Дагестанский государственный университет народного хозяйства

Кафедра математики

Гаджиев Малла Азизович

Учебное пособие

«Неопределенный интеграл»

(для студентов 2 курса ПКС Бизнес- колледжа)

Махачкала 2020 г.

УДК 51
ББК 22.11
Составитель: ***Гаджиев Малла Азизович***, старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства - Махачкала: ДГУНХ, 2020 г., 40 с.

В пособие дается основной теоретический материал в краткой форме по каждой теме и подробное решение типовых вариантов. Подробные решения вариантов помогут студентам при подготовке к практическим, лабораторным занятиям, при сдаче зачетов и экзаменов, а также для выполнения самостоятельных работ

Одобрено на заседании
кафедры математики
«28» мая 2020 г., протокол № 9
Зав. кафедрой к. ф-м. н., доцент
Назаров А. Д.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Учебно пособие предназначено для проведения практических занятий по теме «Неопределенный интеграл» на 2 курсах ПКС Бизнес-колледжа.

Пособие полностью охватывает материал темы, который излагается в виде практических занятий. К каждому занятию даны подробно решенные типовые задачи, задачи для решения в аудитории и дома.

В теме «Неопределенный интеграл» рассматривается задача, обратная задаче о дифференцировании функций.

Задача состоит в следующем: дана функция $f(x)$, являющаяся производной некоторой функции $F(x)$; требуется найти функцию $F(x)$.

К такой математической задаче приводят многие физические, химические и другие задачи, например, задача об отыскании закона равномерного движения материальной точки вдоль прямой по заданной скорости, задача о нахождении закона химической реакции по известной её скорости.

Особое значение эта тема имеет при решении дифференциальных уравнений, описывающих различные физические и механические процессы.

Для успешного усвоения навыков интегрирования надо, прежде всего, знать таблицу интегралов, их свойства и методы интегрирования.

Неопределенный интеграл. Таблица интегралов.

Свойства неопределенного интеграла
(Правила интегрирования)

$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ (1)

$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$ (2)

$\int d\,F(x) = f(x) + c$, следствие: $\int dx = x + c$ (3)

$\int a\;f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, где $a-\text{const}$ (4)

$\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)dx$ (5)

$\int f(u)\,du = F(u) + c$, если $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$ (6)

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

В этой таблице использовано свойство инвариантности формы полного дифференциала $d\,F(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du$, откуда

$$F(u) + c = \int f(u)\,du\,.$$

$\int du = u + c$ *(1)*

$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ при $n \neq -1$ *(2)*

$\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$ *(3)*

$\int e^u du = e^u + c$ *(4)*

$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$ *(5)*

$\int \sin u\;du = -\cos u + c$ *(6)*

$\int \cos u\;du = \sin u + c$ *(7)*

$\int \operatorname{tg} u\;du = -\ln|\cos u| + c$ *(8)*

$\int \operatorname{ctg} u\;du = \ln|\sin u| + c$ *(9)*

$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$ *(10)*

$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c$ *(11)*

$\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + c$ *(12)*

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c \qquad (13)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c \qquad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c \qquad (15)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + c \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c \qquad (19)$$

При использовании формул этой таблицы для преобразования подынтегрального выражения к виду $f(x)\,dx = g(u)\,du$ применяются простейшие преобразования дифференциалов:

1. $dx = d(x+b)$, где $b = \mathrm{const}$;
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, $a \neq 0$;
3. $dx = \frac{1}{a}d\,(ax+b)$, $a \neq 0$;
4. $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2+b)$;
5. $\sin x\,dx = d\,(-\cos x)$;
6. $\cos x\,dx = d\,(\sin x)$;
7. $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$.

Например,

$$\int \sin 7x\,dx = \int \sin 7x \cdot \frac{1}{7}d(7x) = \frac{1}{7}\int \sin 7x\,d(7x) = -\frac{\cos 7x}{7} + c.$$

Используя преобразования дифференциала можно дополнить свойства неопределенного интеграла:

Если $\int f(u)\,du = F(u) + c$, то *а)* $\int f(au)\,du = \frac{1}{a}F(au) + c$;

б) $\int f(u+b)\,du = F(u+b) + c$;

в) $\int f(au+b)\,du = \frac{1}{a}F(au+b)+c$.

Занятие №1. Непосредственное интегрирование функций

Цель занятия: усвоить новые учебные элементы на уровне знаний и умения применять их к решению типовых задач.

Учебные вопросы

1. Непосредственное интегрирование.

Ход занятия

Краткая информация о новых учебных элементах

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных для $f(x)$, причем это множество задается формулой $F(x)+c$, где $c-$ постоянная.

Неопределенный интеграл от функции $f(x)-$совокупность всех ее первообразных. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c.$$

Здесь: $\int$ $-$знак интеграла;

$f(x)-$подынтегральная функция;

$f(x)\,dx-$подынтегральное выражение;

$x-$переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием* функции.

Геометрическая иллюстрация неопределенного интеграла

$\int f(x)\,dx = F(x)+c$ геометрически представляет множество интегральных кривых вида $y=F(x)+c$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым c (рис. 1).

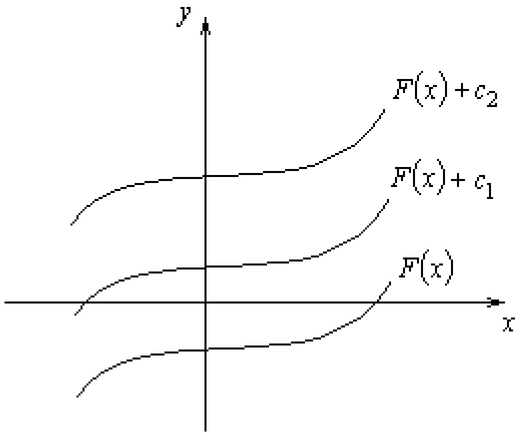

Рис. 1

Задача 1. В следующих равенствах заполнить пропущенные места по соображению:

1) $d(\ldots) = 2x\,dx$;

2) $d(\ldots) = x^3\,dx$;

3) $d(\ldots) = \cos x\,dx$;

4) $d(\ldots) = \dfrac{dx}{x}$;

5) $d(\ldots) = \dfrac{dx}{1+x^2}$;

6) $d(\ldots) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Найти затем интегралы $\int 2x\, dx$; $\int x^3\, dx$ и т.д.

Построить интегральные кривые для пунктов 1 и 2.

Решение. Рассмотрим выполнение 1 пункта:

$$d\left(x^2\right) = 2x\, dx;$$

$$\int 2x\, dx = 2\int x\, dx = 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c.$$

Замечание. Интеграл $\int x\, dx$ находится по формуле *(2)* (Таблицы интегралов - Т.И.) как интеграл степенной функции. Зная, что $x = x^1$, т.е. в данном случае $n = 1$.

Интегральные кривые: $y = x^2$, где $c = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ (рис. 2).

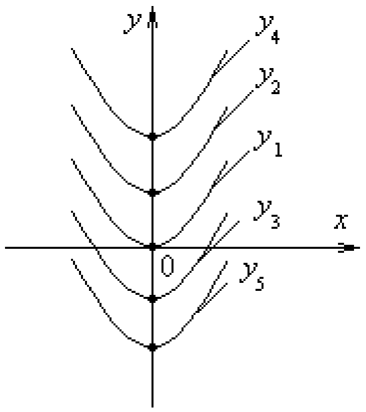

Рис. 2

$y_1 = x^2 + 0 = x^2$, $\quad c = 0$

$y_2 = x^2 + 1$, $\quad c = 1$

$y_3 = x^2 - 1$, $\quad c = -1$

$y_4 = x^2 + 2$, $\quad c = 2$

$y_5 = x^2 - 2$, $\quad c = -2$

$\ldots \quad \ldots$

Остальные пункты задачи выполняются аналогично.

Задача 2. Найти интеграл: $\int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} \right) dx$.

Решение. 1. Используя свойство (5), распишем интеграл алгебраической суммы нескольких слагаемых в виде суммы интегралов от каждого слагаемого:

$$\int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + \int 3x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx.$$

2. По свойству (4) во втором слагаемом постоянный коэффициент 3 вынесем за знак интеграла. Используем формулы *(2), (3)* (Т.И.).

$$\int \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 3\int x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} + \ln|x| + c = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + c.$$

Задача 3. Найти интеграл:

$$\int\left(3\sqrt[4]{x^3}+\frac{6}{x^2}\right)dx.$$

Замечание. Если подынтегральные функции содержат выражения вида $\sqrt[n]{x^m}$; $\dfrac{a}{\sqrt[n]{x^m}}$; $\dfrac{a}{x^n}$; $a-\text{const}$, то данные интегралы находятся по формуле *(2)* (Т.И.) как интегралы от степенных функций. Прежде чем применить формулу *(2)*, необходимо произвести преобразования подынтегральных функций. Для этого воспользуемся следующими свойствами:

$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ **(1)** Пример: по свойству **(1)** $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$

$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$ **(2)** по свойству **(2)** $\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}=x^{-\frac{m}{n}}$ **(3)**

Решение.

$$\int\left(3\sqrt[4]{x^3}+\frac{6}{x^2}\right)dx\overset{(5)}{=}\int 3\sqrt[4]{x^3}+\int\frac{6}{x^2}\,dx\overset{(4)}{=}3\int\sqrt[4]{x^3}dx+6\int\frac{dx}{x^2}\overset{\mathbf{(1)(2)}}{=}3\int x^{\frac{3}{4}}\,dx+6\int x^{-2}\,dx=$$

$$=3\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+6\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c=3\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+6\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{3\cdot 4x^{\frac{7}{4}}}{7}-\frac{6}{x}+c=\frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{6}{x}+c.$$

Задача 4. Найти интегралы:

1) $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx$;

2) $\int\left(\dfrac{2}{x}+\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

Указание. Выполнить по образцу задачи 3, используя свойства (5), (4) и формулы *(1), (2), (3)* (Т.И.).

Задача 5. Найти интеграл: $\int\dfrac{x-2}{x^3}\,dx$.

Замечание. Для нахождения интеграла следует разделить многочлен, стоящий в числителе, на знаменатель. Далее, произведя соответствующие преобразования (см. задачу 3), воспользоваться свойствами (4), (5) и формулой *(2)* (Т.И.).

Решение.

$$\int\frac{x-2}{x^3}\,dx=\int\left(\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)dx\overset{(5)}{=}\int\frac{x}{x^3}\,dx-\int\frac{2}{x^3}\,dx\overset{(4)}{=}\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{dx}{x^3}=$$

$$=\int x^{-2}dx-2\int x^{-3}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{2x^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c.$$

Задача 6. Найти интеграл (выполнить по образцу задачи 5):

$$\int\frac{10x^8-3}{x^4}\,dx.$$

Задача 7. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}\,dx;$

2) $\displaystyle\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx.$

Указание. В первом интеграле числитель возвести в квадрат, полученный многочлен разделить на знаменатель и после этого проинтегрировать. Во втором интеграле открыть скобки, сделать преобразования, после чего выполнить интегрирование.

Задача 8. Найти интеграл: $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

Решение. Иногда, с целью сведения подынтегральной функции к табличному интегралу, используют так называемый искусственный прием (прибавляют и вычитают одно и то же число в числителе с целью создания слагаемого, кратного знаменателю).

В данном случае в числителе прибавляют и вычитают 1.

$x^2=x^2+0=x^2+1-1=x^2-$выражение не изменилось, но теперь можно преобразовать подынтегральную функцию:

$$\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение:

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int 1\,dx-\int\frac{1\,dx}{1+x^2}=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\operatorname{arctg}x+c.$$

Задание для самостоятельной работы

Задача 9. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int 2\sqrt{x}+\frac{1}{3}\cos x\,dx;$

2) $\int\left(\frac{e^x}{2}+\frac{3}{x}+1\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}+\sin x\right)dx$;

4) $\int x\left(x^2+2\right)dx$;

5) $\int\left(a^x+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

6) $\int\frac{4x+x^2}{x^3}\,dx$;

7) $\int\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

8) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

Задача 10. Найти интегралы:

1) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$;

2) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$;

3) $\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx$.

Указание. Для решения примеров 1 и 2 использовать тригонометрические формулы:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Пример 3 решить по образцу задачи 8.

Задача 11. Найти интегралы:

1) $\int\left(3x^3+\frac{1}{5}x+4\right)dx$;

2) $\int\left(\frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{7}{3x^4}-\frac{5x^2}{x^3}-\frac{1}{2}\right)dx$;

3) $\int(x-2)\left(x^3+4\right)dx$;

4) $\int\frac{3x^2+2x+10}{x^3}\,dx$;

5) $\int\frac{dx}{x^2-25}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

7) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Указание. Для решения примеров 5, 6, 7 используются формулы *(12), (13), (14)* (Т.И.).

Занятие №2. Метод замены переменной

Цель занятия: усвоить метод подстановки, закрепить знание таблицы основных интегралов.

Учебные вопросы

1. Дифференциал функции, его свойства (повторение).
2. Интегрирование с помощью подстановки.

Краткая информация о новых учебных элементах

Во многих случаях для вычисления интеграла требуется введение новой переменной интегрирования, которое позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется *методом подстановки* или *методом замены переменной*.

Формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Задание для студентов

Задача 1. Решить устно (повторение). Найти дифференциал по формулам:

$$dy = y'\,dx;$$
$$du = u'\,dx;$$
$$dt = t'\,dx.$$

1. $y = 3x$;
2. $t = 5x + 2$;
3. $u = 3 - \frac{x}{2}$.

Задача 2. Найти интегралы с помощью замены переменной.

$$1.\ \int \cos 2x\, dx;$$

$$2.\ \int e^{-x}\, dx;$$

$$3.\ \int \left(x^2+5\right)^7 x\, dx;$$

$$4.\ \int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$$

Решение. Вспомним таблицу:

$$\int u^n du = \int u^n\ u'\, dx;$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'\, dx}{u};$$

$$\int e^u\ du = \int e^u u' dx;$$

$$\int \sin u\ du = \int \sin u \cdot u' dx.$$

Следовательно, для того, чтобы найти интеграл от функции сложного аргумента, необходимо, чтобы подынтегральное выражение содержало производную аргумента.

Поэтому данные интегралы в задаче 2 непосредственным интегрированием брать нельзя. Для решения данных интегралов используют замену:

а) обозначить аргумент функции новой переменной u, где u – есть функция от x;

б) найти $du = u'\, dx$; (*)

в) из равенства (*) выразить dx;

г) осуществить замену под знаком интеграла, сокращая в числителе и знаменателе функцию от x и вынося const за знак интеграла;

д) полученный интеграл взять по таблице;

е) вернуться к прежней переменной x.

$$1.\ \int \cos 2x\, dx;$$

$$\int \cos 2x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x \\ du = (2x)'\, dx = 2dx \\ dx = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| = \int \cos u \cdot \frac{du}{2} \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + c = \frac{1}{2}\sin 2x + c.$$

$$2.\ \int e^{-x}\, dx;$$

$$\int e^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u=-x \\ du=-1\,dx \\ dx=-du \end{matrix} \right| = \int e^{u}\left(-du\right) = -\int e^{u}\,du = -e^{u}+c = -e^{-x}+c\,.$$

3. $\int \left(x^2+5\right)^7 x\,dx$;

$$\int \left(x^2+5\right)^7 x\,dx = \left| \begin{matrix} u=x^2+5 \\ du=2x\,dx \\ x\,dx=\dfrac{du}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{2}+c = \frac{\left(x^2+5\right)^8}{16}+c\,.$$

Замечание. В данном примере целесообразнее выразить $x\,dx$ из $du = 2x\,dx$.

4. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 5x}$;

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \left| \begin{matrix} u=5x \\ du=5\,dx \\ dx=\dfrac{du}{5} \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{5\cos^2 u} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{5}\operatorname{tg} u + c = \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c\,.$$

Задача 3. Найти интегралы:

1) $\int \left(\dfrac{x}{2}+3\right)^2 dx$;

2) $\int 4(5+6x)^{\frac{3}{2}}\,dx$;

3) $\int (2-3x)^3\,dx$;

4) $\int \sqrt{4x+1}\,dx$.

Задача 4. Найти интегралы:

1) $\int e^{-3x}\,dx$;

2) $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$;

3) $\int e^{4x+1}\,dx$.

Задача 5. Найти интегралы:

1) $\int 4\sin 5x\,dx$;

2) $\int \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\int \sin(a-bx)\,dx$.

Задача 6. Найти интегралы:

1) $\int \frac{5\,dx}{\sin^2 3x}$;

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

Проанализируйте результаты интегрирования и дайте ответ на вопрос: чему равен $\int f(ax+)\,dx,\ \int f(ax)\,dx$?

Запомнить:

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c;$$

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c;$$

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c;$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx}+c.$$

Т.е. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$, где F первообразная для функции f.

Задача 7. Найти интеграл методом подстановки: $\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$.

Решение.

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2+2 \\ du = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \int \sqrt{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}+c = \frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}+c = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}+c.$$

Задача 8. По образцу задачи 7 найти интегралы:

1) $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+2\right)^2}}$;

3) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3-1}$.

Задача 9. Решить методом подстановки: $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c.$$

Задача 10. Найти интегралы (по образцу задачи 9):

1) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

2) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$.

Проанализируйте задачи 9, 10 и сделайте вывод: при каких условиях интеграл, содержащий $\ln x$, является табличным?

Задания для нахождения первообразной (устно)

1.	$\int 4x\,dx$;	14.	$\int \sqrt[5]{x^6}\,dx$;	27.	$\int \frac{2\,dx}{\cos^2 2x}$;
2.	$\int 5x^3\,dx$;	15.	$\int \frac{3\,dx}{x}$;	28.	$\int \frac{dx}{5\sin^2 \frac{x}{5}}$;
3.	$\int (3x)^3\,dx$;	16.	$\int \frac{dx}{5x}$;	29.	$\int \frac{7\,dx}{\sin^2 7x}$;
4.	$\int \frac{3}{4}\sqrt{x}\,dx$;	17.	$\int \frac{3\,dx}{7x}$;	30.	$\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx$;
5.	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}\,dx$;	18.	$\int \frac{3\,dx}{1+4x}$;	31.	$\int 5e^{-x}\,dx$;
6.	$\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$;	19.	$\int \frac{dx}{2(1+5x)}$;	32.	$\int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$;

7. $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$;

8. $\int x^{-\frac{5}{7}}\,dx$;

9. $\int (9x)^{\frac{1}{2}}\,dx$;

10. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt[3]{x}}$;

11. $\int \frac{dx}{6\sqrt[5]{x^4}}$;

12. $\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$;

13. $\int \frac{dx}{x^{-\frac{1}{2}}}$;

20. $\int \cos 3x\,dx$;

21. $\int \sin\frac{5}{2}x\,dx$;

22. $\int \frac{1}{2}\sin 7x\,dx$;

23. $\int \frac{5\cos 5x}{2}\,dx$;

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$;

25. $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{3}{4}x}$;

26. $\int \frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{3}}$;

33. $\int e^{\frac{5}{2}x}\,dx$;

34. $\int \frac{3}{7}e^{-x}\,dx$;

35. $\int \frac{dx}{e^{-x}}$;

36. $\int \frac{2\,dx}{e^{x}}$;

37. $\int 2^{x}\,dx$;

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

39. $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Задание для самостоятельной работы

Задача 11. Найти интегралы:

1) $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx$;

2) $\int \sin^4 x\cos x\,dx$;

3) $\int \left(e^{x}+e^{-x}\right)^2\,dx$;

4) $\int \sqrt[3]{1-6x^5}\,x^4\,dx$;

5) $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos x\,dx$.

Задача 12. Найти интегралы:

1) $\int \cos(3x-4)\,dx$;

2) $\int 2\sin\left(\frac{x}{6}+1\right)dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

4) $\int (5x-8)^6\,dx$;

5) $\int e^{-x^2}x\,dx$;

6) $\int \sin x\cos x\,dx$;

7) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$;

8) $\int \frac{dx}{\sin^2(6x+1)}$.

Занятие №3. Метод интегрирования по частям

Цель занятия: усвоить интегрирование по частям на уровне знаний и умений решать типовые задачи, закрепить метод интегрирования с помощью замены переменной.

Учебные вопросы

1. Замена переменной в неопределенном интеграле.
2. Интегрирование по частям.

Ход занятия

Краткая информация о новых учебных элементах

$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ – формула интегрирования по частям.

Эта формула применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например,

$$\int x^2 e^x\,dx; \qquad \int x^3 \ln x\,dx; \qquad \int (x+1)\sin x\,dx.$$

Чтобы воспользоваться формулой интегрирования по частям, u и dv выбираем в подынтегральном выражении, du и v получаем по формулам:

$$du = u'\,dx;$$
$$v = \int dv.$$

Задача 1. Найти устно интегралы (повторение):

$$\int \sin 3x\,dx; \qquad \int\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx; \qquad \int \frac{b}{x}\,dx.$$

Задача 2. Найти интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int xe^x\,dx$; 2) $\int \ln x\,dx$; 3) $\int x^2\cos 3x\,dx$.

Решение. 1) $\int xe^x\,dx$.

$$\int xe^x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = u'\,dx = dx \\ dv = e^x\,dx & v = \int e^x\,dx = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)+c.$$

2) $\int \ln x\,dx$.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1)+c.$$

3) $\int x^2\cos 3x\,dx$.

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos 3x\,dx & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

Интегрирование по частям применим дважды, т.к. $u = x^2$ выражение второй степени:

$$= x^2\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) - \int \frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2x\,dx = \frac{x^2}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,dx =$$

Второй интеграл еще раз берем по частям:

$$= \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin 3x\,dx & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\left[x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\right)\cos 3x\,dx\right] =$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\right] + c =$$

$$= \frac{x^2}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + c = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right)\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x + c.$$

Задача 3. По образцу задачи 2 найти интегралы:

1) $\int x^2\ln x\,dx$;

2) $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\,dx$;

3) $\int x^2\sin x\,dx$;

4) $\int \arcsin x\,dx$.

Задание для самостоятельной работы

Задача 4. Найти интегралы (повторение):

1) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+5)^5}}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^4}$.

Задача 5. Найти интегралы (по частям):

1) $\int \arccos dx$;

2) $\int x \ln x\,dx$;

3) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

Задача 6. Выбрать способ интегрирования и найти интегралы:

1) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^5\,dx}{1+x^2}$;

2) $\int x e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;

3) $\int \frac{2\,dx}{3\sqrt[3]{x^5}}\,dx$;

4) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$;

5) $\int e^{x^3} x^2 dx$;

6) $\int x \ln(x-1)\,dx$.

Занятие №4. Метод интегрирования по частям (продолжение)

Цель занятия: закрепить навыки нахождения неопределенных интегралов методами подстановки и интегрирования по частям.

Учебные вопросы

1. Интегрирование по частям и заменой переменной.

Задача 1. Найти устно интегралы (повторение):

$$\int \frac{dx}{x^3}, \quad \int \sqrt[5]{2x}\, dx, \quad \int \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}, \quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^3}\right) dx, \quad \int e^{\frac{4}{3}x}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \int \frac{10\,dx}{9+x^2}.$$

Задача 2. Найти интегралы, используя подстановку:

$$1)\quad \int \frac{3\,dx}{6x+2};$$

$$2)\quad \int x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx;$$

$$3)\quad \int \frac{2x+6}{x^2+6x-10}\,dx.$$

Задача 3. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

$$1)\quad \int \arccos\frac{x}{2}\,dx;$$

$$2)\quad \int (6x-4)\sin 4x\,dx.$$

Задача 4. Найти интеграл: $\int e^x \sin x\, dx$.

Решение. Решение сводится к двукратному применению интегрирования по частям:

$$\int e^x \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x\, dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)\, dx =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x\, dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx\right) = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx.$$

В правой части получили исходный интеграл.

Перенесем его в левую часть, получим:

$$2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x;$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Задача 5. Решить по образцу задачи 4:

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Задание для самостоятельной работы

Задача 6. Найти интегралы:

1) $\int \frac{2(\ln x+3)^3}{x}\,dx$;

2) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx$.

Задача 7. Найти интегралы:

1) $\int x^2 e^x\,dx$;

2) $\int (x+1)e^x\,dx$;

3) $\int \left(x^2+2x+3\right)\cos x\,dx$;

4) $\int x^5 e^{x^2}\,dx$.

Указание. В примере 4 за u принять x^4. В случае затруднения обратиться к преподавателю.

Задача 8. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^6}}$;

2) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2+3x\right)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Задача 9. Определить метод интегрирования, найти интегралы:

1) $\int e^{3x+4}\,dx$;

2) $\int \frac{4}{1-7x}\,dx$;

3) $\int \left(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x}+5\right)dx$;

4) $\int (8-3x)\cos 5x\,dx$;

5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Занятие №5. Интегрирование рациональных дробей

Цель занятия: усвоить новые учебные элементы на уровне знаний и умений решить типовые задачи.

Учебные вопросы

1. Интегрирование рациональных дробей 1, 2, 3 типов.

Ход занятия

Краткая информация о новых учебных элементах

Интегрирование рациональных дробей $\frac{P(x)}{Q(x)}$ приводится к интегрированию простейших дробей четырех типов:

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + c$; (1)

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$; (2)

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$, (3)

где $D<0$, т.е. знаменатель дроби имеет мнимые корни;

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, (4)

где $D<0$.

Для вычисления интегралов 3 типа используется следующий алгоритм:

1) В числителе дроби создать производную знаменателя:

$$(x^2+px+q)' = 2x+p;$$

$$Ax+B = (2x+p)\cdot\frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2}.$$

2) Разбить интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx.$$

3) В первом интеграле приходим к натуральному логарифму знаменателя. В знаменателе дроби второго интеграла выделяем полный квадрат и приходим к табличному интегралу.

Выделение полного квадрата: $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$$x^2+px+q=\left[x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right].$$

Задача 1. Найти интегралы от рациональных дробей 1 типа:

$$\int\frac{2\,dx}{x-6}\overset{(1)}{=}2\ln|x-6|+c;$$

$$\int\frac{4\,dx}{x-2}\overset{(1)}{=}4\ln|x-2|+c.$$

Задача 2. Самостоятельно найти интегралы от рациональных дробей 1 типа:

$$1)\int\frac{6\,dx}{x+4};\quad 2)\int\frac{5\,dx}{x-3};\quad 3)\int\frac{\frac{1}{2}\,dx}{x-7{,}5}.$$

Задача 3. Найти интегралы от рациональных дробей второго типа:

$$\int\frac{3{,}5\,dx}{(x-5)^4}\overset{(2)}{=}\frac{3{,}5}{1-4}\cdot\frac{1}{(x-5)^{4-1}}+c=\frac{-3{,}5}{3(x-5)^3}+c;$$

$$\int\frac{5\,dx}{(x-6)^{\frac{3}{2}}}\overset{(2)}{=}\frac{5}{-\frac{3}{2}+1}\cdot\frac{1}{(x-6)^{\frac{3}{2}-1}}+c=\frac{-10}{\sqrt{x-6}}+c.$$

Задача 4. Найти интегралы от рациональных дробей 2 типа, используя формулу (2):

$$\int\frac{5{,}8\,dx}{(x-1{,}6)^{47}};\quad\int\frac{49}{(x-4{,}5)^{2{,}5}};\quad\int\frac{10\,dx}{(x-4)^3}.$$

Как можно найти интегралы 1, 2 типа, не используя формул (1), (2)?

Рассмотрим нахождение интеграла 3 типа $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$.

Предварительно найдем интеграл $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ $(A=0,\ B=1)$, используя формулу выделения полного квадрата в знаменателе.

Задача 5. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$.

Решение. $x^2+4x+14=0,\ D=16-4\cdot 14=-40<0$.

Для нахождения таких интегралов нам придется пользоваться формулами

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c,$$

либо

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c.$$

1. Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$x^2+4x+14 = \left(x^2+2x\cdot 2+2^2\right) - 2^2 + 14 = \left(x^2+4x+4\right) - 4 + 14 =$$

$$= (x+2)^2 + 10 = (x+2)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2.$$

2. Подставим в интеграл и применим формулу:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+14} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2} = \left|\begin{array}{l} u = x+2 \\ du = dx \\ a = \sqrt{10} \end{array}\right| = \int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{10}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{10}} + c = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{10}} + c.$$

Задача 6. Найти интеграл: $\int \frac{x+2}{x^2+3x+4}\,dx$.

Решение. $x^2+3x+4=0$, $D = 9-4\cdot 4 = 9-16 = -7 < 0$.

Решаем по алгоритму нахождения интеграла от рациональных дробей 3 типа:

1) В числителе строим производную знаменателя:

$$\left(x^2+3x+4\right)' = 2x+3;$$

$$x+2 = (2x+3)\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = (2x+3)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

2) Разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{x+2}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{(2x+3)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+3x+4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+3)}{x^2+3x+4}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+3x+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+4}.$$

3) Находим первый интеграл:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2+3x+4 \\ du = (2x+3)\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+4\right| + c.$$

4) Находим второй интеграл (по образцу задачи 5).

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+3x+4=\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=$$

$$=\left[x^2+2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-\frac{9}{4}+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+4}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} u=x+\frac{3}{2} \\ du=dx \\ a=\frac{\sqrt{7}}{2}\end{array}\right|=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}}+c=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c.$$

Тогда из 3), 4) следует:

$$\int\frac{x+2}{x^2+3x+4}\,dx=\frac{1}{2}\left|x^2+3x+4\right|+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c.$$

Задача 7. Решить по образцу:

1) $\int\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\,dx$;

2) $\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}\,dx$;

3) $\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}\,dx$.

Задание для самостоятельной работы

Задача 8. Определить тип рациональной дроби и найти интеграл:

1) $\int\frac{3x-11}{x^2+8x+18}\,dx$;

2) $\int\frac{x+7}{x^2+11x+42}\,dx$;

3) $\int\frac{dx}{x^2+x+5}$;

4) $\int\frac{dx}{x^2+2x+6}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$.

Задача 9. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+6x+15}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x-x^2}}$;

3) $\int \frac{4x+5}{x^2-3x+7}\,dx$.

Занятие №6. Интегрирование рациональных дробей (продолжение)

Цель занятий: усвоить новые учебные элементы на уровне знаний и умений применять их к решению типовых задач.

Учебные вопросы

1. Метод неопределенных коэффициентов.

Ход занятия

Краткая информация о новых учебных элементах

Определение 1. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *рациональной*, если её числитель и знаменатель – многочлены (предполагаем, что коэффициенты многочленов действительные числа).

Определение 2. Дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$, находящегося в числителе, меньше чем степень многочлена $Q(x)$, находящегося в знаменателе.

Определение 3. Если степень числителя дроби равна степени знаменателя или больше ее, то рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякая неправильная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Поэтому интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

Алгоритм нахождения интеграла методом неопределенных коэффициентов

1) Проверить, правильная ли дробь. Если дробь неправильная, то необходимо представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби. Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен.

2) Знаменатель правильной дроби разложим на простейшие множители вида $(x-a)^n$ и $\left(x^2+px+q\right)^m$.

3) Правильную рациональную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n\left(x^2+px+q\right)^m}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{\left(x^2+px+q\right)^m}, \qquad (1)$$

где $A_1,\ldots,A_n$; $B_1,\ldots,B_m$; $C_1,\ldots,C_m$ – неопределенные коэффициенты, которые нужно вычислить.

4) Для вычисления неопределенных коэффициентов приводим равенство (1) к общему знаменателю, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества, и решаем систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Тем самым интегрирование рациональной дроби сводим к интегрированию суммы простейших рациональных дробей.

Задача 1. Определить, правильная ли дробь:

1) $\frac{x^2-5x+3}{x^3+3x-1}$; 2) $\frac{x^3+x^2+9}{2x^3+3x^2-x-7}$; 3) $\frac{x^5-3x^2+x+10}{x^2+x+4}$; 4) $\frac{x}{x^2+3x+4}$.

Задача 2. Представить в виде суммы многочлена и правильной дроби неправильную дробь:

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}.$$

Решение. Дробь неправильная, т.к. степень числителя больше степени знаменателя.

Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4-3x^2+5x+4 & x^2-8x+5 \\
\underline{x^4-8x^3+5x^2} & \overline{x^2+8x+56} \\
-\;8x^3-8x^2+5x+4 & \\
\underline{8x^3-64x^2+40x} & \\
-\;56x^2-35x+4 & \\
\underline{56x^2-448x+280} & \\
413x-276 &
\end{array}
$$

Таким образом:

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}=x^2+8x+56+\frac{413x-276}{x^2-8x+5}.$$

Задача 3. Найти интеграл: $\int\frac{3x+1}{x^2+x-6}\,dx$.

Решение. 1. Дробь правильная, т.к. степень числителя меньше степени знаменателя.

2. Разложим знаменатель на простейшие множители:

$$x^2+x-6=0;$$

$$D=1-4\cdot(-6)=25>0 - \text{два действительных корня.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+5}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

3. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух простейших дробей:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

4. Найдем коэффициенты A и B. Для этого приведем дроби к общему знаменателю и воспользуемся правилом равенства дробей:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)};$$

$$3x+1=A(x+3)+B(x-2);$$

$$3x+1=Ax+3A+Bx-2B;$$

$$3x+1=x(A+B)+3A-2B.$$

Приравниваем коэффициенты при x и свободные члены. Составим систему уравнений и найдем A и B:

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 1 = 3A - 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 - B \\ 1 = 3(3 - B) - 2B \Rightarrow 1 = 9 - 5B \end{cases}$$

$$5B = 8 \quad \Rightarrow B = \frac{8}{5}, \;\; A = \frac{7}{5}.$$

Решив систему, получили $A = \frac{7}{5}$; $B = \frac{8}{5}$. Таким образом:

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{7}{5}}{x-2} + \frac{\frac{8}{5}}{x+3}.$$

Тогда:

$$\int \frac{3x+1}{x^2 + x + 6}\, dx = \int \left(\frac{\frac{7}{5}}{x-2} + \frac{\frac{8}{5}}{x+3} \right) dx = \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{5}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{7}{5}\ln|x-2| + \frac{8}{5}\ln|x+3| + c.$$

Задача 4. Найти интеграл: $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)}\, dx$.

Решение. 1. Дробь правильная. Знаменатель разложен на множители.

2. Правильную рациональную дробь разложим на простейшие дроби по формуле (1):

$$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

3. Найдем коэффициенты A, B, C. Для этого приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}.$$

По правилу равенства дробей:

$$11x + 16 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1);$$

$$11x + 16 = A(x^2 + 4x + 4) + B(x^2 + x - 2) + C(x-1);$$

$$11x + 16 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx - C.$$

Приведем подобные члены в правой части тождества:

$$11x + 16 = (A + B)x^2 + (4A + B + C)x + (4A - 2B - C).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены в левой и правой части. Так как в левой части нет x^2, то его коэффициент равен 0 $\left(0 \cdot x^2 = 0\right)$.

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 11 = 4A + B + C \\ 16 = 4A - 2B - C \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -B \\ 11 = -4B + B + C \\ 16 = -4B - 2B + C \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -B \\ C = 11 + 3B \\ C = -16 - 6B \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -B \\ C = 11 + 3B \\ 16 + 11 + 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9B = -27 \Rightarrow \quad B = -3; \quad C = 11 - 3 \cdot 3 = 2; \quad A = 3.$$

Таким образом, решив систему, получим:

$$A = 3; \; B = -3; \; C = 2.$$

Тогда

$$\frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2};$$

$$\int \frac{11x + 16}{(x-1)(x+2)^2}\, dx = \int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} \right) dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x-1} - 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{(x+2)^2} = 3\ln|x-1| - 3\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c.$$

Задача 5. Найти интеграл методом неопределенных коэффициентов:

$$\int \frac{dx}{x^3 + 4x}.$$

Решение. 1. Дробь правильная.

2. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 + 4x = x\left(x^2 + 4\right).$$

3. Представим подынтегральную функцию в виде суммы двух простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + 4x} = \frac{1}{\left(x^2 + 4\right)x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

4. Найдем коэффициенты A, B, C:

$$\frac{1}{x\left(x^2 + 4\right)} = \frac{A\left(x^2 + 4\right) + (Bx + C)x}{x\left(x^2 + 4\right)};$$

$$1 = A\left(x^2 + 4\right) + (Bx + C)x;$$

$$1 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx;$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$$

Приравниваем коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Так как в левой части нет x^2, x, то их коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases}0=A+B\\0=C\\1=4A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=A+B\\C=0\\A=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\dfrac{1}{4}\\C=0\\A=\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{x}-\frac{\frac{1}{4}x}{x^2+4}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^3+4x}=\int\frac{\frac{1}{4}dx}{x}-\int\frac{\frac{1}{4}x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right|+c.$$

Задача 6. Найти интегралы методом неопределенных коэффициентов:

1) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+5x+4}$;

2) $\displaystyle\int\frac{6\,dx}{x^2-3x+2}$;

3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-3)(x-1)}$;

4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+8}$;

5) $\displaystyle\int\frac{(x-1)\,dx}{(x+5)(x+1)}$;

6) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{x^2+8x+15}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\frac{dx}{4-x^2}$;

8) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

Задание для самостоятельной работы

Найти интегралы:

Задача 7. $\displaystyle\int\frac{4x-3}{x^2+3x-4}\,dx$.

Задача 8. $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$.

Задача 9. $\int \frac{11x-4}{x^2+2x-8}\,dx$.

Задача 10. $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}\,dx$.

Указание. Подынтегральную функцию представить в виде суммы многочлена и правильной дроби (см. задачу 2). Правильную дробь разложить на множители, используя метод неопределенных коэффициентов, проинтегрировать.

Задача 11. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

Указание. *а)* знаменатель разложить на множители (разность кубов);

б) используя метод неопределенных коэффициентов, получить два интеграла 1 и 3 типов;

в) проинтегрировать по алгоритму.

Задача 12. Найти интеграл: $\int \frac{x^3-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$.

Найти интегралы, используя метод неопределенных коэффициентов:

Задача 13. $\int \frac{x+4}{x^2+x-2}\,dx$.

Задача 14. $\int \frac{dx}{x(x+3)}$.

Задача 15. $\int \frac{-4x}{x^2-9x+18}\,dx$.

Занятие №7. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Цель занятия: усвоить новые учебные элементы на уровне знаний и умений применять на практике при решении типовой задачи.

Учебные вопросы

1. Интегрирование выражений вида:
$$f(x)=(\sin x)^{2k}\cdot(\cos x)^{2k+1}.$$
2. Интегрирование выражений вида:
$$f(x)=(\cos x)^{2k}(\sin x)^{2k+1}.$$

Ход занятия

Краткая информация о новых учебных элементах

1) $\int(\sin x)^{2k}\cdot(\cos x)^{2k+1}dx$.

Показатель степени косинуса $(2k+1)$ – нечетное положительное число. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из $(\cos x)^{2k+1}$ выделяем первую степень косинуса и получаем:
$$(\cos x)^{2k+1}=(\cos x)^{2k}\cdot\cos x=\left(\cos^2 x\right)^k\cdot\cos x,$$
т.к. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, то, заменив $\cos^2 x$, получим
$$(\cos x)^{2k+1}=\left(1-\sin^2 x\right)^k\cos x\quad\Rightarrow$$
$$\int(\sin x)^{2k}(\cos x)^{2k+1}\,dx=\int(\sin x)^{2k}\left(1-\sin^2 x\right)^k\cos x\,dx=$$
Применив подстановку, получим интеграл:
$$=\begin{vmatrix}u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{vmatrix}=\int u^{2k}\left(1-u^2\right)^k\,du,$$
и решение сведется к интегрированию суммы степенных функций.

2) $\int(\cos x)^{2k}(\sin x)^{2k+1}\,dx$.

В этом случае показатель степени синуса $(2k+1)$ – нечетное положительное число.

Из $(\sin x)^{2k+1}$ выделяем первую степень синуса и получаем:
$$(\sin x)^{2k+1}=(\sin x)^{2k}\sin x=\left(\sin^2 x\right)^k\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)^k\sin x.$$
Интеграл запишется так:

$$\int (\cos x)^{2k}\left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int u^{2k}\left(1-u^2\right)^k\,du\,,$$

и вопрос опять-таки сведется к интегрированию суммы степенных функций.

3) $\int \sin^{2n} x\,dx;\ \int \cos^{2n} x\,dx,\ n-$целое, $n>0$.

При нахождении данных интегралов применяются формулы понижения степени, которые позволяют привести рассматриваемые интегралы к табличным:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \qquad (1)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \qquad (2)$$

4) $\int \sin kx \cos \ell x\,dx;$ $\int \cos kx \cos \ell x\,dx;$ $\int \sin kx \sin \ell x\,dx,$ где $k,\ \ell -$действительные числа.

Для нахождения данных интегралов, подынтегральные функции заменяем, используя формулы произведений тригонометрических функций:

$$\sin kx \cos \ell x = \frac{1}{2}\left[\sin(k-\ell)x + \sin(k+\ell)x\right]; \qquad (3)$$

$$\cos kx \cos \ell x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-\ell)x + \cos(k+\ell)x\right]; \qquad (4)$$

$$\sin kx \sin \ell x = \frac{1}{2}\left[\cos(k-\ell)x - \cos(k+\ell)x\right]. \qquad (5)$$

Задача 1. Вычислить интегралы:

1) $\int \sin^3 x\,dx$;

2) $\int \cos^5 x\,dx$;

3) $\int \cos^2 x\,dx$.

Решение. 1) $\int \sin^3 x\,dx$.

Представим $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \left(1-\cos^2 x\right)\sin x$.

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x\,dx \\ \sin x\,dx=-du \end{vmatrix} = \int \left(1-u^2\right)\cdot(-du) =$$

$$= -\int \left(1-u^2\right)du = -\int du + \int u^2\,du = -u + \frac{u^3}{3} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c\,.$$

2) $\int \cos^5 x\,dx$.

В подынтегральной функции $\cos^5 x$ выделим первую степень косинуса, тогда:

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cdot \cos x = \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x = \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x = \left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)\cos x \Rightarrow$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)\cos x\,dx$$

$$= \begin{vmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{vmatrix} = \int \left(1-2u^2+u^4\right)du =$$

$$= \int du - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

3) $\int \cos^2 x\,dx$.

Применим формулу понижения степени $\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Задача 2. Найти интегралы:

1) $\int \sin^5 x\,dx$;

2) $\int \cos^3 x\,dx$;

3) $\int \sin^2 x\,dx$.

Задача 3. Найти интегралы:

1) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$;

2) $\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx$.

Решение. Эти примеры решаются так же, как и примеры 1), 2) задачи **1**. У функции, которая под интегралом находится в нечетной степени, выделяем первую степень и применяем указанный выше прием.

1) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$.

$$\sin^4 x\cos^3 x = \sin^4 x\cos^2 x\cos x = \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x = \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right)\cos x;$$

$$\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx = \int \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right)dx = \begin{vmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\,dx \end{vmatrix} = \int \left(u^4-u^6\right)du =$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c.$$

2) $\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx$.

$$\cos^2 x \sin^5 x = \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x\left(\sin^2 x\right)^2 \sin x = \cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x =$$

$$= \cos^2 x\left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\sin x = \left(\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x\right)\sin x;$$

$$\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx = \int \left(\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x\right)\sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \\ \sin x\, dx = -du \end{vmatrix} =$$

$$= -\int \left(u^2 - 2u^4 + u^6\right) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c.$$

Задача 4. Найти интегралы:

1) $\int \sin^4 x \cos^7 x\, dx$;

2) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$;

3) $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$.

Задача 5. Найти интегралы:

а) $\int \sin 3x \sin 4x\, dx$, *б)* $\int \sin x \cos 2x\, dx$.

Решение. *а)* $\int \sin 3x \sin 4x\, dx$.

Используем формулу (5):

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \left[\cos(3-4)x - \cos(3+4)x\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-x) - \cos 7x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + c.$$

Замечание. $\cos(-x) = \cos x$, т.к. косинус – функция четная;
$\sin(-x) = -\sin x$, т.к. синус – функция нечетная.

б) $\int \sin x \cos 2x\, dx$.

$$\int \sin x \cos 2x\, dx \overset{(3)}{=} \int \frac{1}{2}\left[\sin(1-2)x + \sin(1+2)x\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(-x) + \sin 3x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + c.$$

Задача 6. Найти интегралы:

1) $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$;

2) $\int \cos 2x \cos\frac{x}{2}\, dx$.

Задание для самостоятельной работы

Задача 7. Найти интегралы:

1) $\int \sin^7 x\, dx$;

2) $\int \cos^2 \frac{1}{2} x\, dx$;

3) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Задача 8. Найти интегралы:

1) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx$;

2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\, dx$.

Задача 9. Найти интегралы:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$;

2) $\int \cos^2 3x\, dx$;

3) $\int \sin 5x \cos 7x\, dx$.

Список использованной литературы

1. Боярчук, А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 3. Часть 2: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / А.К. Боярчук, И.И. Ляшко, Я.Г. Гай. — М.: ЛИБРОКОМ, 2012. — 256 с.
2. Баврин, И.И. Математический анализ 2-е изд., испр. и доп. учебник и практикум для спо / И.И. Баврин. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 327 с
3. Ильин, В.А. Математический анализ ч. 1 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.
4. Краснова, С.А. Математический анализ для экономистов в 2 ч. часть 1. учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С.А. Краснова, В.А. Уткин. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 298 с.
5. Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т.1. Ч.1: Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. — М.: Ленанд, 2015. — 238 с.
6. Шипачев, В.С. Математический анализ. Теория и практика. / В.С. Шипачев. — М.: Высшая школа, 2009. — 350 с.