ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

Тема: Решение прикладных задач на нахождение вероятности события

Цель занятия: закрепить практические навыки применения формул теории вероятностей при решении прикладных задач.

Краткие теоретические сведения

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события А определяется формулой

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь его исходами, несовместны.

Событие, противоположное событию A(то есть не наступление события A), обозначают $\overline{A}$. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A при условии B и обозначается $P_B(A)$.

События $A, B, C, \ldots$ называются ***независимыми в совокупности***, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или не наступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Если A и B – независимые события, то

$$P(B)-P_A(B)=P_{\overline{A}}(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ... \cdot P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A).$$

Пример 1. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Решение: а) Извлеченная стандартная деталь не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных 30 деталей (21+10 – 1= 30), причем среди них было 20 стандартных (21 – 1 = 20). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь, $P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

б) Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь, $P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Пример 2:В распределительном пункте (РП) установлено шесть автоматических выключателей. Нормальная работа потребителей обеспечивается при их исправном состоянии. При монтаже РП выключатели выбирались из партии объемом в 900 штук, в которой было 850 исправных выключателей и 50 неисправных. Найти вероятность исправной работы РП.

Решение: Общее число элементарных исходов равно числу сочетаний из 900 элементов по 6, то есть C_{900}^{6}.

Число исходов, благоприятствующих исправной работе распределительного пункта, то есть C_{850}^{6}.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = \frac{C_{900}^{6}}{C_{850}^{6}} \approx 0,74$.

Пример 3. В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов второго – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение: Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события A_1, A_2 и A_3, а их вероятности соответственно равны:

$$P(A_1) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4};\ P(A_2) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};\ P(A_3) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Тогда вероятность правильного ответа на билет $P(B)$, можно найти по формуле:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=0{,}125.$$

Пример 4. На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20и с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и % продукции этих предприятий, соответственно, имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь будет дефектна.

Решение: Обозначим: B – взятая наугад деталь дефектна; A_1 – деталь изготовлена на первом предприятии; A_2 – деталь изготовлена на втором предприятии; A_3 – деталь изготовлена на третьем предприятии. События A_1, A_2 и A_3 образуют полную группу несовместных событий и

$$P(A_1)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3};\ P(A_2)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9};\ P(A_3)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}.$$

Условные вероятности события B равны:

$P_{A_1}(B)=0{,}02;\ P_{A_2}(B)=0{,}04;\ P_{A_3}(B)=0{,}05.$

Тогда

$$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+P(A_3)\cdot$$
$$\cdot P_{A_3}(B)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}02+\frac{2}{9}\cdot 0{,}04+\frac{4}{9}\cdot 0{,}05=0{,}0378.$$

Задания для самостоятельного решения (типовые варианты)

1. Из букв «осмотрщик» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбранная буква будет: А – согласной; В – гласной; С – буква «о».
2. Отдел дефектоскопии ремонтно-локомотивного депо проверяет колесные пары на наличие дефектов, соблюдая нормы безопасных условий труда. Вероятность того, что колесная пара без дефектов, равна 0,7. Найти вероятность того, что из двух проверенных колесных пар только одна без дефектов.
3. В вагонное депо поступили вагоны, 60 % которых поставило первое предприятие, 25 % – второе и 15 % – третье. Какова вероятность того, что вагон изготовлен на первом или третьем предприятии.
4. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?
5. Для сигнализации об аварии на участке пути установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,85 для первого сигнализатора и 0,8 для второго.

Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Контрольные вопросы

1. Основные определения теории вероятностей
2. Совместные и несовместные события

Содержание отчета включает в себя выполненные задачи, выводы по работе, ответы на контрольные вопросы.