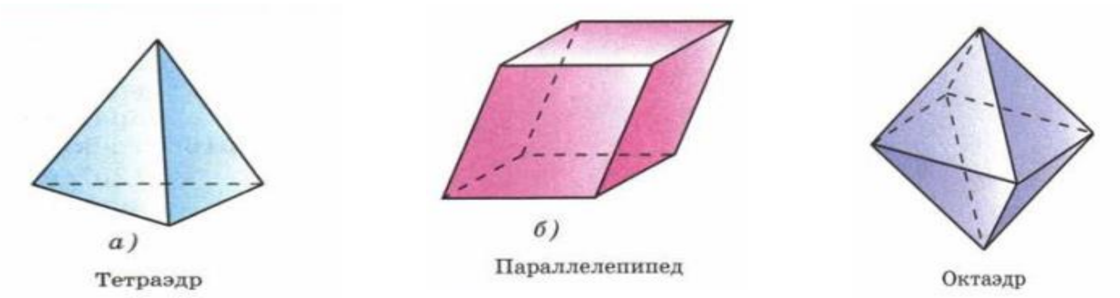
Тема 5.1 Призма, параллелепипед, куб, пирамида и их сечения

Многогранники являются геометрическими телами, совершенство, красота и гармония которых удивляет и завораживает глаза. Многогранники окружают нас в жизни повсюду. Их создают люди своими руками, их создает природа.

Определение. Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или **многогранником**.

Рассмотрим следующие примеры многогранников:



Тетраэдр – это поверхность, составленная из четырех треугольников.

Параллелепипед – это поверхность, составленная из шести параллелограммов.

Октаэдр – это поверхность, составленная из восьми треугольников.

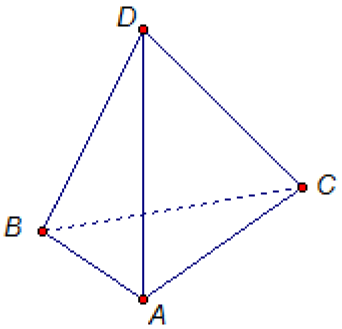
Основными элементами многогранника являются грани, ребра, вершины.

Грани – это многоугольники, из которых составлен многогранник. При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости.

Ребра – это стороны граней.

Вершины – это концы ребер.

Например, рассмотрим тетраэдр *ABCD*. Укажем его основные элементы.

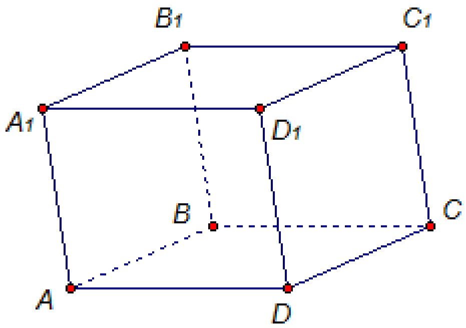


Грани: треугольники *ABC, ADB, BDC, ADC*.

Ребра: *AB, AC, BC, DC, AD, BD*.

Вершины: *A, B, C, D*.

Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



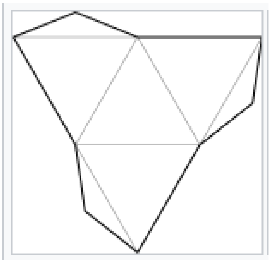
Грани: параллелограммы AA_1D_1D, D_1DCC_1, BB_1C_1C, AA_1B_1B, $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$.

Ребра: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, A_1D_1, B_1C_1, BC, AB, A_1B_1, D_1C_1, DC.

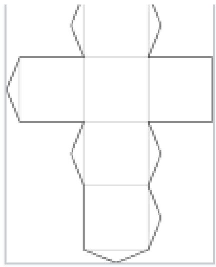
Вершины: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1.

Развертка. Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется **разверткой** многогранника.

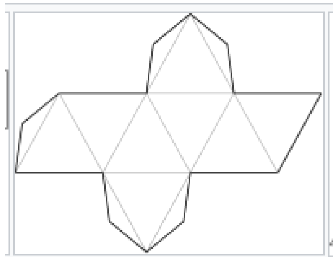
Например,



Тетраэдр



Куб

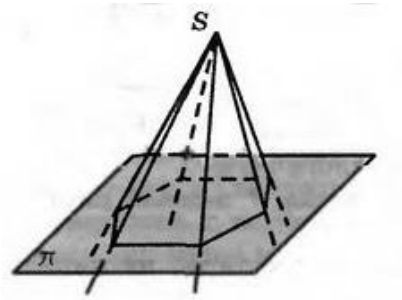


Октаэдр

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра.

Для удобства склейки развертку многогранника изготовляют с клапанами, по которым и производится склейка.

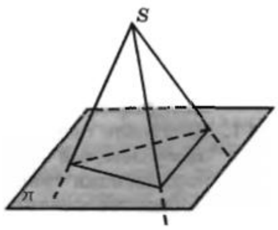
Многогранные углы. Пусть в плоскости π дан многоугольник M и точка S вне этой плоскости.



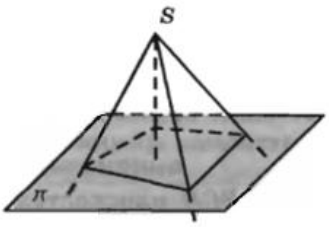
Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке S, пересекающими данный многоугольник, называется **многогранным углом**. Точка S называется **вершиной** многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника – **ребрами** многогранного угла. Углы, образованные соседними ребрами, называются **плоскими углами** многогранного угла, а также **гранями** многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами $SABC\ldots$, указывающими его вершину S и вершины $A, B, C, \ldots$ многоугольника.

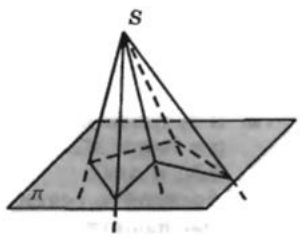
В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



трехгранный угол



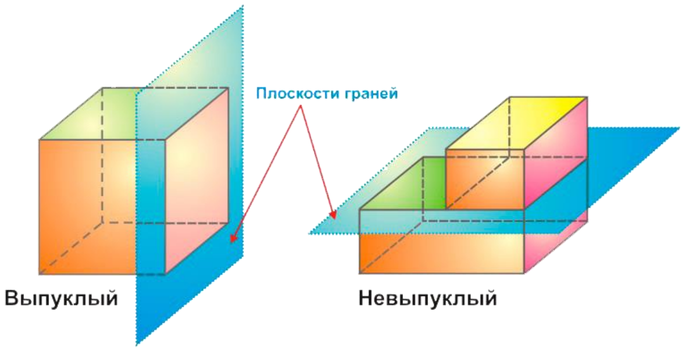
четырехгранный угол



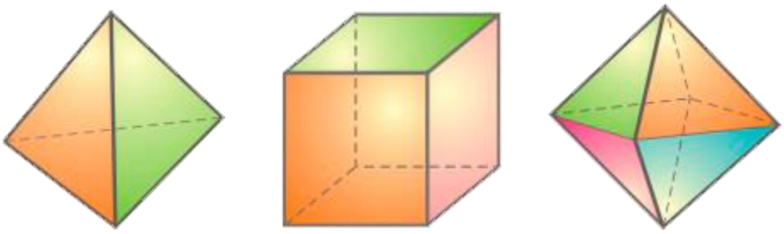
пятигранный угол

Выпуклые многогранники. Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

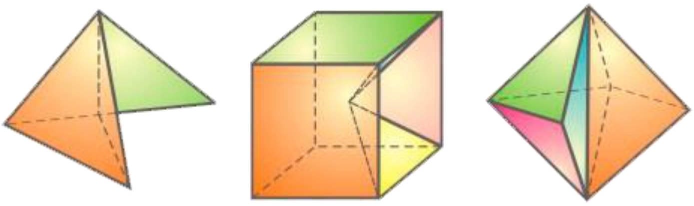
Определение. Многогранник называется **выпуклым,** если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани. **Невыпуклый**, может быть по разные стороны.



Примеры **выпуклых многогранников:**



Примеры **невыпуклых многогранников:**



Теорема. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360^0.

Теорема Эйлера. Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В – число вершин, Р – число ребер, Г – число граней многогранник.

Многогранник	**тетраэдр**	**куб**	**октаэдр**
В	4	8	6
Р	6	12	12
Г	4	6	8

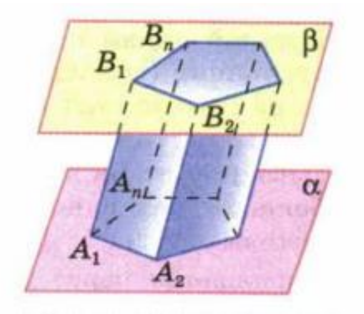
Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В – Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Терема (Эйлера). Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство В – Р + Г = 2,

где В – число вершин, Р – число ребер и Г – число граней данного многогранника.

Призма. Прямая и *наклонная* призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб

1. Призма. Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны.



Каждый из n четырехугольников

$$A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 - по свойству параллельных плоскостей, пересечены третьей плоскостью.

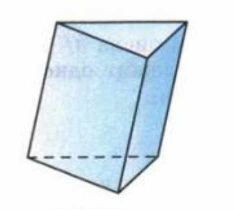
Определение. Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой**.

Обозначение: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.

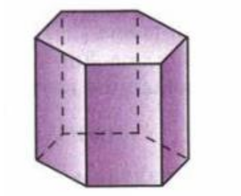
Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы (1) – **боковыми гранями** призмы. Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются **боковыми ребрами** призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Призму с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ и называют **-угольной призмой**.

Призма в зависимости от того какой многоугольник лежит в основании имеет свое название. Если в основании лежит треугольник, то призма называется треугольной. Если четырехугольник – то четырехугольной призмой. А если -угольник, то n-угольной призмой.

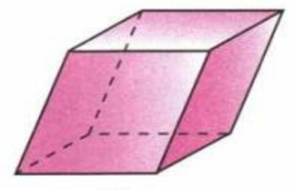
Например,



треугольная призма



шестиугольная призма



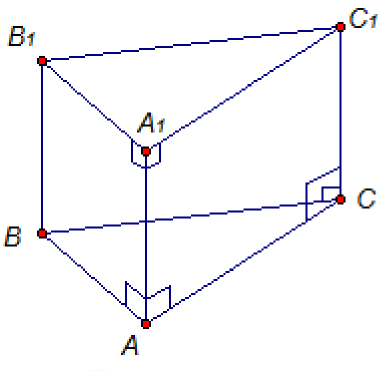
четырехугольная призма (параллелепипед)

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы.

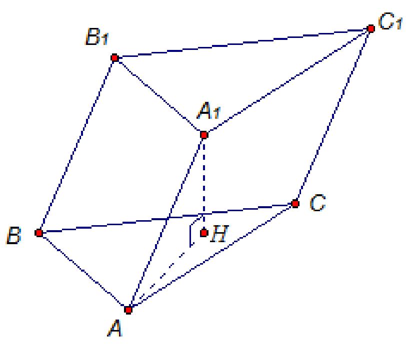
Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае – **наклонной**. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

Например, рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Эта призма – прямая, так как ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Ребро AA_1 перпендикулярно плоскости ABC. Ребро AA_1 является высотой этой призмы.



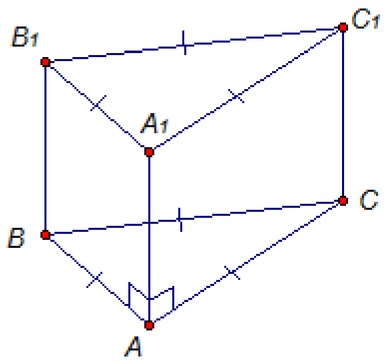
Теперь рассмотрим наклонную призму $ABCA_1B_1C_1$.



Здесь боковое ребро не перпендикулярно плоскости основания. Если опустить из точки A_1 перпендикуляр A_1H на ABC, то этот перпендикуляр будет высотой призмы.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания – правильные многоугольники.

Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$.



Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ – правильная, это значит, что в основаниях лежат правильные треугольники, то есть все стороны этих треугольников равны. Также данная призма - прямая. Значит, боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. А это значит, что все боковые грани – равные прямоугольники.

Итак, если треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ – правильная, то:

1) Боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, то есть является высотой: $AA_1 \perp ABC$.

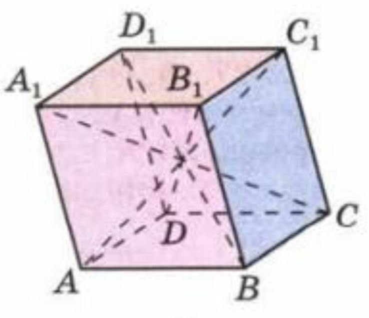
2) В основании лежит правильный треугольник: $\Delta\, ABC$ – правильный.

Определение. Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырех параллелограммов (2) называется **параллелепипедом.**

Обозначение: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями,** их стороны - **ребрами**, а вершины параллелограммов – **вершинами параллелепипеда.** Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих ребер – **противоположными**.

На рисунке



противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называют **противоположными.** Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называются их **основаниями,** а остальные грани – **боковыми гранями параллелепипеда**. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами.** Так если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (2), а боковыми ребрами – отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке выше. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые рёбра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями.

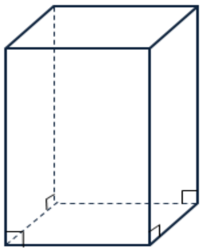
Рассмотрим два свойства параллелепипеда.

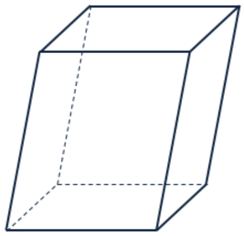
Свойство 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

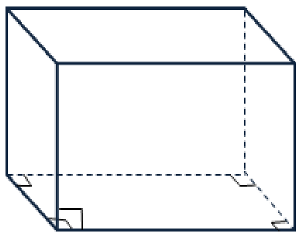
Определение. Две грани параллелепипеда называются **параллельными**, если их плоскости параллельны.

Свойство 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Виды параллелепипедов: прямой, наклонный, прямоугольный.


Прямой параллелепипед


Наклонный параллелепипед


Прямоугольный параллелепипед

Если все боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к плоскостям его оснований, т. е. боковые грани – прямоугольники, то такой параллелепипед называется **прямым**.

Если параллелепипед не является прямым, то есть если все его боковые ребра не перпендикулярны к плоскостям оснований, то он называется **наклонным**.

Если же и основаниями прямого параллелепипеда служат прямоугольники, то такой параллелепипед называется **прямоугольным**.

Параллелепипед очень часто встречается в жизни, практически все здания имеют форму параллелепипеда. Представление о форме прямоугольного параллелепипеда дают спичечный коробок, коробка, холодильник и др.

Сформулируем свойства прямоугольного параллелепипеда.

*Свойство 1.*В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.

Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются **двугранными углами параллелепипеда**.

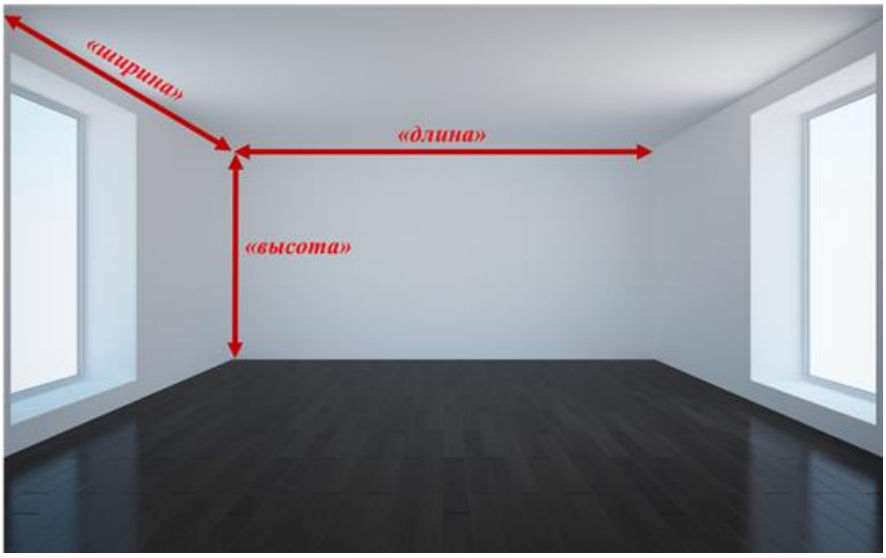
Свойство 2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Примечание. Длины трех ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, являются **измерениями** прямоугольного параллелепипеда. Например, у параллелепипеда, изображенного на рисунке

в качестве измерений можно взять длины ребер DA, DC и DD_1, все эти рёбра имеют общую вершину D. Тогда ребро DA – это есть длина данного параллелепипеда, DC – ширина и DD_1 – его высота.

В обыденной практике, говоря о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вместо слова «измерения» используют обычно слова «длина», «ширина» и «высота» комнаты.



Ясно, что длина, ширина и высота комнаты – это и есть ее измерения.

Следствие. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3. Куб.

Определение. Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом**.

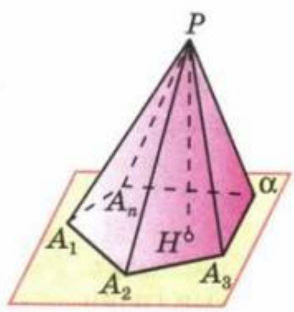
Все грани куба – это равные друг другу квадраты.

Пирамида. Правильная пирамида.

Усеченная пирамида. Тетраэдр

Пирамида. Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединим точку P с вершинами многоугольника, получим n треугольников:

$PA_1A_2, PA_2A_3, \dots , PA_nA_1$ (3)



Определение. Многогранник составленный из -
угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников (3), называется **пирамидой**.

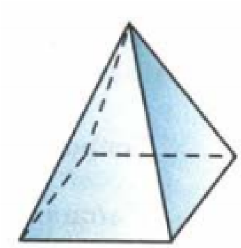
Обозначение: $PA_1A_2 \dots A_n$ – n–угольная пирамида.

Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется **основанием**, а треугольники (3) – **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной** пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, …, PA_n – ее **боковыми ребрами**.

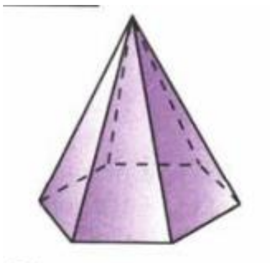
Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой** пирамиды. На рисунке выше отрезок PH является высотой пирамиды.

Пирамида в зависимости от того какой многоугольник лежит в основании имеет свое название. Если в основании лежит треугольник, то пирамида называется треугольной. Если четырехугольник – то четырехугольной пирамидой. А если -угольник, то n-угольной пирамидой.

Например,



Четырехугольная пирамида



Шестиугольная пирамида

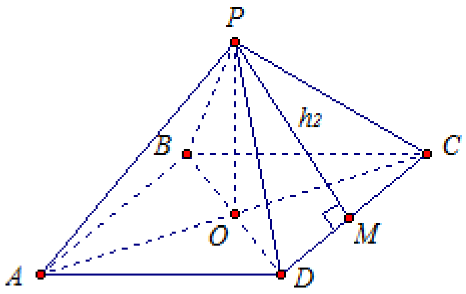
Представление о форме пирамиды дают следующие предметы, представленные на рисунках:

Правильная пирамида.

Определение. Пирамида называется **правильной**, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$.

P – вершина пирамиды. Основание пирамиды $ABCD$ – правильный четырехугольник, то есть квадрат. Точка O, точка пересечения диагоналей, является центром квадрата. Значит, PO – это высота пирамиды.



Пояснение: в правильном -угольнике центр вписанной и центр описанной окружности совпадает. Этот центр и называется центром многоугольника. Иногда говорят, что вершина проектируется в центр.

Свойства правильной пирамиды:

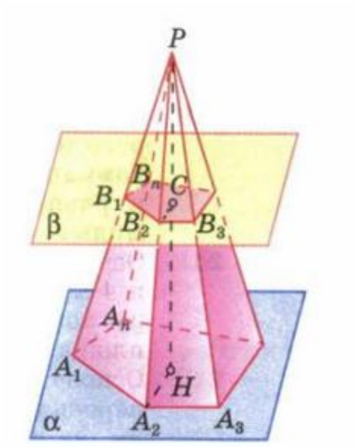
Свойство1. Все боковые ребра правильной пирамиды равны.

Свойство2. Боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Определение. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой**.

На рисунке выше отрезок PM – одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Усеченная пирамида. Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$.



Усеченная пирамида

Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника.

Определение. Многогранник, гранями которого являются -угольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ (**нижнее и верхнее основания**), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (**боковые грани**), называется **усеченной пирамидой**.

Обозначение: $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$.

Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются **боковыми ребрами** усеченной пирамиды.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усеченной пирамиды. На рисунке отрезок CH является высотой усеченной пирамиды.

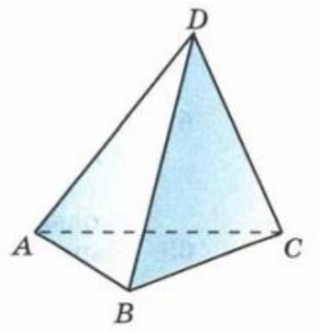
Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции.

Усеченная пирамида называется **правильной,** если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются **апофемами**.

Тетраэдр. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA.

Определение. Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA называется **тетраэдром**.

Обозначение: $DABC$.



Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны - **ребрами**, а вершины - **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. На рисунке противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее **основанием**, а три другие - **боковыми гранями.**

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунке,

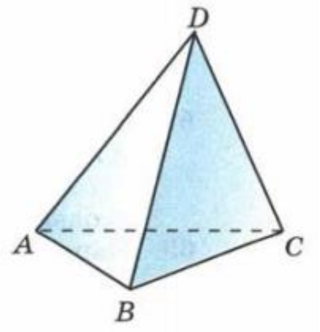


Рис. 1

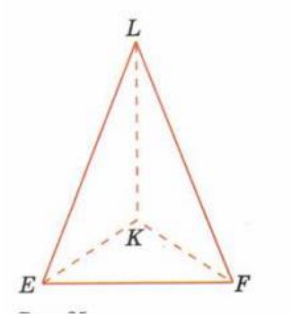


Рис. 2

т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырехугольника с диагоналями. На рис. 1 невидимым являются только ребро AC, а на рис. 2 – ребра EK, KF и KL.

Практические задания:

Диагональ куба равна d см. Найдите площадь его поверхности.

а) $d = 1;$ б) $d = 34;$ в) $d = 37;$

Площадь поверхности куба равна S. Найдите его диагональ.

а) $S = 18;$ б) $S = 200;$ в) $S = 1568;$

Если каждое ребро куба увеличить на а, то его площадь поверхности увеличится на S. Найдите ребро куба.

а) $a = 1,\ S = 54;$ б) $a = 9,\ S = 594;$ в) $a = 2,\ S = 192;$

Найдите длины диагоналей, площадь диагонального сечения, площадь полной поверхности куба, ребро которого равно a. Построить куб и развертку куба.

а) a = 2 м; б) a = 20 см; в) a = 3 см;

Ящик, имеющий форму куба с ребром a см без одной грани, нужно покрасить со всех сторон снаружи. Найдите площадь поверхности, которую необходимо покрасить. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

а) $a = 10;$ б) $a = 15;$ в) $a = 30;$

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a_1 и a_2. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна S. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

а) $a_1 = 3;\ a_2 = 4;\ S = 94;$ б) $a_1 = 1;\ a_2 = 4;\ S = 348;$

Найдите длины диагоналей, площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c. Построить развертку полной поверхности параллелепипеда.

а) a = 1 см, b = 3 см, c = 4 см; б) a = 1 см, b = 3 см, c = 4 см;

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CA_1 = \sqrt{38}$; $DD_1 = 5$; $BC = 3$. Найдите длину ребра BA.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO – высота, AC – диагональ четырехугольника $ABCD$. Найдите боковое ребро SA.

$SO = 54,\ AC = 144;$

6В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, SO – высота, BD – диагональ четырехугольника $ABCD$. Найдите боковое ребро SC.

а) $SO = 9,\ BD = 24;$

б) $SO = 64,\ BD = 96;$

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L – середина ребра AC, S – вершина. Известно, что BC – ребро основания, а SL – апофема. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

а) $BC = 6,\ SL = 5;$

б) $BC = 7,\ SL = 16;$

в) $BC = 4,\ SL = 21.$

Заполнить таблицу «Сравнительная характеристика правильных многогранников».

Внешний вид многогранника	Название	Форма грани	Число рёбер	Число граней	Число вершин	Число ребер, сходящихся в 1 вершине