«Решение прикладных задач на приложения производной»

Цель занятия: повторить со студентами понятие производной, правила, формулы дифференцирования, решение задач на применение производной

Основные вопросы:

1. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Литература:

1. учебник: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа,геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5- 09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, с. 291-296 (часть 6), с. 297-315 (часть7) **§54,56,57,58,59 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (повторение пройденного материала), опроса по пройденному материалу, закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (повторение пройденного материала, выполнение практических заданий):

Основные сведения по следующим вопросам:

1. Задачи, приводящие к понятию производной – о вычислении средней, мгновенной скорости движения тела (физический смысл производной).
2. Ознакомление с понятием производной.
3. Вычисление производных.
4. Изучение правил вычисления производных (правила, формулы дифференцирования).
5. Геометрический смысл производной.

6. Возрастание и убывание функции. Соответствие возрастания и убывания функции знаку производной. Понятие монотонности функции.
7. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на максимум и минимум.
8. Понятие асимптоты и способы её определения.
9. Алгоритм исследования функции и построения её графика с помощью производной.
10. Понятие производной высшего порядка. Соответствие знака второй производной выпуклости (вогнутости) функции на отрезке.
11. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

представлены 1-ом учебнике на с. 229-290 (части 5, 6) **§ 44-53** (**2012-2017,2024 годы издания**, главы **VIII**,**IX**), конспектах лекционного занятия **№1** по Теме 1.1 «Дифференциальное и интегральное исчисление» (части 1-5)

<u>Практическая часть.</u>

Первый вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

<u>Применение производной при решении задач на вычислениие максимальных, минимальных значений.</u>

Сведения по данной части вопроса представлены в 1-ом учебнике списка литературы на с. 277-262 (часть 6) **§ 52** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

<u>Применение производной при решении задач с использованием дифференциальных уравнений.</u>

Сведения по данной части вопроса представлены в 1-ом учебнике списка литературы на с. 309-311 (часть 7) **§ 59** (**2012-2017,2024 годы издания**, глава **IX**).

<u>Дифференциальные уравнения.</u>

1. Простейшие дифференциальные уравнения.

До сих пор рассматривались уравнения, в которых неизвестными являлись числа. В математике и её приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ нужно решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$. Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*.

Задача 1 Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

▶ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т. е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, где C — произвольная постоянная. ◁

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной.

Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется.

Задача 2 Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $\sin 0 + C = 2$, откуда $C = 2$.

Ответ $y = 2 + \sin x$. ◁

***Определение* 1.** *Уравнение*

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{11.44}$$

где p и q — постоянные действительные числа, а $f(x)$ — заданная непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если функция $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение (11.44) принимает вид

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{11.45}$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$; функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{3x}$ являются его частными решениями.

Решение. Так как не существует постоянного числа k, такого, что $e^{3x} = ke^{2x}$, то данные частные решения являются линейно-независимыми. Следовательно, общим решением данного дифференциального уравнения будет функция

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение. 1. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \tag{11.51}$$

и находим его корни: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.

2. Получаем два линейно-независимых решения: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$.

3. Составляем общее решение уравнения: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

11.16. Решите однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0;$ *б)* $y'' + 12y - 7y = 0;$

в) $y'' - y' = 0;$ *г)* $y'' - 2y' + 10y = 0;$

д) $y'' + 4y' + 8y = 0;$ *е)* $y'' + 25y = 0.$

Решение многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \tag{1}$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость $m'(t)$ размножения бактерий связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, из условия, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса равна m_0, то $C = m_0$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $k = \frac{\ln 2}{T}$. Поэтому формула (3) запишется так:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания.

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем, и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

где ω — заданное положительное число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$. Решениями уравнения (4) являются функции

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \qquad (5)$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.
Графиком гармонического колебания является синусоида.

Практическое применение полученных знаний –решение задач, выполнение расчётов с помощью комплексных чисел, использование комплексных чисел в профессиональных задачах.

Примеры решения задач с использованием комплексных чисел представлены в Конспекте комбинированных занятий № 30,31 по Теме 5.1 «Комплексные числа» (вопрос 5).

Понятие комплексного числа.

Определение

Комплексное число – это выражение вида $a + b \cdot i$, в котором a и b – любые вещественные числа, i – символ, обладающий таким свойством: $i^2 = -1$.

- Число a называют действительной частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Re}(a + b \cdot i) = a$ (Re – сокращение от слова real, т.е. "действительный").
- Число b называют мнимой частью комплексного числа $a + b \cdot i$ и пишут $\mathrm{Im}(a + b \cdot i) = b$ (Im – сокращение от слова imaginary, т.е. "мнимый").

Примеры

$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = \sqrt{3} - \frac{i}{2},\ z_3 = 3 + i \cdot \ln 5,\ z_4 = \sqrt{10}i,\ z_5 = i$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

$$\boxed{\text{Если } a < 0 \text{ то } \sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot i}$$

Примеры

$\sqrt{-36} = \pm\sqrt{36}i = \pm 6i,\ \sqrt{-1,44} = \pm\sqrt{1,44}i = \pm 1,2i,\ \sqrt{-\frac{1}{16}} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}}i = \pm\frac{i}{4},\ \sqrt{-1} = \pm\sqrt{1}i = \pm i$

Напомним, как находятся корни квадратного уравнения:

$$\text{Уравнение: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{Дискриминант: } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\text{Корни уравнения: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a},\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

Примеры

1. $x^2 + 256 = 0 \iff x^2 = -256 \iff x = \sqrt{-256} \iff x = \pm\sqrt{256}i \iff x_1 = 16i,\ x_2 = -16i$
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$

   $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

   $x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{4}i}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 2i}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i,\quad x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{4}i}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 2i}{2} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
3. $x^2 + 3x + 8,5 = 0$

   $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8,5 = 9 - 34 = -25$

   $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}i}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 5i}{2},\quad x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}i}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 5i}{2}$

II. Корни характеристического уравнения (11.49) — комплексные $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi$ (символ i в теории комплексных чисел называется мнимой единицей, см. главу 16). В этом случае получаются два частных решения:

$$y_1 = e^{(a+bi)x} \text{ и } y_2 = e^{(a-bi)x}.$$

При использовании комплексных чисел можно показать, что эти решения являются линейно-независимыми. При этом доказывается, что общее решение такого дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \qquad (11.52)$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.
Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0.$$

Так как дискриминант этого квадратного уравнения $D = \sqrt{-9}$ можно записать в виде $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$ и, применив обозначение из теории комплексных чисел $i = \sqrt{-1}$, можем записать: $k_1 = 2 + 3i$ и $k_2 = 2 - 3i$. Следовательно, $a = 2$, $b = 3$. Поэтому по формуле (11.52) общее решение запишется в виде

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Задание:

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,59 1-ого учебника списка учебной литературы (с.229-290, 30-312).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ 787, 788, 790-792, 802, 803, 809, 815, 841, 857, 900, 926, 927, 930, 956, 961, 1025, 1026, 1027 Учебника по алгебре.

Решите уравнения:

1. $x^2 + 196 = 0$	5. $x^2 - 6x + 25 = 0$	9. $x^2 - 5x + 2 = 0$
2. $x^2 + 81 = 0$	6. $x^2 + 10x + 61 = 0$	10. $x^2 + 3x + 6,25 = 0$
3. $x^2 + 4x + 5 = 0$	7. $x^2 - 5x + 6,5 = 0$	11. $x^2 + 3x + 3 = 0$
4. $x^2 - x + 2,5 = 0$	8. $x^2 + 11x + 36,5 = 0$	12. $x^2 + 6,25 = 0$