

ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ КАДЕТСКИЙ КОРПУС

Дисциплина:

«Математика, основы информатики и
вычислительной техники»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для кадет

Тема: Уравнения и неравенства с
параметрами.

Преподаватель: Молоткова Л. Ф.

г. Тольятти 2008 г.

Тема: Уравнения и неравенства с параметрами.

Учебные цели: Закрепить и углубить знания основных УЭ по теме.

Учебные вопросы:

1. Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
2. Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
3. Некоторые рациональные уравнения и неравенства, сводящиеся к ним.

Предисловие

На вступительных конкурсных экзаменах по математике а вузы часто предлагаются для решения уравнения или неравенства с параметрами.

Большинство абитуриентов испытывают затруднения при решении таких задач, ввиду отсутствия у них теоретических и практических навыков их решения. Основной целью данного пособия является привитие и закрепление таких навыков. В методическом пособии изложены основные методы решения уравнений и неравенств с параметрами, входящих во все разделы школьного курса алгебры и начал анализа. По каждой рассматриваемой теме сначала излагается краткая теория и описываются основные методы решения соответствующих задач. Затем разбираются примеры решения наиболее часто предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы. Наконец, приводятся задачи для самостоятельного решения.

1. Линейные уравнения

Уравнение вида

$$A x = B, \quad (1)$$

где A , B – выражения, зависящие от параметров, x – неизвестное, называется **линейным уравнением с параметрами**.

Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество корней заданного уравнения.

Линейное уравнение (1) исследуется по следующей схеме:

1) Если $A = 0$, то имеем уравнение $0 \cdot x = B$. Тогда, если, кроме того, $B \neq 0$, то уравнение имеет пустое множество решений ($x \in \emptyset$), а если $B = 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и удовлетворяется при любом x , т.е. решением уравнения будет множество всех действительных чисел ($x \in \mathbb{R}$).

2) Если $A \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{B}{A}$.

Замечание. Если линейное уравнение или уравнение, сводящееся к линейному, не представлено в виде (1), то сначала его нужно привести к виду (1) (стандартному виду) и только после этого проводить исследование.

Если для каких-нибудь значений параметров уравнение не имеет смысла, то для этих значений параметров множество решений уравнения пусто. Кроме этого, уравнение может иметь пустое множество решений и при других значениях параметров.

Задача 1. Для всех значений параметра k решить уравнение

$$(k + 4)x = 2k + 1.$$

Решение. Уравнение уже записано в стандартном виде (1), поэтому проведем его исследование по указанной выше схеме.

- 1) Если $k + 4 = 0$, т.е. $k = -4$, то уравнение имеет пустое множество решений, т.е. $x \in \emptyset$.
- 2) Если $k + 4 \neq 0$, т.е. $k \neq -4$, то $x = \frac{2k + 1}{k + 4}$, так как делить на $k + 4$ можно.

Ответ: если $k = -4$, то $x \in \emptyset$;

$$\text{если } k \neq -4, \text{ то } x = \frac{2k + 1}{k + 4}.$$

Задача 2. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left(\frac{3}{4}a - 1\right)x + 3a - 4 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в стандартном виде

$$\left(\frac{3}{4}a - 1\right)x = 4 - 3a.$$

Схема исследования.

- 1) $\frac{3}{4}a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$. Это равенство верно при любом x . Значит, решением уравнения будет все множество действительных чисел, т.е. $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $\frac{3}{4}a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3}$. Тогда $x = \frac{4 - 3a}{\frac{3}{4}a - 1} = -4$.

Ответ: если $a = \frac{4}{3}$, то $x \in \mathbb{R}$;

если $a \neq \frac{4}{3}$, то $x = -4$.

Задача 3. Для всех значений параметра p решить уравнение

$$(p^2 - 1)x = p^3 + 1.$$

Решение.

1) $p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \pm 1$.

При $p = 1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

При $p = -1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

2) $p^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 1$.

$$\text{Тогда } x = \frac{p^3 + 1}{p^2 - 1} = \frac{(p+1)(p^2 - p + 1)}{(p+1)(p-1)} = \frac{p^2 - p + 1}{p - 1}.$$

Ответ: если $p = 1$, то $x \in \emptyset$;

если $p = -1$, то $x \in \mathbb{R}$;

$$\text{если } p \neq \pm 1, \text{ то } x = \frac{p^2 - p + 1}{p - 1}.$$

Задача 4. Для всех значений параметров a и b решить уравнение

$$(a - 2)x = 4a + 3b.$$

Решение.

1) $a = 2$. Уравнение имеет вид $0 \cdot x = 8 + 3b$.

Если $8 + 3b \neq 0$, т.е. $b \neq -\frac{8}{3}$, то это равенство ни при

каком x не выполняется, поэтому $x \in \emptyset$.

Если $b = -\frac{8}{3}$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$,

откуда следует: $x \in \mathbb{R}$.

2) $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$. Тогда $x = \frac{4a + 3b}{a - 2}$.

Ответ: если $a = 2$, $b \neq -\frac{8}{3}$, то $x \in \emptyset$;

если $a = 2$, $b = -\frac{8}{3}$, то $x \in \mathbb{R}$;

если $a \neq 2$, b – любое число, то $x = \frac{4a + 3b}{a - 2}$.

Задача 5. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a}{a-1}x = a^2 + a + 1.$$

Решение.

Если $a = 1$, то уравнение не имеет смысла, поэтому $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 1$, то $a - 1 \neq 0$ и, умножив обе части уравнения на $a - 1$, получим $ax = a^3 - 1$.

1) Если $a = 0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$.

2) Если $a \neq 0$, тогда $x = \frac{a^3 - 1}{a}$.

Ответ: если $a = 0$ или $a = 1$, то $x \in \emptyset$;

если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{a^3 - 1}{a}$.

Задача 6. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a}{2a-x} = \frac{3a-2}{a+1}.$$

Решение.

Уравнение имеет смысл при $2a - x \neq 0$ и $a + 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 2a$, $a \neq -1$.

Умножив обе части уравнения на $(2a - x)(a + 1)$, получим $a(a + 1) = (2a - x)(3a - 2)$ или $(3a - 2)x = 5a^2 - 5a$.

1) Если $3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$, то уравнение имеет вид

$$0 \cdot x = -\frac{10}{9} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

2) Если $3a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{2}{3}$, то $x = \frac{5a^2 - 5a}{3a - 2}$.

Теперь найдем те значения параметра a , при которых $x=2a$, т.е. уравнение не имеет смысла. Имеем:

$$\frac{5a^2 - 5a}{3a - 2} = 2a \Leftrightarrow a^2 + a + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0. \end{cases}$$

Значит, при $a = 0$ и при $a = -1$ уравнение имеет пустое множество решений.

Ответ: если $a \in \left\{-1; 0; \frac{2}{3}\right\}$, то $x \in \emptyset$;

если $a \notin \left\{-1; 0; \frac{2}{3}\right\}$, то $x = \frac{5a^2 - a}{3a - 2}$.

Задача 7. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{1}{x - 2a} = \frac{2}{ax - 1}.$$

Решение.

Уравнение имеет смысл при $2a - x \neq 0$ и $a + 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 2a$, $a \neq 1$.

Если $x \neq 2a$, $a \neq 1$, то умножив обе части уравнения на $(x - 2a)(ax - 1)$, получим

$$ax - 1 = 2x - 4a \text{ или}$$

$$(a - 2)x = 1 - 4a \text{ (стандартный вид).}$$

1) Если $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = -7 \Rightarrow x \in \emptyset$.

2) Если $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$, то $x = \frac{1 - 4a}{a - 2}$.

Теперь найдем те значения параметра a , при которых $x=2a$ или $ax=1$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1-4a}{a-2} = 2a, \\ \frac{a(1-4a)}{a-2} = 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-4a = 2a^2 - 4a, \\ a - 4a^2 = a - 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right]$$

Таким образом, если $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, то уравнение не имеет решения.

Ответ: если $a \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 \right\}$, то $x \in \emptyset$;

если $a \notin \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 \right\}$, то $x = \frac{1-4a}{a-2}$.

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{1}{x-2a} = \frac{2}{ax-1} \text{ имеет положительные корни.}$$

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \neq a$ и $a \neq 2$.

Если $a = 2$, то $x \in \emptyset$.

Если $x \neq a$ и $a \neq 2$, то умножив обе части на $(x-a)(a-2)$, получим

$$\begin{aligned} 2(x-a)a &= (a+1)(a-2) \text{ или} \\ 2ax &= 3a^2 - a - 2 \text{ (стандартный вид).} \end{aligned}$$

Если $a = 0$, то имеем $0 \cdot x = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{3a^2 - a - 2}{2a}$.

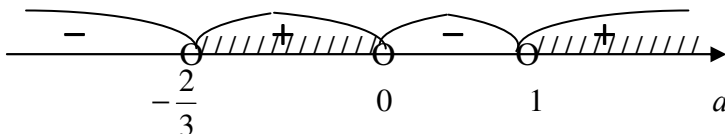
Найдем те значения параметра a , при которых $x = a$. Имеем:

$$\frac{3a^2 - a - 2}{2a} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = a, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 2. \end{cases}$$

Таким образом, если $a \in \{-1; 0; 2\}$, то уравнение не имеет решений; если $a \notin \{-1; 0; 2\}$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{3a^2 - a - 2}{2a}$. Это решение будет положительным, если параметр удовлетворяет неравенству:

$$\frac{3a^2 - a - 2}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(a-1)\left(a + \frac{2}{3}\right)}{2a} > 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Из найденного множества значений параметра a надо еще исключить значение $a = 2$, при котором уравнение не имеет смысла.

Ответ: при $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Задача 9. При каких значениях параметров a и b уравнение $(2a - b + 1)x + 2a + b - 3 = 0$ имеет не менее двух различных корней.

Решение.

Относительно множества решений любого линейного уравнения возможны лишь следующие случаи: решение единственно множество решений пусто и множество решений совпадает с множеством $\mathbb{R}$, поэтому, если линейное уравнение имеет не менее двух различных решений, то обязательно множество решений уравнения совпадает с $\mathbb{R}$. Это возможно тогда

и только тогда, когда коэффициент при x и свободный член уравнения одновременно равны 0, т.е.

$$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0, \\ 2a + b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1, \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 2. \end{cases}$$

Ответ: при $a = \frac{1}{2}, b = 2$.

Задача 10. При каких значениях параметров a и b уравнение $(2a + b)x = a + b - 1$ имеет пустое множество решений.

Решение.

В данном случае необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 2a + b = 0, \\ a + b - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a, \\ a - 2a - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a, \\ a \neq -1 \end{cases} \quad \text{или, что}$$

$$\text{равносильно, } \begin{cases} a = -\frac{b}{2}, \\ -\frac{b}{2} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2}, \\ b \neq 2. \end{cases}$$

Ответ: при $a \neq -1, b = -2a$ (или $a = -\frac{b}{2}, b \neq 2$).

Задачи для самостоятельного решения

Для всех значений параметров a, b, m, p решить уравнения (1.1 – 1.11).

1.1. $(5p + 1)x + 25p^2 + 10p + 1 = 0$.

1.2. $ax - a = x - 1$.

1.3. $(p^2 - 4)x = p^2 + p - 2$.

1.4. $(p^2 - 1)x - p^2 + 2p - 1 = 0$.

1.5. $(m - 3)x + m + 2p = 0$.

1.6. $(a + b)x + a + b = 3$.

1.7. $(a - 1)x - \sqrt{a} = 0$.

1.8. $\frac{a+1}{a+2}x = a^2 - 1$.

1.9. $a + \frac{1-a}{a(x-1)} = \frac{1}{a}$.

1.10. $\frac{a+1}{x-a} - \frac{2a}{a+2} = 0$.

1.11. $\frac{1+x}{1-x} = \frac{a-b}{a+b}$.

1.12. При каких значениях параметров a и b уравнение $(a - b + 6)x - 3a + 1 = 0$ имеет по крайней мере два различных корня.

1.13. При каких значениях параметров a и b уравнение $(3a + b + 4)x - 3b + 2a = 0$ не имеет решений.

- 1.14. Найти все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $2x - 5a = 3 - 4ax$ не больше 2.
- 1.15. Найти все значения параметра a , при каждом из которых решение уравнения $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$ меньше 2.
- 1.16. Найти все значения параметра a , при каждом из которых все решения уравнения $3x - 6a = 3ax - 6$ больше 1.
- 1.17. При каких значениях параметров a и b равенство
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{x}{x^2-1}$$
 выполняется для всех допустимых значений x .

2. Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним

Неравенства $Ax > B$, $Ax < B$, $Ax \geq B$, $Ax \leq B$, где A , B – выражения, зависящие от параметров, x – неизвестное, называются **линейными неравенствами с параметрами**.

Решить неравенство с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество решений заданного неравенства.

Неравенство вида $Ax > B$ исследуется по следующей схеме:

1) Если $A > 0$, то $x > \frac{B}{A}$.

2) Если $A < 0$, то $x < \frac{B}{A}$.

3) Если $A = 0$, то неравенство имеет вид $0 \cdot x > B$.

При $B \geq 0$ неравенство имеет пустое множество решений; при $B < 0$ решением неравенства будет множество всех действительных чисел R .

Остальные неравенства исследуются аналогично.

Задача 1. Для всех значений параметра k решить неравенство

$$(k + 4)x \leq 2k - 1.$$

Решение. Запишем неравенство в стандартном виде:

$$(k + 4)x + 2k - 1 \leq 0$$

3) $k + 4 > 0 \Leftrightarrow k > -4$. Тогда $x \leq \frac{1 - 2k}{k + 4}$.

4) $k + 4 < 0, \Leftrightarrow k < -4$. При этом $x \geq \frac{1 - 2k}{k + 4}$.

5) $k + 4 = 0, \Leftrightarrow k = -4$. Неравенство имеет вид $0 \cdot x \leq 9$. Это неравенство верно при любом x , поэтому решением будет множество всех действительных чисел, т.е. $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: если $k > -4$, то $x \leq \frac{1-2k}{k+4}$;

если $k < -4$, то $x \geq \frac{1-2k}{k+4}$;

если $k = -4$, то $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Для всех значений параметра p решить неравенство

$$(p-1)x > p^2 - 1.$$

Решение.

1) $p-1 > 0 \Leftrightarrow p > 1$. Тогда $x > \frac{p^2-1}{p-1} \Leftrightarrow x > p+1$.

2) $p-1 < 0, \Leftrightarrow p < 1$. Тогда $x < \frac{p^2-1}{p-1} \Leftrightarrow x < p+1$.

3) $p-1 = 0, \Leftrightarrow p = 1$. Неравенство имеет вид $0 \cdot x > 0$. Это неравенство ни при каком x не выполняется, поэтому $x \in \emptyset$.

Ответ: если $p > 1$, то $x > p+1$;

если $p < 1$, то $x < p+1$;

если $p = 1$, то $x \in \emptyset$.

Задача 3. Для всех значений параметров a и b решить неравенство $(a+2)x < b-a$.

Решение.

1) $a+2 > 0 \Leftrightarrow a > -2$. Тогда $x < \frac{b-a}{a+2}$.

2) $a+2 < 0, \Leftrightarrow a < -2$. Тогда $x > \frac{b-a}{a+2}$.

3) $a+2 = 0, \Leftrightarrow a = -2$. Неравенство имеет вид $0 \cdot x > b-2$.

Если $b - 2 > 0 \Leftrightarrow b > 2$, то это неравенство верно при любом x , поэтому решением будет $x \in \mathbb{R}$.

Если $b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 2$, то $x \in \emptyset$.

Ответ: если $a > -2$, то $x < \frac{b-a}{a+2}$;

если $a < -2$, то $x > \frac{b-a}{a+2}$;

если $a = -2$, $b > 2$, то $x \in \mathbb{R}$;

если $a = -2$, $b < 2$, то $x \in \emptyset$.

Задача 4. Найти область определения функции

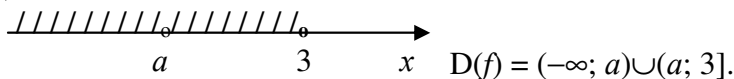
$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \sqrt{3-x}.$$

Решение. Так как выражение, находящееся в знаменателе, должно быть отлично от нуля, а выражение, находящееся под квадратным корнем, должно быть неотрицательным, то областью определения $D(f)$ функции будет множество решений системы:

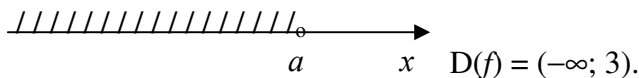
$$\begin{cases} x-a \neq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq a, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Изобразим решение полученной системы на числовой оси. При этом возможны следующие случаи расположения точек a и 3 относительно друг друга.

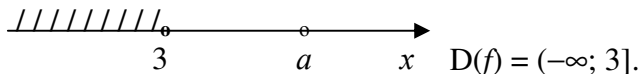
1) Точка a находится левее точки 3 , т. е. $a < 3$. Тогда



2) Точка a и 3 совпадают, т.е. $a = 3$. Тогда



3) Точка a находится правее точки 3 , т.е. $a > 3$. Тогда



Ответ: если $a < 3$, то $D(f) = (-\infty; a) \cup (a; 3]$;
 если $a = 3$, то $D(f) = (-\infty; 3)$;
 если $a > 3$, то $D(f) = (-\infty; 3]$.

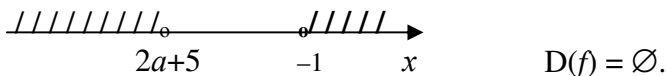
Задача 5. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{2a+5-x}.$$

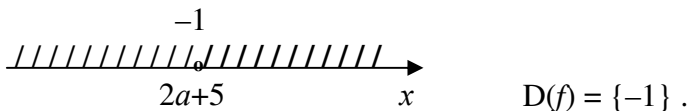
Решение.

$$\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 2a+5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2a+5 \end{cases}$$

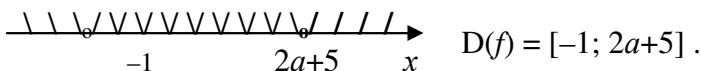
- 1) $2a+5 < -1 \Leftrightarrow a < -3$. Тогда точка $2a+5$ находится левее точки -1 . Тогда



- 2) $2a+5 = -1 \Leftrightarrow a = -3$. Тогда точки $2a+5$ и -1 совпадают.



- 3) $2a+5 > -1 \Leftrightarrow a > -3$. Тогда точка $2a+5$ находится правее точки -1 . Тогда



Ответ: если $a < -3$, то $D(f) = \emptyset$;
 если $a = -3$, то $D(f) = \{-1\}$;
 если $a > -3$, то $D(f) = [-1; 2a+5]$.

Задача 6. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 + 2a - 3)x \leq 2a^3 + 5$ выполняется для всех x .

Решение. Неравенство $Ax \leq B$ выполняется для всех x тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $B \geq 0$. Следовательно

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 0, \\ 2a^3 + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ или } a = -3, \\ 2a^3 + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Ответ: при $a = 1$.

Задача 7. При каких значениях параметров a и b неравенство $(a - 1 + b)x \geq 4 + 5a + b$ имеет пустое множество решений.

Решение. В данном случае необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{cases} a - 1 + b = 0, \\ 4 + 5a + b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b, \\ 4 + 5(1 - b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b, \\ b < \frac{9}{4} \end{cases}$$

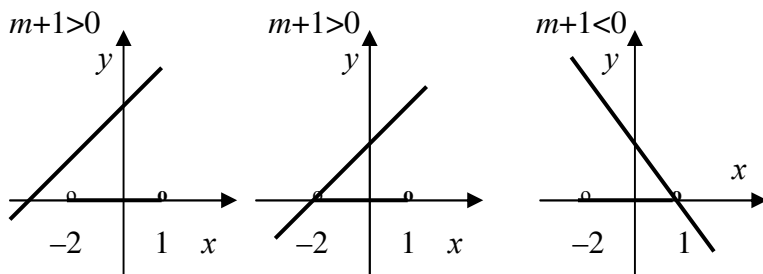
или что равносильно, $\begin{cases} b = 1 - a, \\ 4 + 5a + 1 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a > -\frac{5}{4}. \end{cases}$

Ответ: при $a = 1 - b$, $b < \frac{9}{4}$ (или $a > -\frac{5}{4}$, $b = 1 - a$).

Задача 8. При каких значениях параметра m неравенство $(m + 1)x + m + 4 > 0$ выполняется для всех $x \in (-2; 1]$.

Решение.

- 1) Если $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, то неравенство имеет вид $0 \cdot x + 3 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$. Следовательно, при $m = -1$ для всех $x \in (-2; 1]$ неравенство также выполняется.
- 2) Если $m \neq -1$, то для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы график линейной функции $f(x) = (m+1)x + m + 4$, в зависимости от знака $m+1$, имел схематически одно из следующих расположений относительно промежутка $(-2; 1]$:



Следовательно, во всех случаях:

$$\begin{cases} f(-2) \geq 0, \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \geq 0, \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m \leq 2.$$

Замети, что значение $m = -1$, при котором условие задачи также выполняется, принадлежит промежутку $\left(-\frac{5}{2}; 2\right]$.

Ответ: при $-\frac{5}{2} < m \leq 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Для всех значений параметров a, b, k, m , решить неравенства (2.1 – 2.11).

$$1.18. \quad (k+1)x - 3k + 1 \leq 0.$$

$$1.19. \quad (m^2 - 1)x - 2m + 1 > 0.$$

$$1.20. \quad \frac{a-1}{a}x - 2a + 3 > 0.$$

$$1.21. \quad ax + 3(a-x) < 8a - 13x + 1.$$

$$1.22. \quad \frac{(a+2)x}{a-1} + \frac{1}{3} < 2x.$$

$$1.23. \quad a^2(x+1) + a \leq x + 2.$$

$$1.24. \quad (a+3)x - 5a + 3b < 0.$$

$$1.25. \quad (2k+4)x \geq 1 - b.$$

$$1.26. \quad \frac{(x+3)(a-1)-b}{a-b} < 1.$$

$$1.27. \quad \frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6}.$$

$$1.28. \quad \frac{a-2}{x+a} \leq 0.$$

Для всех значений параметра a найти область определения $D(f)$ функции (2.12 – 2.15).

$$1.29. \quad f(x) = \sqrt{x-2a} + \sqrt{1+x}.$$

$$1.30. \quad f(x) = \sqrt{a+1-x} - \frac{3x+a}{\sqrt{x+2}}.$$

1.31.
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+a-1}}{2+x}.$$

1.32.
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{a+x}.$$

1.33. При каких значениях параметров a и b неравенство $(2a - b - 1)x \leq a + 2$ выполняется для всех x .

1.34. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 + 5a + 6)x - a^2 + 4 < 0$ имеет пустое множество решений.

1.35. При каких значениях параметра a неравенство $ax + 2a + 3 > 0$ верно при всех x , удовлетворяющих условию $|x| \leq 3$.

1.36. При каких значениях параметра b неравенство $(b - 1)x - 3b + 2 \leq 0$ выполняется для всех $x \geq -1$.

1.37. При каких значениях параметра a решение неравенства $ax + x - 2a + 1 > 0$ удовлетворяет условию $x > a$.

1.38. При каких значениях параметра a решение неравенства $ax + x + 1 < 0$ удовлетворяет условию $x > 1$.

3. Некоторые рациональные уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным

Задача 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-4a=0, \\ x+2a+3=0, \\ x+3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4a, \\ x=-2a-3, \\ x \neq -3a. \end{cases}$$

Возможны случаи.

1) $4a = -3a \Leftrightarrow a = 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x=0, \\ x=-3, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-3.$$

2) $-2a-3 = -3a \Leftrightarrow a = 3$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x=12, \\ x=-9, \\ x \neq -9 \end{cases} \Rightarrow x=12.$$

3) $x \neq 0$ и $a \neq 3$. Тогда $4a = -3a$ и $-2a-3 = -3a$, поэтому уравнение имеет два решения: $x = 4a$ и $x = -2a-3$.

Ответ: если $a = 0$, то $x = -3$;
если $a = 3$, то $x = 12$;
если $x \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x \in \{4a; -2a-3\}$.

Задача 2. Для всех значений параметра a решить неравенство

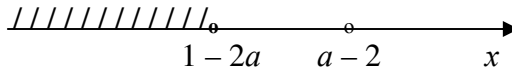
$$\frac{x+2a-1}{(x+2-a)^2} \leq 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 2a - 1 \leq 0 \\ x + 2 - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - 2a, \\ x \neq a - 2. \end{cases}$$

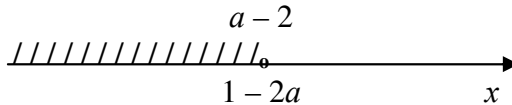
Возможны случаи.

1) $1 - 2a < a - 2 \Leftrightarrow a > 1$. Тогда



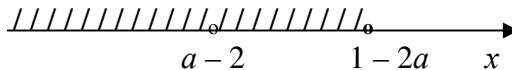
Отсюда $x \leq 1 - 2a$.

2) $1 - 2a = a - 2 \Leftrightarrow a = 1$. Тогда



Отсюда $x < a - 2$. Т.к. $a - 2 = 1 - 2 = -1$, то $x < -1$.

3) $1 - 2a > a - 2 \Leftrightarrow a < 1$. Тогда



Отсюда $x \in (-\infty; a - 2) \cup (a - 2; 1 - 2a]$.

Ответ: если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a - 2) \cup (a - 2; 1 - 2a]$;

если $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1)$;

если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1 - 2a]$.

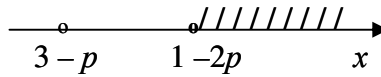
Задача 3. Для всех значений параметра p решить неравенство $(x - 3 + p)^2(x - 1 + 2p) \geq 0$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x - 3 + p = 0, \\ x - 1 + 2p \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - p, \\ x \geq 1 - 2p. \end{cases}$$

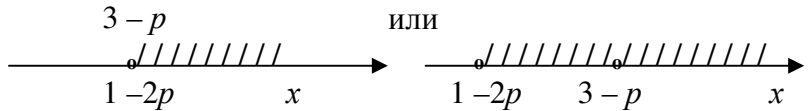
Возможны случаи.

1) $3 - p < 1 - 2p \Leftrightarrow p < -2$. Тогда



Следовательно, решением совокупности будет множество $\{3 - p\} \cup [1 - 2p; +\infty)$.

2) $3 - p \geq 1 - 2p \Leftrightarrow p \geq -2$. Тогда



Отсюда $x \in [1 - 2p; +\infty)$.

Ответ: если $p < -2$, то $\{3 - p\} \cup [1 - 2p; +\infty)$;
если $p \geq -2$, то $x \in [1 - 2p; +\infty)$.

Задача 4. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$\frac{a}{x+1} \geq -1$$

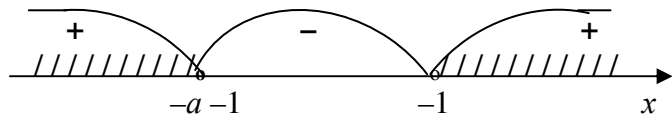
Решение. Приведем неравенство к стандартному виду:

$$\frac{a}{x+1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+a+1}{x+1} \geq 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов, для чего на числовой оси отметим точки $x = -a-1$ и $x = -1$.

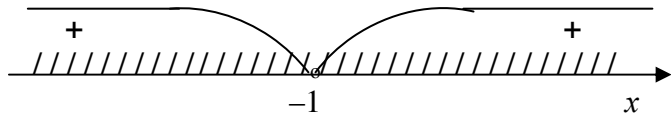
Возможны случаи.

1) $-a-1 < -1 \Leftrightarrow a > 0$. Тогда



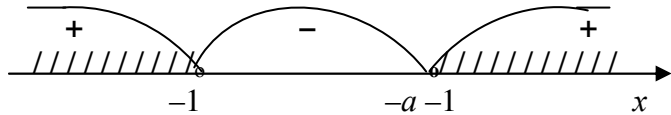
$x \in (-\infty; -a-1] \cup (-1; +\infty)$.

2) $-a - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 0$. Тогда



$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

3) $-a - 1 > -1 \Leftrightarrow a < 0$. Тогда



$$x \in (-\infty; -1) \cup [-a - 1; +\infty).$$

Ответ: если $a < 0$, то $x \in (-\infty; -1) \cup [-a - 1; +\infty)$;
 если $a = 0$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;
 если $a > 0$, то $x \in (-\infty; -a - 1] \cup (-1; +\infty)$.

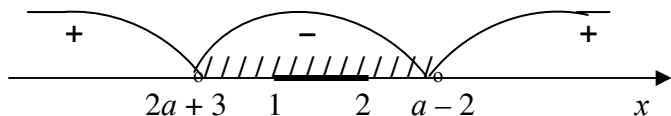
Задача 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 3}{x - (a - 2)} \geq -1$$

выполняется для всех x из промежутка $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Неравенство решим методом интервалов, рассматривая три случая.

1) $2a + 3 < a - 2 \Leftrightarrow a < -5$.

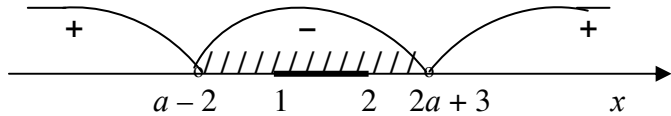


$$x \in (2a + 3; a - 2).$$

Чтобы выполнялось условие задачи, точки $x=1$ и $x=2$ должны находиться в заданном промежутке. Тем самым, имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < -5, \\ 2a + 3 < 1, \\ a - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -5, \\ a < -1, \\ a > 4 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset.$$

2) $a - 2 < 2a + 3 \Leftrightarrow a > -5.$



$x \in (a - 2; 2a + 3).$

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > -5, \\ a - 2 < 1, \\ 2a + 3 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5, \\ a < 3, \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 3.$$

3) $a - 2 = 2a + 3 \Leftrightarrow a = -5.$ В этом случае неравенство имеет вид:

$$\frac{x+7}{x+7} < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} < a < 3.$

Задача 6. Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 4) > 0$ не содержит ни одного решения неравенства $-1 \leq x \leq 1$.

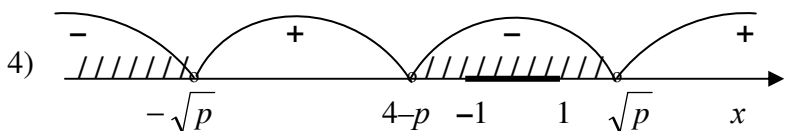
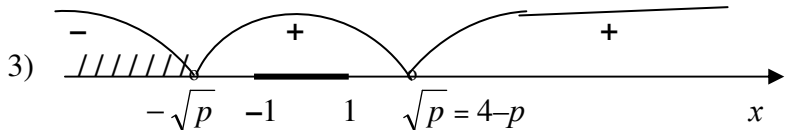
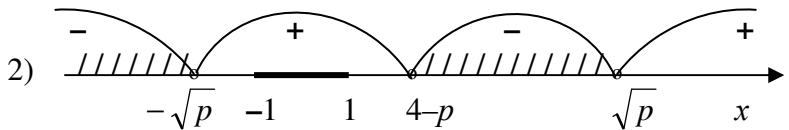
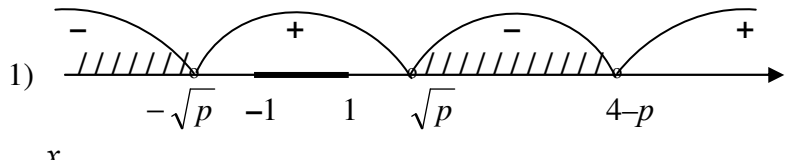
Решение. Перепишем неравенство в виде $(x^2 - p)(x - (4 - p)) < 0$.

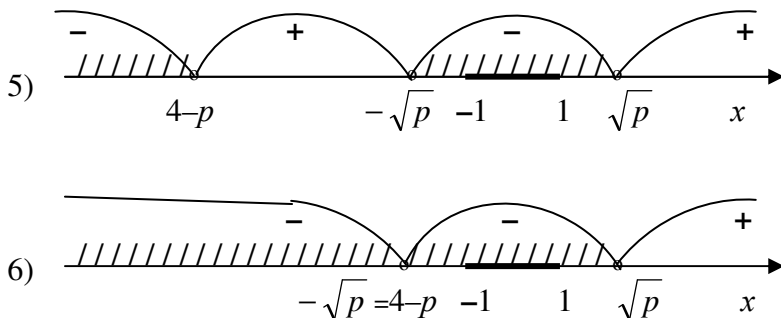
Если $p < 0$, то всегда $x^2 - p > 0$ и неравенство равносильно неравенству $x - (4 - p) < 0 \Leftrightarrow x < 4 - p$. Множество $(-\infty; 4 - p)$ не содержит отрезок $[-1; 1]$, если выполнены условия:

$$\begin{cases} 4 - p < -1, \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 5, \\ p < 0 \end{cases} \Rightarrow p \in \emptyset.$$

Если $p = 0$, то имеем $x^2(x - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4)$. Так как точки отрезка $[-1; 1]$ содержатся в данном множестве, то при $p = 0$ условие задачи не выполняется.

Если $p > 0$, то имеем $(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})(x - (4 - p)) < 0$. Последнее неравенство решим методом интервалов. При этом надо рассматривать возможные случаи расположения точек $x = -\sqrt{p}$, $x = \sqrt{p}$ и $x = 4 - p$ относительно друг друга.





Из этих рисунков видно, что в случаях 4–6 условие задачи никогда не может быть выполнено, а в случаях 1–3 задача имеет решение, если одновременно $\sqrt{p} \geq 1$ и $4 - p \geq 1$. При этом неравенство $-\sqrt{p} \leq -1$ будет выполнено автоматически.

Следовательно, с учетом еще неравенства $p > 0$ имеем систему:

$$\begin{cases} p > 0, \\ \sqrt{p} \geq 1, \\ 4 - p \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 1, \\ p \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq p \leq 3.$$

Ответ: $1 \leq p \leq 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Для всех значений параметр a решить уравнения (3.1 – 3.3).

$$1.39. \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x + a + 1} = 0. \quad 3.2.$$

$$\frac{(ax + 1)(x + a - 5)}{x - 2a + 1} = 0.$$

$$3.3. \quad \frac{(a + 2)x + 2a}{x^2 - x - 2} = -1.$$

Для всех значений параметров a и b решить неравенства (3.4 – 3.12).

$$3.4. \quad \frac{x - a}{x + 2a} > 0. \quad 3.5. \quad \frac{x - a}{x - b} \leq 0.$$

$$3.6. \quad \frac{x - (2a - 3)}{x + a - 1} \geq 0. \quad 3.7. \quad \frac{(1 - a)x - a}{x - 2(1 - a)} \leq 0.$$

$$3.8. \quad \frac{a}{x + 1} > -1. \quad 3.9. \quad \frac{ax - (1 - a)a}{a^2 - ax - 1} > 0.$$

$$3.10. \quad \frac{ax + 1}{ax - 1} \geq \frac{a + 1}{a - 1}. \quad 3.11. \quad (x + 2)^2(x - 2 + a) < 0.$$

$$3.12. \quad \frac{(x + 3 + a)^2}{2a - x} \leq 0.$$

Для всех значений параметра a найти область определения $D(f)$ функций (3.13-3.15).

$$3.13. \quad f(x) = \sqrt{\frac{a^2x + 2a}{ax - 2 + a^2}}.$$

$$3.14. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{(x+1)(x-2a+1)}}.$$

$$3.15. \quad f(x) = \sqrt{(ax-2+a)^2(x+1)}.$$

3.16. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x-a+1}{x-2a} < 0$ выполняется для всех $x \in [1; 2]$.

3.17. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x-a+3}{x-2a+1} < 0$ выполняется для всех $x \in (0; 2)$.

4. Задачи, в которых надо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям

Задача 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = 2a - 3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Решение. Найдём ОДЗ: $a \leq 1$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + 2(1-a)}$, чтобы ввести вспомогательный угол α :

$$\begin{aligned} a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = 2a - 3 &\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \sin 3x + \\ &+ \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \cos 3x = \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \Leftrightarrow \sin(3x + \alpha) = \\ &= \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}.$$

Функция $f(x) = \sin(3x + \alpha)$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три решения на отрезке $[-\pi; \pi]$ может быть только тогда, когда

$$\frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} = \pm 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{a^2 - 3a + 3} = 2a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \begin{matrix} \text{ОДЗ} \\ \Leftrightarrow \end{matrix} a = 1,$$

и это значение не принимается ни на одном из концов отрезка $[-\pi; \pi]$. Проверим это. При $a = 1$ получаем

$$a \sin 3x + \sqrt{2(1-a)} \cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow 3 \sin 3x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(-3\pi) = \sin 3\pi = 0 \neq \pm 1$$

Ответ: 1

Задача 2. При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

Решение. Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$\left(t^2 + 4t + (7 - p) + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных $y = t + \frac{1}{t}$, причем

$$y = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{(t-1)^2 + 2t}{t} \geq 2. \quad \text{Преобразуем уравнение}$$

$$\left(t^2 + 4t + (7 - p) + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0:$$

$$\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 4 \left(t + \frac{1}{t} \right) + (5 - p) = y^2 + 4y + (5 - p) = 0$$

Так как вершина параболы $z = y^2 + 4y + (5 - p)$ расположена слева от оси z и ветви направлены вверх, то корень $y \geq 2$ существует тогда и только тогда, когда

$$z(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + 5 - p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq 17.$$

Ответ: $[17; +\infty)$

Задача 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

Решение. Такие уравнения проще всего решать заменой переменных. Пусть $\sqrt{x-8} = t$, $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 8$ и уравнение примет вид $at^2 + t + 5a - 2 = 0$. Теперь задача состоит в том, чтобы найти a , при которых уравнение $at^2 + t + 5a - 2 = 0$ имеет единственное неотрицательное решение $t = 2$.

1. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $t = 2$.
2. Если $a \neq 0$ и $D \equiv 1 - 20a^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow a \in (-0,1; 0,5)$, то имеем единственное неотрицательное решение, если корни разных знаков, т.е.

$$t_1 t_2 = \frac{5a-2}{a} \leq 0 \Leftrightarrow a \in \left(0; \frac{2}{5}\right].$$

(При $a = \frac{2}{5}$ получаем $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{a} < 0$.)

3. Если $a \neq 0$ и $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,1 \Rightarrow t = 5, \\ a = 0,5 \Rightarrow t = -1, \end{cases}$ то одно неотрицательное решение имеем при $a = -0,1$

Ответ: $\{-0,1\} \cup [0; 0,4]$.

Задача 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений неравенства $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ нет ни одной точки отрезка $[7; 96]$.

Решение. В этом примере сначала решим неравенство при всех значениях параметра, а потом найдём те из них, для которых среди решений нет ни одной точки

отрезка $[7; 96]$. Пусть $t = \sqrt{ax} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = t^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$ При такой

замене переменных ОДЗ неравенства выполняется автоматически.

Видно, что x можно выразить через t , если $a \neq 0$. Поэтому случай, когда $a = 0$, придётся рассмотреть отдельно.

1. Пусть $a = 0$, тогда $x + 4a > 5\sqrt{ax} \Leftrightarrow x > 0$, и заданный отрезок является решением.
2. Пусть $a \neq 0$, тогда $x = \frac{t^2}{a}$ и неравенство

$$x + 4a > 5\sqrt{ax} \text{ примет вид } \begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0. \end{cases}$$

Теперь видно, что решение неравенства зависит от знака a , поэтому придётся рассматривать два случая:

а) Если $a > 0$, то

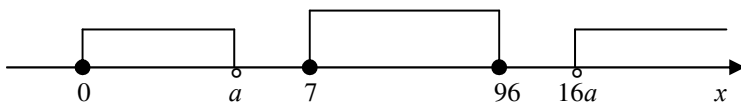
$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 &\Leftrightarrow t^2 - 5at + 4a^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t \in [0; a) \cup (4a; +\infty), \end{aligned}$$

или, в старых переменных,

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{ax} < a \Leftrightarrow 0 \leq x < a, \\ \sqrt{ax} > 4a \Leftrightarrow x > 16a. \end{cases}$$

Решение не содержит ни одной точки заданного отрезка $[7; 96]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (см. рис.):

$$\begin{cases} a \leq 7, \\ 16a \geq 96 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [6; 7].$$



б) Если $a < 0$, то

$$\frac{t^2 - 5at + 4a^2}{a} > 0 \Leftrightarrow t^2 - 5at + 4a^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \in (4a; a) \Leftrightarrow t \in \emptyset,$$

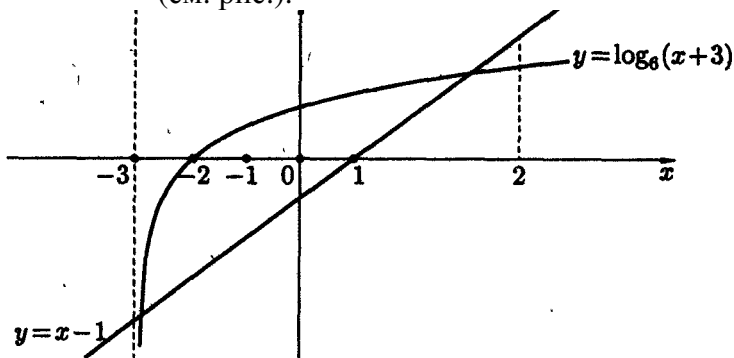
т.к. $t \geq 0$.

Ответ: $[6; 7]$.

Задача 5. Сколько целых решений имеет неравенство

$$x - 1 < \log_6(x + 3)?$$

Решение. Неравенство не решается стандартными способами. Всё множество решений найти невозможно. Исследуем его графически. Построим эскизы правой и левой частей (см. рис.):



Видно, что точки $x = -2; -1; 0; 1$ удовлетворяют неравенству, а при $x = 2$ неравенство уже неверно, т.к. $2 - 1 > \log_6(2 + 3)$. Целых решений 4.

Ответ: 4.

Задача 6. При каких a существует положительное решение неравенства $2 > |x + a| + x^2$?

Решение. Эта задача сводится к следующей: найти все

a , при которых система неравенств
$$\begin{cases} |x + a| < 2 - x^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

имеет решение (сами решения не требуется находить!)
Воспользуемся условием равносильности:

$$\begin{cases} |x + a| < 2 - x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + a < 2 - x^2, \\ x + a > x^2 - 2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2 - x - x^2, \\ a > x^2 - x - 2, \\ x > 0. \end{cases}$$

Будем решать неравенства в плоскости (x, a) . Для этого построим сначала графики соответствующих уравнений: $a = -x^2 - x + 2$ и $a = x^2 - x - 2$. Это будут параболы:

$$a = -x^2 - x + 2 \equiv -(x + 2)(x - 1) \equiv -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

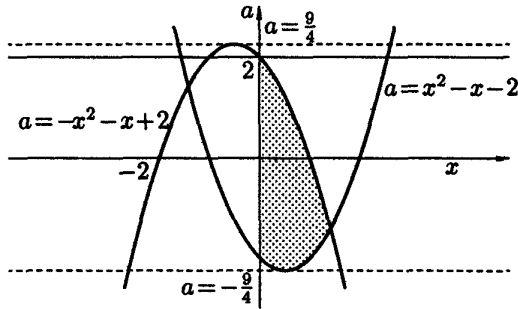
$$\text{и } a = x^2 - x - 2 \equiv (x - 2)(x + 1) \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, \text{ графики}$$

которых легко построить. Первая парабола пересекает ось a в точке $x = \frac{1}{2}, a = -\frac{9}{4}$. Первое неравенство

выполнено внутри параболы $a = -x^2 - x + 2$, а второе выполнено внутри параболы $a = x^2 - x - 2$.

Из рисунка видно, что система имеет положительные решения при $a \in \left(-\frac{9}{4}; 2\right)$.

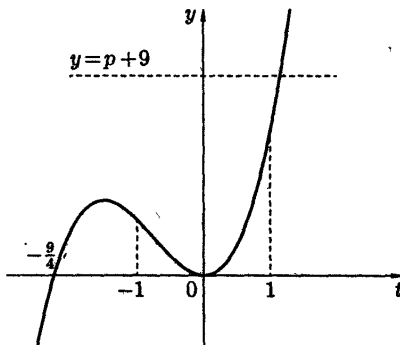
$$\textbf{Ответ:} \left(-\frac{9}{4}; 2\right)$$



Задача 7. Найдите все значения p , при которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет решений.

Решение. Выразим прежде всего $\cos 2x$ через $\sin x$. Можно воспользоваться одним из вариантов формулы для косинуса двойного угла: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Тогда $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x \Leftrightarrow 8\sin^3 x = p + 9(1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow 8\sin^3 x + 18\sin^2 x - 9 = p$.

Пусть $t = \sin x, t \in [-1; 1]$, тогда задача свелась к нахождению всех значений p , при которых уравнение $8t^3 + 18t^2 - 9 = p$ не имеет решений на отрезке $[-1; 1]$. Уравнение алгоритмически не решается, поэтому решим задачу, используя график. Запишем уравнение в виде $8t^3 + 18t^2 = 9 + p$, и теперь эскиз графика левой части $y = 2t^2(4t + 9)$ строится несложно (см. рис.).



Сразу видно, что у графика есть максимум на отрезке $\left[-\frac{9}{4}; 0\right]$, и решение зависит от того, точка максимума находится левее или правее точки $t = -1$. Это можно выяснить с помощью дифференцирования. Но мы изучим внимательнее функцию и заметим, что при всех $t \in [-1; 1]$ верны неравенства:

$$0 \leq 2t^2(4t+9) \equiv 2t^2(4(t+1)+5) \leq 2 \cdot 13, \text{ т.к. } 0 \leq t+1 \leq 2, \\ \text{причем } y(0) = 0, y(1) = 26 = y_{\max}. \text{ Следовательно,} \\ \text{уравнение не имеет решений, если прямая } y = p + 9 \text{ не} \\ \text{пересекает график на отрезке, т.е.} \\ \begin{cases} p + 9 > 26, \\ p + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty; 9) \cup (17; +\infty).$$

Ответ:

$$(-\infty; 9) \cup (17; +\infty)$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ имеет хотя бы один корень и число различных корней уравнения $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Ответ: -1,5; -1.

4.2. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(2p-1)x^2 + 2(2p+1)x - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень и число корней уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{3x-6}{p} = \frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{3}-2}}.$$

Ответ: $p \in (0; 0,5) \cup (0,5; 10)$.

- 4.3. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(p-7)x^2 + 4px + 5p = 0$ имеет хотя бы один корень и число корней уравнения равно числу корней уравнения $\frac{x-2}{p} = \frac{1}{\sqrt{x-4+3}}$.

Ответ: 7; 35.

- 4.4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^3 + x^2(5-a) - x(4a-7) - 3a + 4} = x + 2$ имеет единственный корень.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{-1\}$.

- 4.5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений неравенства $\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$ есть отрезок $[1; 2]$.

Ответ: $(0; 1)$.

- 4.6. Найдите все значения $x > 1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_2 x + 3\log_x 32 - 3$ и $b = \log_x 16x^4$ больше 5.

Ответ: $(1; 16) \cup (32; +\infty)$.