

1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционных занятий № 60-61
по дисциплине «Математика»

Раздел 14. Уравнения и неравенства

Тема № 14.3: «Уравнения и неравенства с модулем»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2025

Лекционные занятия № 60-61 «Уравнения и неравенства с модулем» по Теме № 14.3 «Уравнения и неравенства с модулем»

Цели занятий: повторно изучить со студентами определение модуля числа, выражения, уравнения и неравенства с модулем, применение равносильных переходов в определенных типах уравнений и неравенств с модулем, решение задач на применение указанных понятий, методов

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по повторению, проверке знаний, умений по пройденному материалу, применению на практике полученных знаний).

Методы проведения занятий: доведение основных теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 ч)

Основные вопросы:

1. Определения модуля. Раскрытие модуля по определению.
2. Простейшие уравнения и неравенства с модулем.
3. Применение равносильных переходов в определенных типах уравнений и неравенств с модулем.
4. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/408656>, с. 54-59 (часть 1) § 8 главы II, с. 395-399 (части 8,9) § 5 Приложения (2012-2017,2024 годы издания).

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, изучение нового материала, выполнение практических заданий).

Первый вопрос: Определения модуля. Раскрытие модуля по определению.

Модуль числа (абсолютная величина) – это само число, если оно неотрицательно, или противоположное ему число, если оно отрицательно.

Некоторые свойства модуля:

- Модуль положительного числа равен ему самому, например, $|5| = 5$.
- Модуль нуля равен нулю, например, $|0| = 0$.
- Модуль отрицательного числа равен противоположному ему положительному (без знака), например, $|-7| = 7$, $|-9,36| = 9,36$.
- Модуль числа всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

Раскрытие модуля по определению – это способ решения уравнений с модулем, который заключается в использовании определения модуля.

Процесс раскрытия модуля по определению:

1. Если в уравнении несколько подмодульных выражений, сначала раскрывают по определению «внутренний» модуль, а затем оставшиеся.
2. Получают совокупности систем, равносильные первоначальному выражению и не содержащие модуля.
3. Решают полученные совокупности систем, находят корни, которые нужно затем проверить на совпадение или несовпадение, и формируют ответ.

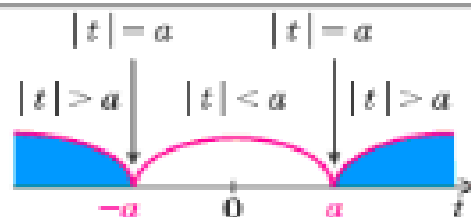
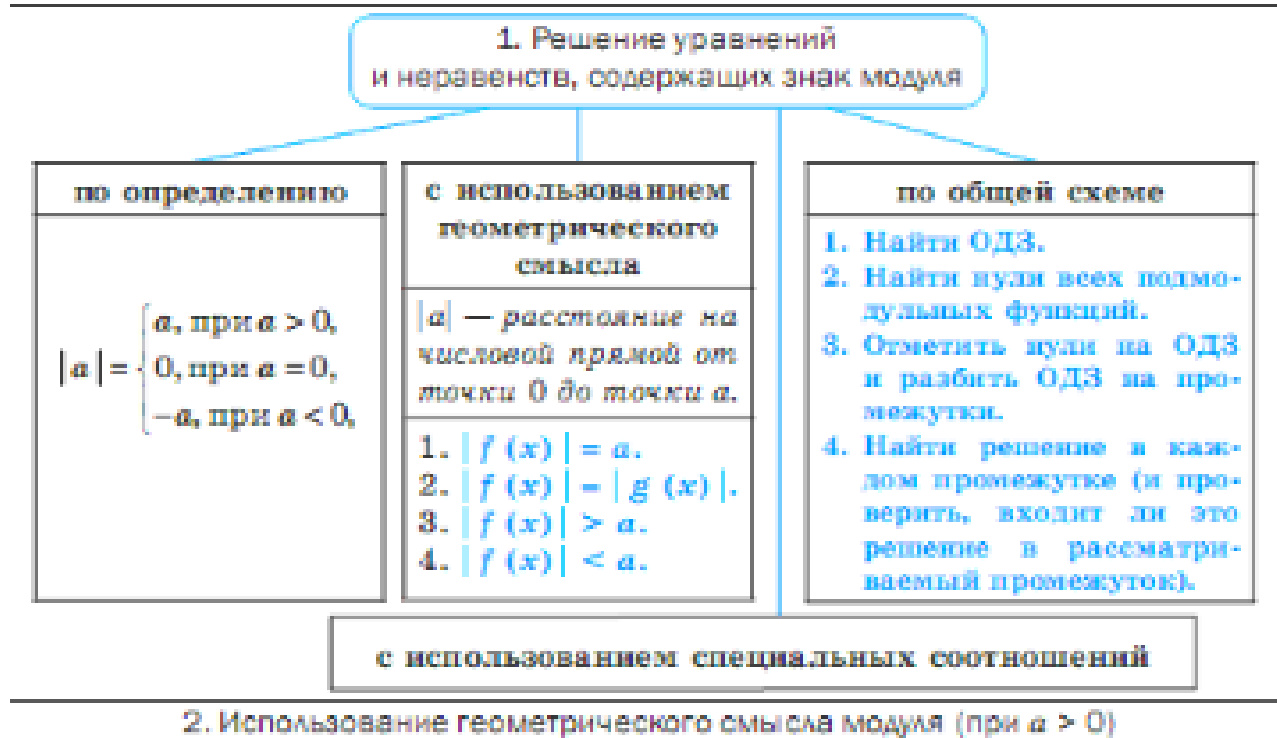
Пример раскрытия модуля по определению:

при решении уравнения $x - 5 = 2$. Рассматривают два случая: $x - 5 < 0$ или $x - 5 > 0$.

- При $x < 5$ подмодульное выражение $x - 5$ отрицательно, следовательно, $-(x - 5) = 2$, $x = 3$.
- При $x > 5$ получают $x - 5 = 2$, $x = 7$.

Второй вопрос: Простейшие уравнения и неравенства с модулем.

Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ или $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ или $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Обобщение

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x) \text{ или } f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

1⁰. Простейшие уравнения. К простейшим (не обязательно *простым*) уравнениям мы будем относить уравнения, решаемые одним из нижеприведенных равносильных переходов:

$$|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f| + |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ g \geq 0 \end{cases}$$

$$|f| + |g| = f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ g \leq 0 \end{cases}$$

$$|f| + |g| = |f + g| \Leftrightarrow f \cdot g \geq 0$$

$$|f| + |g| = |f - g| \Leftrightarrow f \cdot g \leq 0$$

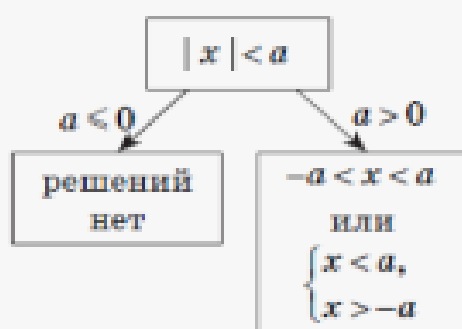
Примеры решения уравнений:

$$1. \left| \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \right| = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x = -1. \end{cases}$$

$$2. |x^3 + x - 1| = |x^3 - x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - 1 = x^3 - x + 1; \\ x^3 + x - 1 = -(x^3 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 1. \end{cases}$$

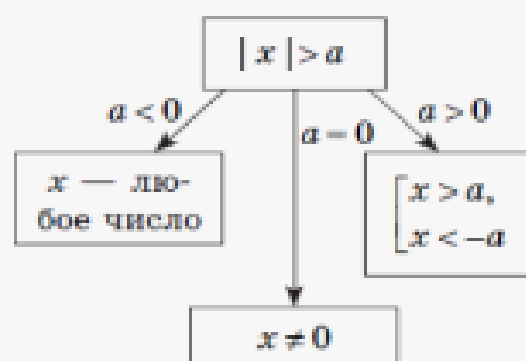
$$3. |x^3 - 3x + 1| = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0, \\ x^3 - 3x + 1 = 3x + 1; \\ x^3 - 3x + 1 = -3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ x = 0; \\ x = \sqrt{6}; \\ x = -\sqrt{6}; \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Простейшие неравенства с модулем



Пример решения:

$$\begin{aligned}
 &|x-1| < 3; \\
 &\begin{cases} x-1 < 3, \\ x-1 > -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -2. \end{cases} \\
 &x \in (-2; 4).
 \end{aligned}$$



Пример решения:

$$\begin{aligned}
 &|x-1| > 3; \\
 &\begin{cases} x-1 > 3, \\ x-1 < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < -2. \end{cases} \\
 &x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty).
 \end{aligned}$$

Пример 1. Определим, при каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$.

Решение

Выражение $\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$ имеет смысл, когда подкоренные выражения неотрицательны и знаменатель не равен 0, т. е. имеет место система:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 9-2x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \geq -3, \\ -2x > -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1,5, \\ x < 4,5; \end{cases} \quad x \in [-1,5; 4,5).$$

Ответ: $[-1,5; 4,5)$.

Пример 2. Решим неравенство $|7x+8| \leq 2$.

Решение

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 7x+8 \leq 2, \\ 7x+8 \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \leq 6, \\ 7x \geq -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{6}{7}, \\ x \geq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \quad x \in \left[-1\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right].$$

Ответ: $\left[-1\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right]$.

Решение неравенств с модулем аналитическим методом

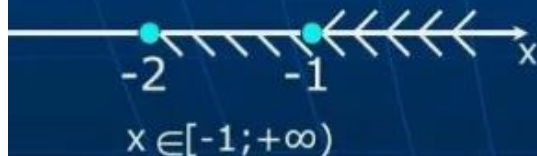
$$|x+2| \geq 1$$

Рассмотрим два случая

I случай

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 \geq 1 \end{cases}$$

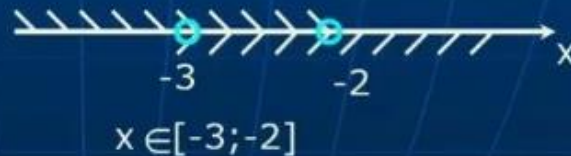
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$



II случай

$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ -2-x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \end{cases}$$



Ответ: $(-3; -2) \cup [-1; +\infty)$.

Пример №1

$$|2x - 1| < 3$$

$$\begin{cases} 2x-1 < 3, \\ 2x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Ответ: $(-1; 2)$

Пример №2

$$|2x - 1| > 3$$

$$\begin{cases} 2x-1 > 3, \\ 2x-1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -1, x > 2$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$$|2x - 3| = 1$$

ОТВЕТ {1; 2}

Пример №1 $x^2 - 5x = 6$ Решение $\begin{cases} x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6, x_2 = -1 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{cases}$ Ответ $\{-1; 2; 3; 6\}$	Пример №1 $x^2 + x - 1 = 2x - 1$ Решение $\begin{cases} x^2 + x - 1 = 2x - 1 \\ x^2 + x - 1 = -2x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \quad x \geq 0,5$ $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Ответ $\{1; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\}$
--	---

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 54-59 (часть 1) § 8 (2012-2017, 2024 годы издания, глава II), методическом пособии № 3.

Третий вопрос: Применение равносильных переходов в определенных типах уравнений и неравенств с модулем.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 54-59 (часть 1) § 8 (2012-2017, 2024 годы издания, глава II), методическом пособии № 3.



Важно знать:

Равносильные переходы:



1. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{cases}$

3. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{cases}$

4. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{cases}$
5. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2;$
6. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) = 0;$
7. $|f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) \vee 0;$

Дополнительные равносильные переходы:

$$8. \quad |f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$9. \quad |f(x)| + |g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0; \end{cases}$$

$$10. \quad |f(x)| + |g(x)| = -f(x) + g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$11. \quad |f(x)| + |g(x)| = -f(x) - g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0; \end{cases}$$

Основные свойства модуля:

$$1) \quad |x| \geq 0;$$

$$2) \quad |-x| = x,$$

$$|x - y| = |y - x|;$$

$$3) \quad |x^2| = |x|^2 = |-x|^2 = x^2,$$

$$|x|^{2k} = x^{2k};$$

$$4) \quad |cx| = c|x|, \quad c > 0;$$

$$5) \quad \sqrt{x^2} = |x|;$$

$$6) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$7) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

Практическая часть.

Сведения по данному вопросу представлены в методическом пособии № 3.

Четвертый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Решить неравенство: $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|.$

Решение: Неравенство имеет вид

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) > 0;$$

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$((x - 6) - (x^2 - 5x + 9))((x - 6) + (x^2 - 5x + 9)) > 0,$$

$$(x - 6 - x^2 + 5x - 9)(x - 6 + x^2 - 5x + 9) > 0,$$

$$(-x^2 + 6x - 15)(x^2 - 4x + 3) > 0,$$

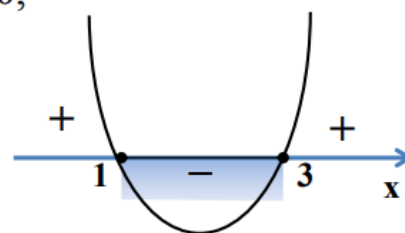
$$(x^2 - 6x + 15)(x^2 - 4x + 3) < 0,$$

$$D < 0$$

$$x = 1$$

$$x = 3$$

$$\Rightarrow 1 < x < 3$$



Ответ: $(1; 3)$

Задание:

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 8 Главы II (с.54-59) Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа, материале занятия (текущем План-конспекте), в методическом пособии № 3.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

Решите уравнения:

1) $|x^2 - 25| = 0$

2) $|8x - 3(3x + 8)| = 9$

3) $|5x - 2(2x - 8)| = -5$

4) $|2x - 8| = |4x + 6|$

5) $|(x + 3)(x - 6)| = 0$

Решите неравенства:

1) $|x^2 - 25| > 0$

2) $|8x - 3(3x + 8)| \geq 9$

3) $|5x - 2(2x - 8)| < -5$

4) $|2x - 8| > |4x + 6|$

5) $|(x + 3)(x - 6)| > 0$

Заключительная часть (по каждому занятию):

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (по каждому занятию):

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, указанного на с. 2 Конспекта занятия, материал методического пособия № 3.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.