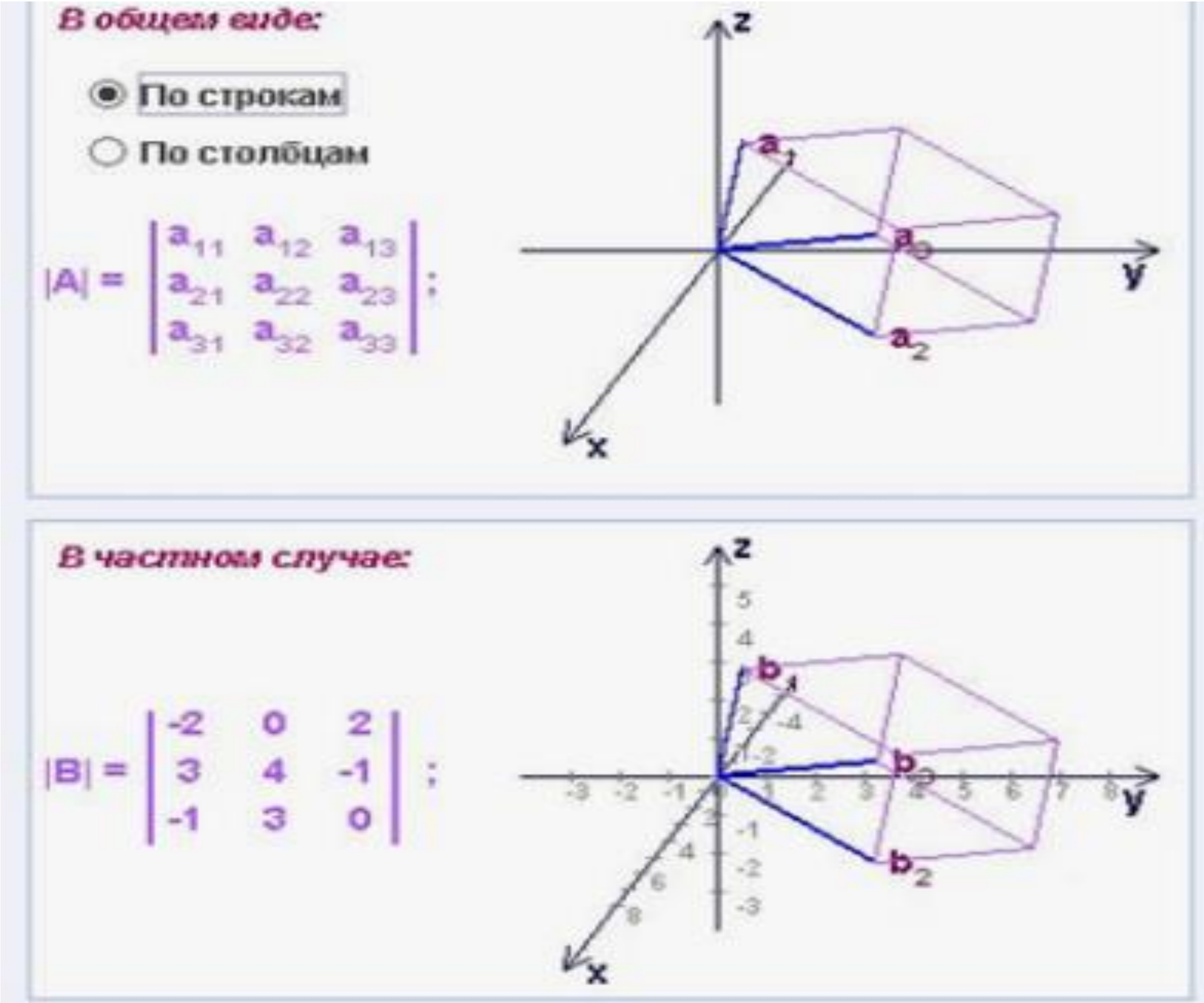
<u>**Геометрический смысл определителя 3x3.**</u>

Геометрический смысл определителя 3-го порядка

заключается в том, что его абсолютная величина равна объёму параллелепипеда, построенного на векторах.



Модуль определителя матрицы равен объему параллелепипеда, построенного на векторах, совпадающих со строками матрицы.

Геометрический смысл определителя третьего порядка заключается в том, что он **представляет собой ориентированный объём параллелепипеда, построенного на векторах матрицы.** 1

Если продлить вектора на системе координат до параллелограмма (или параллелепипеда, если векторов больше двух), то определитель матрицы координат этих векторов будет равен площади этого параллелограмма или объёму, если это объёмный параллелепипед. 2

Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя 3-го порядка

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства E. Число $(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])$ называется смешанным произведением векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Теорема.

$$(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}]) = \left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right) =$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = = \{\text{разложение определителя}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \text{ по первой строке}\} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

Следствие (геометрический смысл определителя 3-го порядка). Абсолютная величина определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

равна $|(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])|$ и равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Доказательство. Мы считаем, что $\vec{y}, \vec{z}$ лежат в основании параллелепипеда. Поэтому

$$|(\vec{x}, [\vec{y}, \vec{z}])| = \|\vec{x}\| \cdot \|[\vec{y}, \vec{z}]\| \cdot \left|\cos\left(\vec{x}, \widehat{[\vec{y}, \vec{z}]}\right)\right| =$$

$$= \underbrace{\|[\vec{y}, \vec{z}]\|}_{=\text{площадь основания}} \cdot \underbrace{\|\vec{x}\| \cdot \left|\cos\left(\vec{x}, \widehat{[\vec{y}, \vec{z}]}\right)\right|}_{=\text{высота}} = \{\text{объем параллелепипеда}\}.$$

Следствие доказано.

Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений

Теорема. 1) {площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$} = $\|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

2) {площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$} = $\frac{1}{2}\|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

3) {высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$} = {высота треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$} = $\frac{\|[\vec{x},\vec{y}]\|}{\|\vec{x}\|}$;

4) {объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$} = {абсолютной величине определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

5) {объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\Delta_{y,z}$} = $\frac{1}{6}$ {абсолютной величины определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

6) {высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\vec{y},\vec{z}$} = {высота пирамиды, построенной на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\Delta_{y,z}$} = {абсолютной величине} $\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\|[\vec{y},\vec{z}]\|}$.

Все эти результаты получены выше.

Пример 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного $\vec{x}=\{6,3,-2\}$, $\vec{y}=\{3,-2,6\}$.

Решение.

Найдём векторное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$[\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix}6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_1-\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_2+\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_3=$$

$$=(18-4)\cdot\vec{e}_1-(36+6)\cdot\vec{e}_2+(-12-9)\cdot\vec{e}_3=14\vec{e}_1-42\vec{e}_2-21\vec{e}_3.$$

$$S=\|[\vec{x},\vec{y}]\|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49.$$

Пример 2. Вычислить площадь площадь треугольника с вершинами в точках $A(-4,2,6)$, $B(2,-3,0)$, $C(-10,5,8)$.

Решение.

Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-3,0)-(-4,2,6)=\{6,-5,-6\},$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-10,5,8)-(-4,2,6)=\{-6,3,2\}.$$

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}6 & -5 & -6\\ -6 & 3 & 2\\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=8\vec{e}_1+24\vec{e}_2-12\vec{e}_3.$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}S_{пар.}=\frac{1}{2}\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+24^2+12^2}=14.$$

Пример 3. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(-4,2,6)$, $B(2,-3,0)$, $C(-10,5,8)$, $D(-5,2,-4)$ и её высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Решение.

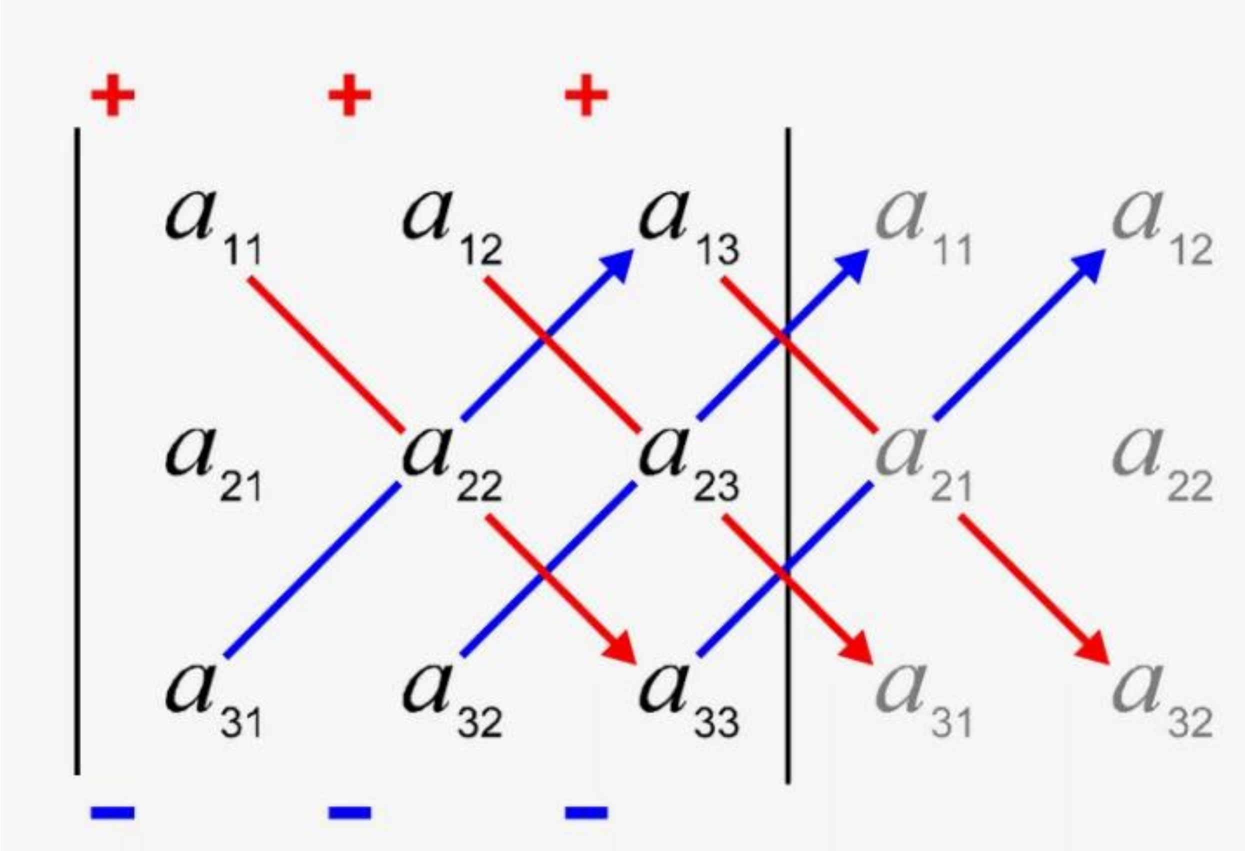
$\overrightarrow{AD}=\{-1,0,10\}.$

Найдём смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB},[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])=\begin{vmatrix}6 & -5 & -6\\ -6 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -10\end{vmatrix}=112.$$

Вычислим объём пирамиды $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])\right|=\frac{1}{6}\cdot 112=\frac{56}{3}.$

Найдём высоту пирамиды $h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot\frac{56}{3}}{14}=4.$


+ + +
a11 a12 a13 a11 a12
a21 a22 a23 a21 a22
a31 a32 a33 a31 a32
− − −