

2 курс

**ПЛАН – КОНСПЕКТ**  
проведения лекционного, практического занятий № 12  
по дисциплине ОПЦ.11 «Прикладная математика»

**Раздел 2. Основы дискретной математики, математические  
модели в транспортных системах**

**Тема № 2.2: «Основы теории графов»**

**Лекционное занятие № 12**

**Практическое занятие № 12**

Подготовил: преподаватель  
В.Н. Борисов

**Лекционное, практическое занятия № 12 «Постановка задачи о назначениях. Решение задачи о назначениях венгерским методом» по Теме № 2.2 «Основы теории графов»**

**Цель занятий:** изучить со студентами постановку задачи о назначениях, ее решение венгерским методом

**Виды занятий:** классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

**Методы проведения занятий:** доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

**Время проведения:** 4 ч (лекционное занятие – 2ч, практическое занятие – 2 ч)

**Основные вопросы:**

1. Постановка и решение задачи о назначениях венгерским методом.
2. Практическое применение полученных знаний – решение задач.

**Литература:**

1. Учебник: Высшая математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 472 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01497-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/584924>, п. 3.3 главы 3 Раздела I.
2. Учебник: Босова, Л. Л., Информатика. 9 класс. Базовый уровень : учебник / Л.Л. Босова, А. Ю. Босова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 208с. , ISBN 978-5-9963-3045-4, § 1.3 главы 1, с 21-31.
3. Учебник: Босова, Л. Л., Информатика. 11 класс. Базовый уровень : учебник / Л.Л. Босова, А. Ю. Босова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 208с. , ISBN 978-5-9963-3142-0, § 10-11 главы 3, с 135-152.

**Примерный расчет времени:**

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

**Вступительная часть (по каждому заняти):**

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике

полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

### **Основная часть (теоретическая):**

#### **Первый вопрос: Постановка и решение задачи о назначениях венгерским методом.**

**Задача о назначениях** — это частный случай транспортной задачи, где количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения, а объёмы потребности и предложения в каждом из пунктов равны 1. Цель — найти оптимальное (минимальной стоимости) распределение объектов (например, работников по работам) так, чтобы каждый объект был назначен ровно одному объекту, а суммарные затраты были минимальными.

#### **Постановка задачи:**

- Имеется  $n$  работ и  $n$  кандидатов для их выполнения.
- Затраты  $i$ -го кандидата на выполнение  $j$ -й работы равны  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, n$ ).
- Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа — только на одного кандидата.
- Требуется найти такое назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работ минимальны.

**Венгерский метод** — алгоритм решения задачи о назначениях, разработанный Гарольдом Куном в 1955 году. Он основан на более ранних работах венгерских математиков Кёнига и Эгервари.

#### **Алгоритм решения венгерским методом включает несколько этапов:**

##### **1. Редукция матрицы (получение нулей в строках и столбцах).**

- В каждой строке находят минимальный элемент и вычитают его значение из всех элементов этой строки.
- В преобразованной таблице в каждом столбце определяют минимальный элемент и вычитают его значение из всех элементов этого столбца.

##### **2. Определение назначений.**

- Просматривают строку, содержащую наименьшее число нулей.
- Отмечают один из нулей этой строки и зачёркивают все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится отмеченный нуль.
- Если назначение, полученное при всех отмеченных нулях, является полным (то есть число отмеченных нулей равно  $n$ ), то решение является оптимальным. В противном случае переходят к следующему этапу.

### 3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули.

- Помечают номера строк, в которых нет ни одного помеченного нуля.
- Помечают номера столбцов, в которых есть перечеркнутый нуль хотя бы в одной из строк с помеченным номером.
- Помечают номера строк, содержащие помеченные нули хотя бы в одном из столбцов с помеченным номером.
- Действия 2 и 3 повторяют поочерёдно до тех пор, пока есть что пометить.
- После этого необходимо зачеркнуть каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец.

### 4. Модификация матрицы.

- Находят наименьший невычеркнутый элемент.
- Вычитают его из всех невычеркнутых элементов.
- Прибавляют к элементам, стоящим на пересечении проведённых прямых.
- После этого расчёт начинают с этапа 2 и продолжают до получения решения.

#### Некоторые особенности:

- Если исходная матрица не является квадратной, то можно добавить дополнительные строки или столбцы, присвоив их элементам значения, определяемые условиями задачи.
- Если цель состоит в нахождении назначения с наибольшей стоимостью, то решение сводится к решению задачи путём замены каждой стоимости  $C$  на разность между максимальной стоимостью и  $C$ .
- Временная сложность оригинального венгерского алгоритма —  $O(n^4)$ , но позже его модифицировали так, чтобы достичь времени выполнения  $O(n^3)$  (алгоритм Хопкрофта — Карпа).

**Пример:** если есть три работника и три вида работ, и известна матрица стоимостей, венгерский алгоритм поможет найти оптимальное распределение, минимизирующее затраты на оплату труда.

Также сведения по данному вопросу представлены в Приложении № 1.

**Второй вопрос:** Практическое применение полученных знаний – решение задач.

Решить задания, указанные преподавателем:

**Пример**

Распределить 4 датчика на 4-х объектах, чтобы стоимость назначения была наименьшей, если матрица стоимости назначений имеет вид:

Вариант 1

57	65	47	37
10	32	42	40
49	61	37	55
64	62	30	74

Вариант 2

35	0	74	55
37	18	30	15
57	18	42	63
55	0	10	65

**Заключительная часть занятия (по каждому занятию):**

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

**Задание на самоподготовку (по каждому занятию):**

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в текущем План-конспекте, приложении, в учебниках, указанных на с.2 текущего План-конспекта.
2. Решить задания, указанные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.