее переменную в первой степени. Уравнение будет линейным, даже если в нем присутствуют дроби. Главное, чтобы переменной не было в знаменателе. **Корень линейного уравнения** – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Уравнение - это математическое равенство, которое содержит неизвестное.

Решить уравнение - значит найти все его корни или доказать, что корней нет

Корень уравнения - число, при подстановке которого вместо неизвестного, уравнение обращается в верное равенство

Линейное уравнение

$$ax + b = 0$$

↑ ↑
неизвестное любые числа

Если $a \neq 0$, **один корень**

Если $a = 0$, **корней нет**

Если $a = 0$, $b = 0$, корень - **любое число**

Правило переноса членов уравнения

- 1 При переносе члена уравнения из одной части уравнения в другую нужно **менять знак на противоположный****

$$\boxed{x + 5} = \boxed{7}$$

Левая часть уравнения

Правая часть уравнения

- 2 Все **члены с X** оставляем **слева**, а все **числа** - переносим **вправо****

$$\boxed{x} = \boxed{7 - 5}$$

Левая часть уравнения

Правая часть уравнения

← +5 перенесли в правую часть со знаком -

Корень уравнения → **$x = 2$**



Вопрос 3.2: Квадратные уравнения.



Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, в котором a, b и c — действительные числа, и $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

$$4x^2 - 3x + 1 = 0;$$

$$a = 4;$$

$$b = -3;$$

$$c = 1.$$

Корни квадратного уравнения вычисляют по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

D называется дискриминантом.

По значению дискриминанта можно определить количество корней квадратного уравнения.

Если $D < 0$ (отрицательный), то у уравнения нет действительных корней.

Если $D = 0$, то у уравнения два равных корня.

Если $D > 0$ (положительный), то у уравнения два различных корня.

Приведённое квадратное уравнение (коэффициент при x^2 равен 1, т. е. $a = 1$)

$$x^2 + bx + c = 0 \text{ можно решить с помощью обратной теоремы Виета: } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

Неполные квадратные уравнения

Неполные квадратные уравнения имеют **2** вида.

1 вид. Если $c = 0$, то $ax^2 + bx = 0$.

2 вид. Если $b = 0$, то $ax^2 + c = 0$.

Неполные квадратные уравнения можно решать с помощью формул дискриминанта, но рациональнее использовать специальные способы:

1 вид. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ можно решить, разложив на множители (вынести за скобку x)
 $x \cdot (ax + b) = 0$.

$x = 0$ или $ax + b = 0$. Значит, один корень равен **0**, а второй корень $x = \frac{-b}{a}$

(т. к. произведение двух чисел равно **0** только тогда, когда хотя бы один из множителей равен **0**).

$$2x^2 - 30x = 0;$$

$$x(2x - 30) = 0;$$

$$x = 0, \text{ или } 2x - 30 = 0;$$

$$2x = 30;$$

$$x = 15.$$

Ответ: $x = 0$; $x = 15$.

Вопрос 3.3: Дробно-линейные уравнения.



Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется **дробным**.

Для решения дробного уравнения, необходимо:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Пример:

решим дробное уравнение $\frac{3}{x-1} + 2 = \frac{4-x}{x-1}$.

1. Находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысла:

$$\frac{3}{x-1} + 2 = \frac{4-x}{x-1}; \quad x-1 \neq 0, \text{ поэтому } x \neq 1.$$

2. Находим общий знаменатель дробей и умножаем на него обе части уравнения:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{2 \cdot (x-1)}{1} = \frac{4-x}{x-1};$$

$$\frac{3+2(x-1)}{x-1} = \frac{4-x}{x-1} \quad | \cdot (x-1).$$

3. Решаем полученное уравнение:

$$3 + 2(x-1) = 4-x;$$

$$3 + 2x - 2 = 4-x;$$

$$3x = 3;$$

$$x = 1.$$

4. Исключаем те корни, при которых общий знаменатель равен нулю.

В первом пункте получилось, что при $x = 1$ уравнение не имеет смысла, поэтому число 1 не может являться корнем данного дробного уравнения. Следовательно, у данного уравнения вообще нет корней.

При решении уравнения можно использовать основное свойство пропорции.

Основное свойство пропорции: если $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, то $a \cdot n = b \cdot m$.

$$\frac{1}{6x-12} = \frac{1}{9x+18}; \quad 6x - 12 \neq 0; \quad 9x + 18 \neq 0;$$

$$x \neq 2; \quad x \neq -2.$$

$$\frac{1}{6x-12} \neq \frac{1}{9x+18};$$

$$1 \cdot (9x + 18) = 1 \cdot (6x - 12);$$

$$9x + 18 = 6x - 12;$$

$$3x = -30;$$

$$x = -10; \quad -10 \neq 2; \quad -10 \neq -2.$$

Корень $x = -10$.

Проверка:

$$\frac{1}{6 \cdot (-10) - 12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9 \cdot (-10) + 18};$$

$$\frac{1}{-60-12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{-90+18};$$

$$\frac{1}{-72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{-72}.$$

Общие методы решения уравнений представлены в Методическом пособии – руководстве по решению уравнений школьного курса.

Четвёртый вопрос: Переход от равенства функций к равенству аргументов для монотонных функций при решении уравнений.

При решении уравнений, содержащих монотонные функции, можно перейти от равенства значений функций к равенству аргументов, если функция строго монотонна. Это свойство монотонных функций позволяет упростить решение уравнений и задач, связанных с функцией.

Понятие монотонной функции.

Функция называется монотонной, если она либо возрастает, либо убывает на некотором интервале. Это означает, что при увеличении аргумента значение функции либо не уменьшается (возрастает), либо не увеличивается (убывает).

Переход от равенства функций к равенству аргументов:

Если мы имеем уравнение вида $f(x) = f(a)$, где $f(x)$ и $f(a)$ - значения монотонной функции f при аргументах x и a соответственно, то, если f строго монотонна, можно утверждать, что $x = a$.

Почему это работает?

- **Возрастающие функции:**

Если функция f возрастает, то при увеличении аргумента значение функции также увеличивается. Поэтому, если $f(x) = f(a)$, то x и a должны быть равны.

- **Убывающие функции:**

Аналогично, если функция f убывает, то при увеличении аргумента значение функции уменьшается. Поэтому, если $f(x) = f(a)$, то x и a также должны быть равны.

Пример:

Предположим, мы имеем уравнение $\log(x) = \log(5)$, где $\log$ - логарифм по основанию 10. Логарифмическая функция является монотонной (возрастающей). Поэтому, мы можем перейти от равенства значений к равенству аргументов и сказать, что $x = 5$.

Применение:

Этот принцип часто используется при решении различных типов уравнений, таких как:

- Уравнения, содержащие логарифмы;
- Уравнения, содержащие степенные функции;
- Уравнения, содержащие тригонометрические функции;
- И другие типы уравнений, где функции обладают свойством монотонности.

Важно отметить:

- Этот переход можно сделать только для строго монотонных функций. Если функция не строго монотонна (например, $y = x^2$ не монотонна на всей числовой прямой), то равенство значений функций не обязательно влечет за собой равенство аргументов.

Необходимо убедиться, что функция является монотонной на том промежутке, где рассматривается уравнение.

Сведения по данному вопросу также представлены в Методическом пособии 2 – Монотонность функции в решении уравнений.

Пятый вопрос: Метод разложения на множители при решении уравнений.

Метод разложения на множители – это метод решения уравнений, основанный на принципе, что произведение равно нулю, если и только если хотя бы один из множителей равен нулю. Этот метод особенно полезен, когда левая часть уравнения может быть представлена в виде произведения.

Основная идея метода:

1. **Перенесите все члены уравнения в одну сторону**, чтобы правая часть была равна нулю.
2. **Разложите левую часть на множители.** Для этого можно использовать различные методы, такие как вынесение общего множителя, использование формул сокращенного умножения, метод группировки или метод выделения полного квадрата.
3. **Приравняйте каждый множитель к нулю:** и решите полученные уравнения. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

Пример:

Решить уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$

1. **Левая часть уже равна нулю.**
2. **Разложим на множители:** $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
3. **$(x - 2)(x - 3) = 0$:**

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Решение: $x = 2$, $x = 3$

Когда использовать этот метод:

- Когда левую часть уравнения можно легко разложить на множители.
- Когда решение может быть получено простым приравниванием каждого множителя к нулю.
- В задачах, где требуется найти корни многочлена или решить уравнения, содержащие квадратные трёхчлены.

Метод разложения на множители может быть полезен при решении следующих типов уравнений:

- Квадратные уравнения.
- Уравнения высших степеней.
- Тригонометрические уравнения.
- Уравнения, содержащие модули.
- Системы уравнений.

Шестой вопрос: Метод введения новой переменной.

Метод введения новой переменной – это способ решения уравнений и систем уравнений, когда некоторая часть уравнения или системы заменяется новой переменной, что упрощает решение. Этот метод особенно полезен для уравнений, содержащих одинаковые выражения или сложные структуры.

Как работает метод:

1. Выявление повторяющихся выражений:

В уравнении или системе уравнений ищем части, которые повторяются или имеют сложную структуру.

2. Введение новой переменной:

Обозначаем повторяющееся выражение новой переменной (например, t , u , v).

3. Решение нового уравнения:

Подставляем новую переменную в уравнение или систему, что приводит к более простому уравнению или системе.

4. Решение нового уравнения:

Решаем новое уравнение или систему с новой переменной.

5. Обратная замена:

После решения нового уравнения возвращаемся к исходной переменной, подставляя значение новой переменной в соответствующее выражение.

6. Решение финального уравнения:

Решаем финальное уравнение, чтобы найти значения исходных переменных.

Примеры:

- **Уравнения высших степеней:**

В уравнении $x^4 - x^2 - 45 = 0$ замена $x^2 = t^2$ приводит к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$, которое решается проще.

• Показательные уравнения:

В уравнении вида $a^{2x} - 5a^x + 6 = 0$ замена $a^x = t$ приводит к квадратному уравнению $t^2 - 5t + 6 = 0$, которое решается значительно проще.

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Замена $3^x = t$

приводит к квадратному уравнению

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

Системы уравнений:

В системе уравнений вида $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$, введение новых переменных $u = x + y$ и $v = x - y$ приводит к системе $u^2 - 2v = 25$, $v = 12$, которая проще для решения.

Логарифмические уравнения:

В уравнении вида $\log_2(x+4) + 2 \log_2(x+4) = 3$ замена $\log_2(x) = t$ приводит к уравнению $t^2 - 2t - 3 = 0$, которое решается проще.

Преимущества:

- Упрощает сложные уравнения и системы уравнений.
- Помогает решать уравнения, которые нельзя решить другими способами.
- Является универсальным методом, применимым к различным типам уравнений.

Недостатки:

- Может требовать дополнительной алгебраической обработки,
- Необходимо обратная замена после решения нового уравнения.

В общем, метод введения новой переменной – мощный инструмент, который позволяет решать сложные уравнения и системы уравнений, сводя их к более простым формам.

Седьмой вопрос: Функционально-графический метод при решении уравнений.

Функционально-графический метод – это способ решения уравнений, основанный на визуальном представлении графиков функций, соответствующих

левой и правой частям уравнения. Абсциссы точек пересечения этих графиков и являются решениями уравнения.

Основная идея метода:

1. Преобразование уравнения в форму функций:

Уравнение вида $f(x) = g(x)$ представляется в виде двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

2. Построение графиков:

На одной системе координат строятся графики этих функций.

3. Нахождение точек пересечения:

Точки, где графики функций пересекаются, соответствуют решениям уравнения.

4. Вычисление корней:

Абсциссы этих точек пересечения и являются корнями уравнения.

5. Проверка решений:

Рекомендуется проверить полученные решения, подставив их в исходное уравнение, чтобы убедиться в их корректности.

Пример:

Рассмотрим уравнение $2x = 4 - 2x$.

1. Запишем уравнение в виде функций: $y = 2x$ и $y = 4 - 2x$.
2. Построим графики этих функций.
3. Найдём точку пересечения графиков (в данном случае она единственная). Точка пересечения будет иметь координаты $(1; 2)$.
4. Корнем уравнения будет абсцисса точки пересечения, то есть $x = 1$.
5. Проверка: $2 * 1 = 4 - 2 * 1$, $2 = 2$ (уравнение верно).

Преимущества метода:

- **Наглядность:**

Метод позволяет визуально понять, сколько решений имеет уравнение и приблизительно какие они.

- **Простота:**

Простой в понимании и применении, особенно для простых уравнений.

- **Интуитивность:**

Помогает в понимании связи между графиками функций и решениями уравнения.

Недостатки метода:

- **Приближенность решений:**

Решения, полученные графическим способом, могут быть неточными, особенно если графики пересекаются в точках, которые трудно определить.

Сложность графиков:

Метод может быть сложным при построении графиков сложных функций.

Не все уравнения можно решить графически:

Не все типы уравнений легко представить в виде графиков.

Применение:

Функционально-графический метод часто используется при решении:
 Линейных уравнений,
 Квадратных уравнений,
 Систем уравнений,
 Некоторых типов трансцендентных уравнений.

Восьмой вопрос: Линейные уравнения с двумя неизвестными.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 395-396 (часть 8) § 5 (2012-2017, 2024 годы издания, Приложение).

Девятый вопрос: Нелинейные уравнения с двумя неизвестными.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 399 (часть 9) § 5 (2012-2017, 2024 годы издания, Приложение).

Практическая часть.

Сведения по данному вопросу представлены в методических пособиях № 1, № 2.

Десятый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Задание:

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 5 Приложения (с.395-396,399) Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа, материале занятия (текущем План-конспекте), в методических пособиях № 1, № 2.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

Решите уравнения:

1) $5x - 3 = 12$

Ответ: 3

2) $-4x + 1 = 13$

Ответ: - 3

3) $6x - 14 = 1 + 3x$

Ответ: 5

4) $-8x + 3 = -x + 24$

Ответ: - 3

5) $5(x - 2) - 4 = 6x + 7$

Ответ: - 21

6) $\frac{7}{9}x + 4 = \frac{2}{3}x + 8$

Ответ: 36

7) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = x - 3$

Ответ: 9

8) $5,1 - 8x = 3,3 - 10x$

Ответ: - 0,9

9) $0,7(2 - 3y) = -7$

Ответ: 4

Решите уравнения:

$$1) x^2 = \frac{9}{25}$$

Ответ: $\pm \frac{3}{5}$

$$2) x^2 = -0,36$$

Ответ: $\emptyset$

$$3) 16 - x^2 = 0$$

Ответ: ± 4

$$4) x^2 - 0,06 = 0,03$$

Ответ: $\pm 0,3$

$$5) -0,2x^2 = -1,8$$

Ответ: ± 3

$$6) y^2 - 16 = -(12 + 3y^2)$$

Ответ: ± 1

$$7) 48 - 3x^2 - (3 - x) = 2x^2 + x$$

Ответ: ± 3

$$8) (x + 5)^2 = 36$$

Ответ: $-11; 1$

$$9) x^2 - 6x + 9 = 0$$

Ответ: 3

Решите уравнения:

$$1) 2x^2 + 5x = 3x^2$$

Ответ: $0; 5$

$$2) 5x^2 - 3x = 2x + x^2$$

Ответ: $0; 1,25$

$$3) (x - 3)(x + 3) - 2x = 2x^2 - 9$$

Ответ: $-2; 0$

Решите уравнения:

$$1) 5x - 3 = 12$$

Решите уравнения:

$$1) x^2 = \frac{9}{25}$$

$$2) x^2 = -0,36$$

$$3) 16 - x^2 = 0$$

$$4) x^2 - 0,06 = 0,03$$

$$5) -0,2x^2 = -1,8$$

Заключительная часть:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку:

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, указанного на с. 2 Конспекта занятия, материал методических пособий № 1, №2.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.