

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10
Тема: Решение комбинаторных задач

Цель занятия: приобрести навыки в решении комбинаторных задач, научиться находить вероятность событий с целью применения в процессе обучения, в дальнейшей профессиональной деятельности, а также в повседневной жизни.

Краткие теоретические сведения:

ПЕРЕСТАНОВКИ

Перестановками из n -элементов называются такие соединения, которые отличаются друг от друга только порядком расположения.

Обозначение числа перестановок из n -элементов:

$P_n = n!$, n – количество элементов,

$n!$ («эн факториал») = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

РАЗМЕЩЕНИЯ

1) Теорема о выборе двух элементов с учетом их порядка

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами:

$A_n^2 = n(n-1)$, где A_n^2 - число размещений из n элементов по 2.

2) Размещениями из m элементов по n называются такие соединения, которые содержат n элементов из множества m элементов и отличаются друг от друга либо самими элементами (состав), либо порядком их расположения.

Обозначение числа размещений: $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, m – общее количество элементов, n – количество отбираемых элементов.

СОЧЕТАНИЯ

В случаях, в которых порядок не важен, используем *сочетания*.

1) Теорема о выборе двух элементов без учета их порядка

Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\frac{n(n-1)}{2}$ способами:

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, где C_n^2 («цэ из эн по два») - **число сочетаний из n элементов по 2** (число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из n данных элементов).

2) Число сочетаний из n элементов по k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! \text{ («эн факториал») } = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

3) Формула для упрощения вычислений:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{15}^{13} = C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$$

4) Количество выборов n элементов из n элементов:

$$C_n^n = 1, \text{ т.к.}$$

такой выбор единственный – надо взять все множество целиком.

5) Количество выборов 0 элементов из n элементов:

$$C_n^0 = 1,$$

т.к. такой «выбор» единственный - ничего не выбираем.

Пример 1: Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега Спартакиады на 8 беговых дорожках?

Решение: Число способов равно числу перестановок из 8 элементов. По формуле числа перестановок находим, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

Пример 2: Группа 21 ТПС в 3-ем семестре изучают 13 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 3 различных предмета?

Решение: Любое расписание на один день, составленное из 3 различных предметов, отличается от другого либо предметами, либо порядком следования предметов. Значит, в этом примере речь идет о размещениях из 13 элементов по 3.

$$A_{13}^3 = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716.$$

Пример 3: Из 20 студентов учебной группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Решение: Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 20 элементов по 3.

Имеем:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)! \cdot 3!} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 3 \cdot 19 \cdot 20 = 1140.$$

Пример 4: Из ящика с инструментами, в котором лежит 9 напильников и 6 гаечных ключей, надо выбрать 3 напильника и 2 гаечных ключа. Сколькими способами можно мастер производственного обучения может сделать такой выбор?

Решение: Выбрать 3 напильника из 9 можно C_9^3 способами, а выбрать 2 гаечных ключа из 6 можно C_6^2 способами. Так как при каждом выборе напильников гаечные ключи можно выбрать C_6^2 способами, то сделать выбор инструментов, о которых говорится в задаче, можно $C_9^3 \cdot C_6^2$ способами.

Имеем:

$$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 2} = 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5 = 1260.$$

Типовые варианты:

Вариант №1

1. Сколькими способами из группы, включающей 25 студентов, можно выбрать актив группы в составе старосты, заместителя старосты и профорга?
2. В урне находятся 8 красных и 7 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара синие?
3. Даны пять цифр, например, {5,6,3,1,9}. Сколько трехзначных цифр можно составить из этих цифр?
4. Перед выпуском группа студентов в 30 человек обменялась фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?
5. Сколько можно провести различных плоскостей через 8 точек пространства, если никакие четыре не лежат в одной плоскости?
6. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 без повторений?
7. В партии из 26 деталей четыре бракованных. Из партии выбирают наугад 5 деталей. Найти вероятность того, что среди этих 5 деталей окажутся 2 бракованных.
8. В урне находятся 7 желтых и 6 зеленых шаров. Из урны вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

9. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность события – появление не более пяти очков.
10. Сколько всего игр должны провести 20 футбольных команд в однокруговом чемпионате?

Вариант №2

1. В урне находятся 3 белых и 9 черных шаров. Из урны одновременно вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?
2. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них - стандартные. Рабочий берет наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной.
3. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?
4. Даны семь цифр, например $\{5,2,0,6,3,1,9\}$. Сколько трехзначных цифр можно составить из этих цифр?
5. Произведя сто выстрелов, стрелок попал в цель 86 раз. Найдите частоту попадания в цель данного стрелка.
6. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?
7. Игральную кость подбрасывают один раз. Найти вероятность события - появление четного числа очков.
8. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 без повторений?
9. Сколькими способами можно распределить 14 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 7 человек?
10. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

Вариант №3

1. Восемь различных книг расставляются наугад на одной полке. Какова вероятность того, что три определенные книги окажутся на одной полке?
2. В урне находятся 7 красных и 6 синих шаров. Из урны вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они разного цвета.

3. В партии из 24 деталей пять бракованных. Из партии выбирают наугад 6 деталей. Найти вероятность того, что среди этих 6 деталей окажутся 2 бракованных.
4. Из группы, состоящей из 10 юношей и 8 девушек, выбирают по жребию 4 дежурных. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки?
5. В урне находятся 3 белых и 9 черных шаров. Из урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется черным?
6. В группе 26 студентов. Они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?
7. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?
8. Между перестановками цифр числа 12345 сколько таких, которые начинаются цифрой 1?, числом 12?, числом 123?
9. Группа студентов изучает 12 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 4 пары?
10. Автоколонна, состоящая из 30 автомашин должна выделить на уборочные работы бригаду из 12 автомашин. Сколькими способами можно составить бригаду?

Вариант №4

1. В группе 25 студентов. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов на профсоюзную конференцию, если все студенты члены профсоюза?
2. Сколькими способами можно из 20 рабочих выделить 6 человек для работы на некотором участке?
3. В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выделить караул, состоящий из 3 солдат и 1 офицера?
4. В урне находятся 7 красных и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что два наудачу вынутых шара окажутся черными.
5. На плоскости 8 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько всего треугольников можно построить с вершинами в этих точках?
6. Из 12 разведчиков надо послать в разведку четверых. Сколькими способами можно сделать выбор?

7. Игральную кость подбрасывают один раз. Найдите вероятность события – появление не менее пяти очков.
8. Сколькими способами могут разместиться четыре пассажира в четырехместном купе вагона?
9. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько при этом было сделано рукопожатий?
10. Сколькими способами можно выбрать 4 человек на 4 различные должности из 9 кандидатов.

Вариант №5

1. В партии из 20 лампочек 3 бракованных. Из партии выбирают наугад 5 лампочек. Найдите вероятность того, что среди этих пяти лампочек окажутся 2 бракованные.
2. Девять различных книг расставляются наугад на одной полке. Какова вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом?
3. В урне находятся 8 красных и 7 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные?
4. В партии из 20 деталей пять бракованных. Из партии выбирают наугад 4 детали. Найти вероятность того, что среди этих 4 деталей окажутся 3 бракованных.
5. В урне находятся 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара синие?
6. Среди 1000 новорожденных оказалось 512 мальчиков. Найдите частоту рождения мальчиков.
7. Группа студентов изучает 10 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 3 пары?
8. На станции имеется шесть запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них четыре поезда?
9. Сколькими способами можно рассадить 10 гостей по десяти местам за круглым праздничным столом?
10. Сколько сложных красок можно составить из семи основных цветов, если смешивать по три цвета?

1. Перестановки
2. Сочетания
3. Размещения

Содержание отчета включает в себя проведение расчетов, выводы по практической работе, ответы на контрольные вопросы.