1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционных занятий № 46-47,
практического занятия № 28
по дисциплине ООД.11 «Математика»

Раздел 11. Логарифмы. Логарифмическая функция

Тема № 11.4: «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Лекционные занятия № 46-47

Практическое занятие № 28

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

Лекционные занятия № 46-47, практическое занятие № 28 по Теме № 11.4 «Решение логарифмических уравнений и неравенств»

Цель занятий: изучить со студентами основные понятия, алгоритм решения логарифмических уравнений и неравенств.

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Методы проведения занятий: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 6 ч (лекционные занятия – 4 ч, практическое занятие – 2 ч)

Основные вопросы:

1. Понятие логарифмического уравнения.
2. Операция потенцирования.
3. Основные методы решения логарифмических уравнений: функционально-графический, метод потенцирования, метод введения новой переменной.
4. Логарифмические неравенства.
5. Практическое применение полученных знаний – решение логарифмических уравнений и неравенств.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. — 13-е изд., стер. — 463 с., – Москва: Просвещение, 2025, ISBN 978-5-09-127034-1. — Текст: электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656 (печатный: ISBN 978-5-09-120157-4), с. 90-97 (часть 2), с. 98-116 (часть 3) **§15,16,17,18,19,20 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **IV**).

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: **Понятие логарифмического уравнения.**

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$; $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$.

Определение логарифма можно записать так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством*.

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \qquad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \qquad (2)$$

$$\log_a b^r = r \log_a b. \qquad (3)$$

● По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (4)$$

$$a^{\log_a c} = c. \qquad (5)$$

При решении логарифмических уравнений важно знать определение и свойства логарифмов, а также основные логарифмические тождества:

$\log_a c = b <=> a^b = c$		
$\log_a a^b = b$	$a^{\log_a c} = c$	
$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	
$\log_a(c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$	$\log_a(c_1 : c_2) = \log_a c_1 - \log_a c_2$	
$\log_a(c^m) = m \cdot \log_a c$	$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n}\log_a c$	
$\log_a c = \frac{\log_d c}{\log_d a}$	$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$	$\log_{a^n} c = \frac{1}{n}\log_a c$

Определение: Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма, называются логарифмическими.

Второй вопрос: Операция потенцирования.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*. Действие нахождения числа по его логарифму называют *потенцированием*.

Третий вопрос: Основные методы решения логарифмических уравнений: функционально-графический, метод потенцирования, метод введения новой переменной.

Основными методами решения логарифмических уравнений являются функционально-графический, метод потенцирования, метод введения новой переменной.

Функционально-графический метод решения логарифмических уравнений.

Функционально-графический метод решения логарифмических уравнений основан на использовании графических иллюстраций или свойств функций.

Суть метода — **построение в одной системе координат графиков функций**, записанных в левой и в правой частях уравнения, и **нахождение точки (точек) их пересечения**. Абсцисса найденной точки является решением уравнения.

Существует несколько разновидностей функционально-графического метода, например:

- **Использование графических иллюстраций**.
- **Применение свойства монотонности функций**. Если в уравнении f(x) = g(x) на промежутке X функция y = f(x) возрастает, а y = g(x) убывает, то

уравнение f(x) = g(x) либо не имеет корней, либо имеет один корень, который можно найти методом подбора.

- **Использование ограниченности функций**. Если в уравнении f(x) = g(x) на промежутке X наибольшее значение одной из функций y = f(x) равно A и наименьшее значение другой y = g(x) равно A, то уравнение f(x) = g(x) равносильно на промежутке X системе уравнений.

Ограничение: графический метод можно применять только в заданиях, в которых требуемые для построения графики хорошо известны, а искомые точки пересечения не выходят за пределы чертежа. Кроме того, на отыскание решений влияют неизбежные погрешности чертежа.

Алгоритм

Некоторые этапы решения логарифмических уравнений функционально-графическим методом:

- **Построить графики** функций, записанных в левой и в правой частях уравнения.
- **Найти точку (точки) пересечения** графиков.
- **Учесть свойство монотонности функций** — если одна из функций возрастает, а другая убывает на промежутке X, то уравнение f(x) = g(x) имеет не более одного корня на промежутке X.
- **Если графики функций не пересекаются**, то уравнение корней не имеет.

Важно: при решении логарифмических уравнений необходимо находить область определения выражения, содержащегося под знаком логарифма или в его основании, или после решения уравнения делать проверку, подставляя найденные корни в исходное уравнение.

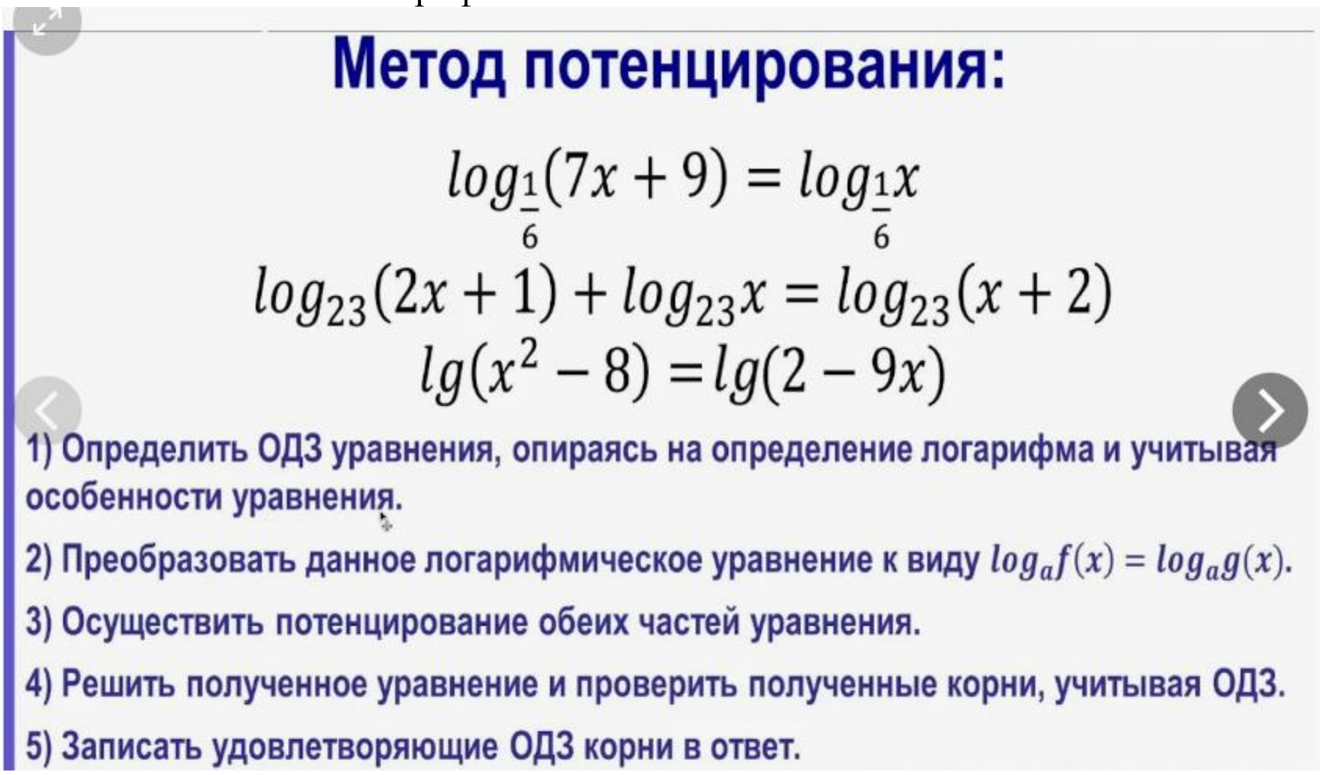
Примеры

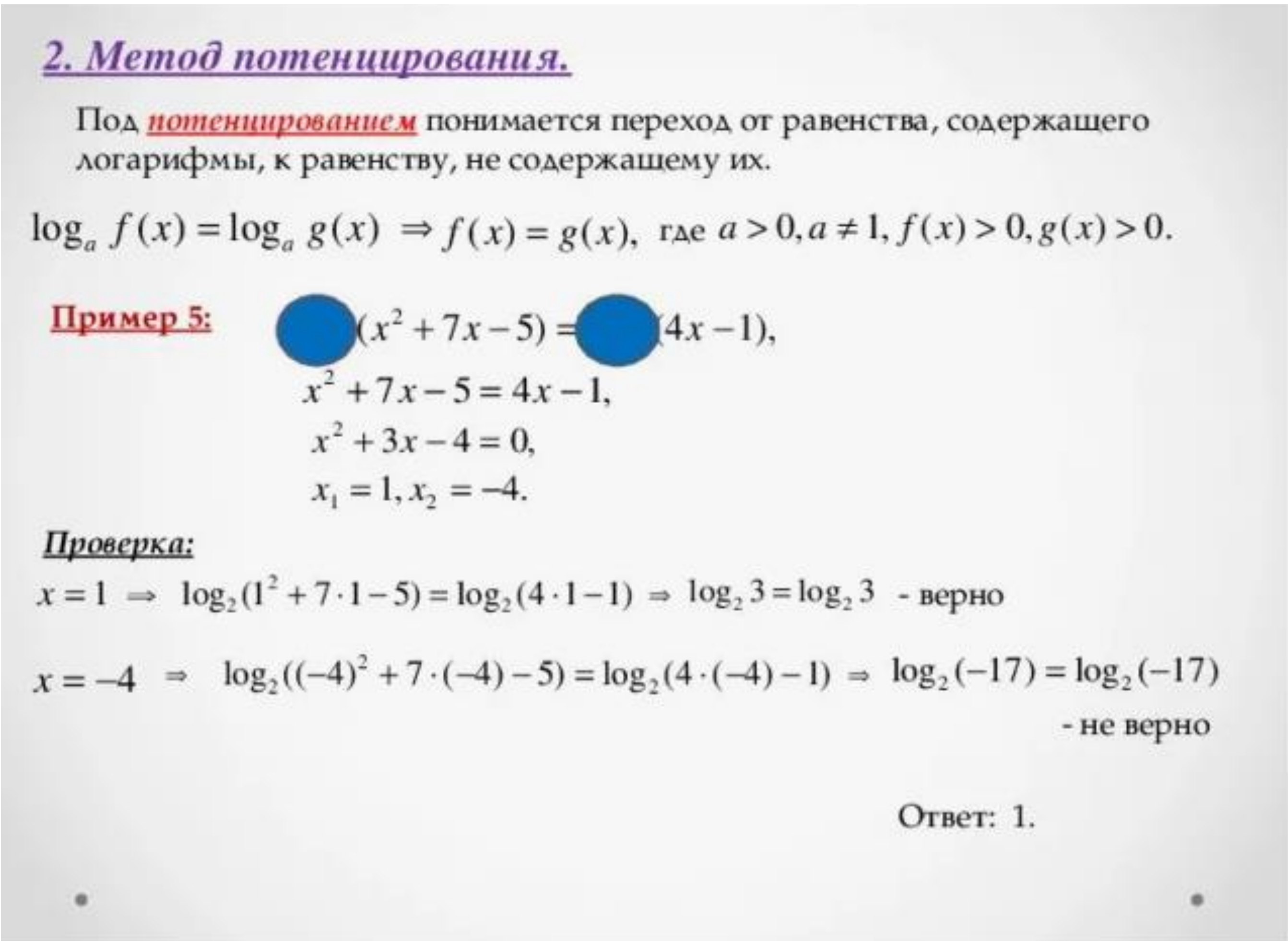
- **Уравнение $\log_2 x = 1 - x^2$**. Строят в одной координатной плоскости графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 1 - x^2$ и находят абсциссы точек пересечения графиков. Графики пересекаются (в силу характера монотонности обеих функций) в единственной точке с абсциссой, равной 1. Значит, уравнение имеет единственное решение — **x = 1**.
- **Уравнение $\log_5 (5x - 4) = 1 - x$**. Функция $\log_5 (5x - 4)$ возрастает при $x > \log_5 4$, функция $y = 1 - x$ убывает при любом x. Если x = 1, то $\log_5 (5 - 4) = 1 - 1$, 0 = 0, значит, 1 — корень уравнения. **Ответ**: 1.

<u>Метод потенцирования при решении логарифмических уравнений.</u>

Метод потенцирования — метод решения логарифмических уравнений, который заключается в переходе от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их. Суть метода — использование основного определения логарифма, которое позволяет перейти от логарифмического выражения к степенному.

Потенцировать можно только в том случае, когда и в левой, и в правой частях уравнения стоят по одному логарифму с одинаковыми основаниями и больше никаких действий с ними не производится. В этом случае можно избавиться от знаков логарифма вместе с основаниями.





<u>Метод введения новой переменной при решении логарифмических уравнений.</u>

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\lg^2 x - \lg x - 6 = 0$

Пусть $\lg x = y$, тогда получаем уравнение: $y^2 - y - 6 = 0$

$y_1 = -2,\ y_2 = 3$

Таким образом: 1) $\lg x = -2$ 2) $\lg x = 3$

$x = 0{,}01$ $x = 1000$

Ответ: 0,01; 1000

2) $\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 2 = 0$

$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

Пусть $\log_2 x = y$, тогда получаем уравнение: $y^2 - 3y + 2 = 0$

$y_1 = 1,\ y_2 = 2$

Таким образом: 1) $\log_2 x = 1$ 2) $\log_2 x = 2$

$x = 2$ $x = 4$

Ответ: 2; 4

3) $\log_5(x+2) - 2\log_{x+2} 5 - 1 = 0.$

$\log_5(x + 2) - 2\,\dfrac{1}{\log 5(x+2)} - 1 = 0$

Пусть $\log_5(x + 2) = y$, тогда получаем уравнение: $y - \dfrac{2}{y} - 1 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$y_1 = -1,\ y_2 = 2$

Таким образом: 1) $\log_5 (x + 2) = -1$ 2) $\log_5 (x + 2) = 2$

$x + 2 = 0{,}2$ $x + 2 = 25$

$x = -1{,}8$ $x = 23$

Ответ: – 1,8; 23

Решите уравнения:

1) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x = 2$ *Ответ: 0,5; 4*

2) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$ *Ответ: 0,0001; 10*

3) $0{,}25 \lg^4 x + 8 = 3 \lg^2 x$ *Ответ: 0,01; 100;* $10^{\pm 2\sqrt{2}}$

Решение логарифмических уравнений разных видов.

7.1.1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где а > 0, а ≠ 1

Такие уравнения равносильны уравнению $f(x) = a^b$.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_2 x = -4$

$x = 2^{-4}$

$x = \frac{1}{16}$

Ответ: $\frac{1}{16}$

2) $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$

$-\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$-\frac{1}{x} = \frac{1}{9}$

$x = -9$

Ответ: -9

Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}$ *Ответ: - 1 и 2*

2) $\log_2\left(\sqrt{x} - 2\right) = 1$ *Ответ: 2*

7.1.2. Уравнения вида $\log_{g(x)} c = b$, где с > 0

Такие уравнения равносильны системе: $\begin{cases} g(x)^b = c \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

П р и м е р. Решим уравнение: $\log_{x-1} 9 = 2$

$$\begin{cases} x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: 4

Решите уравнение:

$log_{2x} 32 = 5$ *Ответ: 1*

7.2. Решение уравнений вида $\log_{g(x)} f(x) = b$

Такие уравнения равносильны системе: $\begin{cases} g(x)^b = f(x) \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

При решении таких уравнений на практике можно не выписывать систему, а решить уравнение $g(x)^b = f(x)$, которое получается по определению логарифма, и выполнить проверку того, что $g(x) > 0$ и $g(x) \neq 1$.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_x(2x^2 - 3x) = 1$

$2x^2 - 3x = x$

$2x^2 - 4x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

Проверка:1) $0 > 0$ – неверно 2) $2 > 0$ – верно и $2 \neq 1$ – верно

Ответ: 2

2) $\log_{x+2}(3x^2 + 4x - 14) = 2$

$3x^2 + 4x - 14 = (x + 2)^2$

$3x^2 + 4x - 14 = x^2 + 4x + 4$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

Проверка: 1) $3 + 2 > 0$ – верно

$3 + 2 \neq 1$ – верно

2) $-3 + 2 > 0$ – неверно

Ответ: 3

Решите уравнение:

$\log_{x-1}(x^2 - 7x + 41) = 2$ *Ответ: 8*

7.3. Решение уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и приводимых к ним

Уравнения данного вида сводятся к системе: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

На практике такие уравнения можно решать 2-мя способами:

1) Найти область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения, после чего решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выбрать те его корни, которые принадлежат ОДЗ.

2) Решить уравнение $f(x) = g(x)$ и проверить найденные корни, подставив их в исходное уравнение или сделав знаковую проверку найденных корней (под логарифмами должны быть положительные числа, чтобы они имели смысл).

Первый способ хорош, если ОДЗ уравнения легко найти. Если же получается сложная система неравенств, то проще решить его вторым способом.

Чтобы при потенцировании не появлялись дроби, можно логарифмы, перед которыми стоит знак «–», переносить в другую часть уравнения со знаком «+».

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$

$x^2 - x - 12 = 0$

$x_1 = -3,\ x_2 = 4$

Проверка: 1) При $x = -3$: $(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 5 > 0$ – верно

$7 - 2 \cdot (-3) > 0$ – верно

2) При $x = 4$: $4^2 - 3 \cdot 4 - 5 > 0$ – неверно

Ответ: – 3

2) $\log_2 (6 - x) = 2\log_2 x$

ОДЗ: $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 6$

$\log_2 (6 - x) = \log_2 x^2$

$6 - x = x^2$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3 \notin$ ОДЗ

$x_2 = 4$

Ответ: 4

3) $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$

$\lg(x + 4)(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$

$2x^2 + 3x + 8x + 12 = 1 - 2x$

$2x^2 + 13x + 11 = 0$

$x_1 = -5{,}5$

$x_2 = -1$

Проверка: 1) При $x = -5{,}5$: $-5{,}5 + 4 > 0$ – неверно

2) При $x = -1$: $-1 + 4 > 0$ – верно

$-2 + 3 > 0$ – верно

$1 + 2 > 0$ – верно

Ответ: – 1

4) $\log_6 (x - 1) = 2 - \log_6 (5x + 3)$

$\log_6 (x - 1) + \log_6 (5x + 3) = \log_6 36$

$\log_6 (x - 1)(5x + 3) = \log_6 36$

$5x^2 + 3x - 5x - 3 = 36$

$5x^2 - 2x - 39 = 0$

$x_1 = -2,6$

$x_2 = 3$

Проверка: 1) При $x = -2,6$: $-2,6 - 1 > 0$ – неверно

2) При $x = 3$: $3 - 1 > 0$ – верно

$15 + 3 > 0$ – верно

Ответ: 3

5) $\log_5(x^2 + 75) + \log_{0,2} 4x = 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 75 > 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ – любое число} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$\log_5(x^2 + 75) - \log_5 4x = 1$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 4x + \log_5 5$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 20x$

$x^2 + 75 = 20x$

$x^2 - 20x + 75 = 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = 15$

Ответ: 5; 15

Решите уравнения:

1) $\log_{0,3} (x^2 + 3x - 4) - \log_{0,3} (2x + 2) = 0$ *Ответ: 8*

2) $\log_2 (x-5) - \log_2 (2x+5) = 3$ *Ответ: Ø*

3) $\frac{\lg(x-3)}{\lg(x^2-21)} = \frac{1}{2}$ *Ответ: 5*

Четвёртый вопрос: Логарифмические неравенства.

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x + 1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x + 1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Пятый вопрос: Практическое применение полученных знаний – решение логарифмических уравнений и неравенств.

Задание: (исходные данные):

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в § 15, 16, 17, 18, 19, 20 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (90-116).

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ 266, 268-278, 290-295, 301-307, 318-328, 337-342, 355-357, 378-383 Учебника по алгебре.

Заключительная часть (по каждому занятию):

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (по каждому занятию):

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, необходимые сведения учебника, указанного на с. 2 Конспекта занятия.
2. Решить задачи, заданные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.