

Пример 2. Найти $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}$.

Решение. Из таблицы производных основных элементарных функций (§ 9.6, формула IX) имеем: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, причем равенство верно при $x > 0$, если же $x < 0$, то оно принимает вид $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$. Следовательно, согласно свойству 2 будем иметь

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Из определения интеграла следует, что если мы прочтем в обратном порядке формулы дифференцирования основных функций, то получим таблицу интегралов. Эту таблицу можно дополнить еще несколькими легко проверяемыми формулами:

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$

■ § 10.5. Методы интегрирования

I. Непосредственное интегрирование.

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подинтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Пример 1. Найти $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx &= \\ &= \int 4x^3 dx - \int 15x^2 dx + \int 14x dx - \int 3 dx = \\ &= 4 \int x^3 dx - 15 \int x^2 dx + 14 \int x dx - 3 \int dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 15 \cdot \frac{x^3}{3} + 14 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{(3x+1)^2}{x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+1)^2}{x} dx &= \int \frac{9x^2 + 6x + 1}{x} dx = 9 \int x dx + 6 \int dx + \int \frac{dx}{x} = 9 \cdot \frac{x^2}{2} + 6x + \\ &+ \ln|x| + C = 4,5x^2 + 6x + \ln|x| + C. \end{aligned}$$

II. Метод подстановки.

Этот метод называют также *методом замены переменной*. Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла.

Предположим, что в промежутке $[a, b]$

$$\int f(x) dx = F(x)$$

и допустим, что функция $x = \varphi(t)$ непрерывна вместе со своей первой производной в промежутке $[\alpha, \beta]$ и $a \leq \varphi(t) \leq b$ для всех точек t промежутка $[\alpha, \beta]$.

При этих предположениях сложная функция $F(\varphi(t))$ определена при $\alpha \leq t \leq \beta$ и

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Так как $F'(x) = f(x)$, то

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

откуда

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t))$$

или

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(x) dx, \text{ где } x = \varphi(t). \quad (10.1)$$

После интегрирования возвращаются к старой переменной, используя обратную подстановку $t = \varphi^{-1}(x)$.
Формулу (10.1) применяют и в обратном направлении:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Подстановку $x = \varphi(t)$ необходимо выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (10.1).

Общих правил для нахождения нужной подстановки нет. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если подинтегральная функция имеет вид $f(ax + b)$, то можно использовать подстановку $ax + b = t$.

Пример 3. Найти $\int (2+x)^7 dx$.

Решение. Введем новую переменную $2+x=t$; $(2+x)'dx = t'dt = dt$.
Найдем интеграл:

$$\int (2+x)^7 dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C.$$

Выразим результат через первоначальный аргумент:

$$\int (2+x)^7 dx = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{x dx}{x^2+1}$.

Решение. Очевидно, что $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

Этот пример допускает следующий полезный общий вывод:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Действительно, введя переменную $t = f(x)$, получаем табличный интеграл

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(1-\frac{1}{3}x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3} \sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}}.$$

Сделаем подстановку $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$, при этом $d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \frac{dx}{\sqrt{3}} = dt$, откуда $dx = \sqrt{3}dt$.

Подставив значения $\frac{x}{\sqrt{3}}$ и dx в новых обозначениях в подинтегральную функцию, будем иметь:

$$\int \frac{\frac{dx}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Формула для вычисления интегралов подобного типа имеет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

В некоторых случаях в подинтегральном выражении один из сомножителей является производной другого сомножителя. Например, пусть требуется вычислить интеграл

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx.$$

Здесь подинтегральная функция представляет собой произведение двух сомножителей. Один из них $(x^2 - 3x + 1)^{10}$, второй $(2x - 3)$. Легко заметить, что $d(x^2 - 3x + 1) = (x^2 - 3x + 1)' dx = (2x - 3) dx$. Выполним следующую подстановку: $x^2 - 3x + 1 = t$; откуда $(2x - 3) dx = dt$. Получим $\int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{11} + C$ или, перейдя вновь к переменной x , будем иметь

$$\int (x^2 - 3x + 1)^{10} (2x - 3) dx = \frac{1}{11} (x^2 - 3x + 1)^{11} + C.$$

Пример 6. Найти $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Решение. Сделаем подстановку $\sin x = t$, отсюда $\cos x dx = dt$. Поэтому

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} + C.$$

Пример 7. Найти $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$.

Решение. Сделаем подстановку $\ln x = t$; тогда $\frac{dx}{x} = dt$:

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$$

III. Метод интегрирования по частям.

Пусть функции $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы на некотором интервале. Имеет место тождество:

$$(f(x)\varphi(x))' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x).$$

Интегрируя это тождество, получим:

$$\int (f(x)\varphi(x))' dx = \int f'(x)\varphi(x) dx + \int f(x)\varphi'(x) dx,$$

откуда следует

$$\int f(x)\varphi'(x) dx = f(x)\varphi(x) - \int f'(x)\varphi(x) dx. \quad (10.2)$$

Так как $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$, то $du = f'(x)dx$ и $dv = \varphi'(x)dx$, поэтому равенство (10.2) можно записать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (10.3)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

При известных функциях u и v она сводит нахождение интеграла от $u dv$ к нахождению интеграла от $v du$. Формулой (10.3) удобно пользоваться тогда, когда проще найти $\int v du$, чем $\int u dv$.

Умение рационально разбивать подинтегральное выражение на сомножители u и dv вырабатывается в процессе упражнений.

Пример 8. Найти $\int \ln x \, dx$.

Решение. Обозначим $u = \ln x$; $dv = dx$.

Тогда $du = \frac{dx}{x}$, а $\int dv = \int dx$, т. е. $v = x + C$.

Подставим полученные данные в формулу (10.2):

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C.$$

Если при определении v из равенства $dv = dx$ возьмем $v = x + C_1$, то результат от этого не изменится. Действительно,

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= (x + C_1) \ln x - \int (x + C_1) \frac{dx}{x} = \\ &= (x + C_1) \ln x - x - C_1 \ln x + C = x (\ln x - 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти $\int x \cos x \, dx$.

Решение. 1 способ. Сделаем подстановку

$$u = x; \, dv = \cos x \, dx; \, du = dx; \, \int dv = \int \cos x \, dx; \, v = \sin x.$$

$$\text{Тогда } \int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

2 способ. Сделаем подстановку

$$u = \cos x; \, dv = x \, dx; \, du = -\sin x \, dx; \, v = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Тогда } \int x \cos x \, dx = \int \cos x \cdot x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx.$$

Второе слагаемое в этом случае представляет собой более сложный интеграл, чем данный. Мы видим, что II способ решения оказался неудачным.

Пример 10. Найти $\int x^2 \sin x \, dx$.

Решение. Сделаем подстановку

$$u = x^2; \, dv = \sin x \, dx; \, du = 2x \, dx; \, v = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

$$\text{Тогда } \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Подставим значение интеграла из примера 9, получим

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int x^2 e^x \, dx$.

Решение. Сделаем подстановку $u = x^2$; $dv = e^x \, dx$; $du = 2x \, dx$; $v = e^x$.

Тогда

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx. \quad (10.4)$$

Степень в подинтегральном выражении стала на единицу меньше. Применим интегрирование по частям вторично для вычисления $\int x e^x \, dx$:

$$u = x; \, dv = e^x \, dx; \, du = dx; \, v = e^x.$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C. \quad (10.5)$$

Подставив значение интеграла (10.5) в (10.4), получим

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Пример 12. Найти $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Решение. Сделаем подстановку $u = \operatorname{arctg} x$; $dv = dx$; $du = \frac{dx}{1+x^2}$;

$v = x$.

$$\text{Тогда } \int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

В практике иногда встречаются подинтегральные функции $f(x)$, которые непрерывны на интервале (a, b) имеют первообразную, но не всегда удается ее найти. В этих случаях говорят, что интегралы «не берутся», т. е. первообразная представляет собой некоторую функцию, которую нельзя выразить через элементарные.

Примерами могут служить

$$\int \frac{\sin x}{x} \, dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} \, dx; \quad \int e^{x^2} \, dx.$$

Упражнения

Найдите:

10.4. $\int (x^7 + 4x) \, dx.$

10.5. $\int (x^{k-2} - 1) \, dx.$

$$10.6. \int \frac{2+x^2}{x} dx.$$

$$10.8. \int (4x+3)^2 dx.$$

$$10.10. \int (2x^2 - \cos x) dx.$$

$$10.12. \int \left(a^x + \frac{3}{1+x^2} \right) dx.$$

$$10.14. \int \frac{dx}{m^2 + x^2}.$$

$$10.16. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}.$$

$$10.18. \int \sqrt[3]{1+3\sin x} \cos x dx.$$

$$10.20. \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

$$10.22. \int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}}.$$

$$10.24. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$10.26. \int \frac{\sin 2x}{3\sin x} dx.$$

$$10.28. \int \sin(a+bx) dx.$$

$$10.30. \int \cos\left(\frac{1}{2} + 2x\right) dx.$$

$$10.32. \int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$$

$$10.7. \int (3x-8) dx.$$

$$10.9. \int (2+3\sin x) dx.$$

$$10.11. \int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$10.13. \int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - 8x - \frac{4}{x} \right) dx.$$

$$10.15. \int \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$10.17. \int \frac{dx}{1+e^x}.$$

$$10.19. \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$$

$$10.21. \int (2x-3)^{10} dx.$$

$$10.23. \int \sqrt[3]{1-3x} dx.$$

$$10.25. \int e^{3x} \cdot 3^x dx.$$

$$10.27. \int \sqrt{2x+3} dx.$$

$$10.29. \int \sin^2 x \cos x dx.$$

$$10.31. \int \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$