1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия № 54
по дисциплине ООД.11 «Математика»

Раздел 13. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Тема № 13.2: «Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей»

<u>Лекционное занятие № 54</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

Лекционное занятие № 54 «Основы теории вероятностей»
по Теме № 13.2 «Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей»

Цель занятия: изучить со студентами основы теории вероятностей, применение теории вероятностей при решении профессиональных задач

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Основы теории вероятностей.
2. Практическое применение полученных знаний – решение прикладных задач на нахождение вероятности события, применение теории вероятностей при решении профессиональных задач.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основная учебная литература» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. — 13-е изд., стер. — 463 с., – Москва: Просвещение, 2025, ISBN 978-5-09-127034-1. —Текст: электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/497603 (печатный: ISBN 978-5-09-120157-4), 336-363 (части 7,8) **§ 65-70 (2012-2017,2025 годы издания**, глава XII).
2. Дорофеева, А. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2026. — 422 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-19044-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт], URL: https://urait.ru/bcode/583955,Тема 13, п.13.1-13.5.

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Основы теории вероятностей.</u>

<u>Понятие события.</u>

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

О п р е д е л е н и е 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

О п р е д е л е н и е 2. Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.
Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

Определение 3. Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.
Предположим, что в результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходными* испытаниями).
Например:
1) в испытании с бросанием игрального кубика существует шесть элементарных исходов: выпадение числа 1, выпадение числа 2, ..., выпадение числа 6;
2) при бросании монеты существует два элементарных события: появление орла и появление решки;
3) при изъятии одного шара из коробки, в которой находятся два белых и один чёрный шар, существует три элементарных исхода: изъятие любого из двух белых шаров и изъятие чёрного шара;
4) при одном бросании канцелярской кнопки существуют два элементарных исхода испытания: падение кнопки с касанием острия поверхности, на которую она падает, и падение плашмя — без касания острия поверхности падения.

Рассмотренные в каждом из примеров события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого) и *единственно возможны* (обязательно произойдёт одно из них). Однако в первых трёх примерах элементарные события являются *равновозможными* (у каждого из них шансы появиться равны), а в четвёртом примере (для большинства реальных кнопок) шансы названных двух событий различны.

Заметим, что на практике равновозможность событий иногда удаётся определить из соображений симметрии.

Кроме элементарных событий, в теории вероятностей рассматриваются и более сложные события. Например, при бросании игрального кубика может быть рассмотрено событие A — появление чётного числа, которое «распадается» на 3 элементарных события (появление числа 2, 4 или 6).

Комбинация событий. Противоположное событие.

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. *Суммой (объединением)* событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A+B$ (или $A \cup B$).

На рисунке 166 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A+B$.

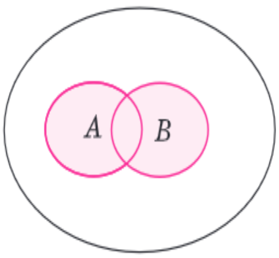

Рис. 166

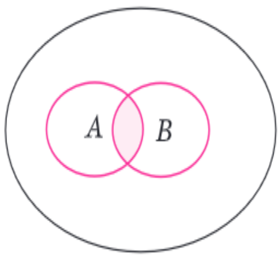

Рис. 167

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A+B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A+B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. *Произведением* (*пересечением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).

Рисунок 167 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A+B$ и AB.

Ответ Событие $A+B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. События A и B называют *равными* (*равносильными*) и пишут $A=B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A=B$.

Рассмотрим события A и $\overline{A}$ (читается «а с чертой»), связанные с одним испытанием.

О п р е д е л е н и е 4. Событие $\overline{A}$ называют *противоположным* событию A, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

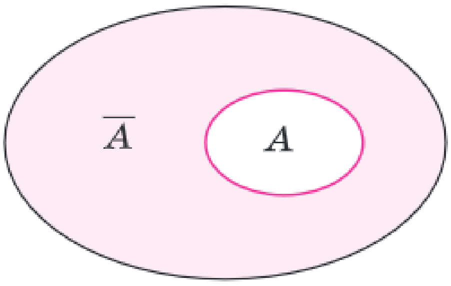

Рис. ***168***

Например, если событие A — выпадение чётного числа при бросании игральной кости, то $\overline{A}$ — выпадение нечётного числа; если A — попадание по мишени при одном выстреле, то $\overline{A}$ — непопадание (промах).
На рисунке 168 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\overline{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\overline{A}$ изображено закрашенной областью).

Вероятность события.

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся $(n - m)$ исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

О п р е д е л е н и е. *Вероятностью* $P\,(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P\,(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n. \qquad (1)$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

а также

$$P(V) = 0, \ P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задание:

1. Рассмотреть теоретические сведения, примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 65-67** Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ **1124 2)** (ответ 1/6), № **1126 2)** (ответ 1/31), **4)** (ответ 0), **6)** (ответ 3/31), **8)**(ответ 13/31), № **1127 2)** (ответ 1/3), **4)** (ответ 5/9), **6)** (ответ 7/9), **8)** (ответ 0) (с.345) Учебника по Алгебре.

Сложение вероятностей.

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Т е о р е м а 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A + B$ будут благоприятствовать $k + l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n}, \ P(B) = \frac{l}{n}, \ P(A + B) = \frac{k + l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

С л е д с т в и е. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Но $A + \overline{A} = U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A + \overline{A}) = P(U) = 1$, т. е. $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I с п о с о б. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9}.$$

II с п о с о б. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно, что $P(C)=\frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Независимые события. Умножение вероятностей.

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$.

Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9}>\frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B. Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или ненаступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n=36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m=1$. Таким образом, $P(AB)=\frac{1}{36}=$ $=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Часто о независимости событий удается судить не на основании формулы (1), а на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких *независимых испытаний* (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей).

Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}5$, $P(AB)=0{,}1$;

2) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(AB)=\frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1=P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}\neq\frac{2}{9}=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задание:

1. Рассмотреть теоретические сведения, примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 68-69** Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ **1134 2)** (ответ: 1/6), **1145 2)** (ответ: являются), **4)** (ответ: не являются), №**1146 2)** (ответ: не являются) (с.349, 353) Учебника по Алгебре.

Статистическая вероятность.

Определение вероятности, сформулированное в § 67, называется *классическим определением вероятности*. Оно применяется, когда теоретически удаётся выявить все элементарные равновозможные исходы испытания и определить благоприятствующие исследуемому событию исходы. В этом случае число элементарных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествознании, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, число возможных исходов которых необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 169) трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на остриё». Поэтому наряду с классическим на практике используется и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

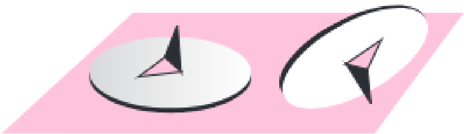

Рис. 169

Определение 1. *Относительной частотой* события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют *частотой* события A.

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1 Во время стрельбы по мишени было сделано 25 выстрелов и зарегистрировано 15 попаданий. Какова относительная частота попадания по мишени в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — попадание по мишени, произошло в 15 случаях, т. е. $M = 15$. Общее число испытаний (выстрелов) $N = 25$. По формуле (1) имеем $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ 0,6. ◁

Если проводить реальное испытание с подбрасыванием монеты и наблюдать за относительной частотой появления, например орла, в каждой серии испытаний, то можно заметить следующий факт: чем больше проводится испытаний, тем всё меньше относительная частота появления орла отличается от 0,5, т. е. от значения вероятности этого события в классическом понимании.

Этот факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.
Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005$.

Определение 2. *Статистической вероятностью* называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:
Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.
Проиллюстрируем ещё одним примером сформулированный закон больших чисел.

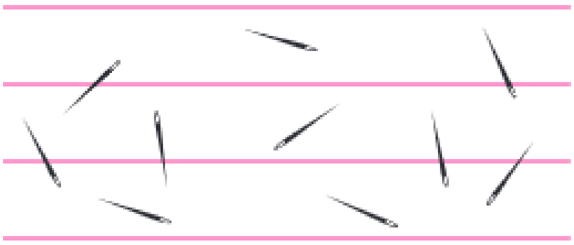

Рис. 170

На листе начерчены параллельные линии, расстояния между которыми равны длине некоторой иглы (рис. 170). Эта игла 100 раз бросается на расчерченный лист, и случаи её пересечения с любой из линий подсчитываются во втором столбце таблицы, где N — число бросаний, M — частота пересечения иглой линии, $\frac{M}{N}$ — относительная частота события в серии из N испытаний, подсчитанная с точностью до десятитысячных.

N	M	$W = \frac{M}{N}$
10	6	0,6
20	14	0,7
30	19	0,6333
40	26	0,65
50	33	0,66
60	40	0,6667
70	46	0,6571
80	54	0,675
90	59	0,6556
100	66	0,66

По результатам 100 бросков можно предположить, что значения дроби $\frac{M}{N}$ колеблются около числа

$\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$. Действительно ли вероятность рассматриваемого события равна $\frac{2}{3}$? При увеличении числа испытаний было обнаружено, что относительная частота этого события стабилизируется около числа, чуть меньшего, чем $\frac{2}{3}$. На основании понятия геометрической вероятности Бюффон доказал, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 336-363 (части 7-8) **§ 65-70** (**2012-2017,2025 годы издания**, глава XII), во 2-ом учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, п. 13.1-13.5 Темы 13.

Второй вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на на с. 336-363 (части 7,8) **§ 65-70** (**2012-2017,2025 годы издания**, глава XI), во 2-ом учебнике, указанном на с. 2 текущего документа, п. 13.1-13.5 Темы 13, Приложении.

Задание:

1. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 65-70** Учебника по Алгебре, указанного на с. 2 текущего документа.

2. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ 1043-1052, 1059-1066,1072-1076,1080-1086 (с.318-329) Учебника по Алгебре.

Заключительная часть занятия:

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку:

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в текущем План-конспекте, приложении, в учебниках, указанных на с.2 текущего План-конспекта.
2. Решить задания, указанные преподавателем.
3. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.