ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию

Цель: закрепить навыки построения по заданному условию закона распределения дискретной случайной величины

Оборудование: методические рекомендации.

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения.
2. Изучить схему решения задач.
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исходов испытания принимает то или иное значение (зависящее от случая).

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*, т.е возможные значения дискретной случайной величины образуют конечное множество.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, по которому каждому возможному значению x_1, x_2, x_3,… ставится в соответствие вероятность p1, p2, p3, … с которой случайная величина может принять это значение, причем сумма этих вероятностей равна 1.

Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически. Самый простой способ представления – табличный. При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности. Эта таблица называется рядом распределения. Для подсчета вероятностей появления событий при независимых испытаниях применяют формулу Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где n- число испытаний, m- количество выпавших событий, $q=1-p$ - это вероятность не наступления данного события в каждом испытании. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений при достаточно большом количестве испытаний.

Кроме табличного представления, ряд распределения можно представить графически, если по оси абсцисс отложить возможные значения дискретной случайной величины, а по оси ординат - соответствующие вероятности. Соединив полученные точки отрезками, получим ломаную, называемую многоугольником распределения вероятностей 6 Функцией распределения случайной величины X (обозначается F(x)) называется функция, определяемая соотношением $F(x) = P(X<x)$.

Пример 1:Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины x, числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

РЕШЕНИЕ: Обозначим A и B – события, заключающиеся в том, что и математика, и физика сданы на 5. Очевидно, возможные значения X:
0 - не физика и не математика сданы на 5,
1 – или физика, или математика сданы на 5
2 – и физика и математика сданы на 5.
Тогда вероятности возникновения этих событий находятся так:
P(A)= 0,8 – экзамен по математике сдан на 5
P(B)= 0,6 – экзамен по физике сдан на 5
$P(\overline{A})$= 1-0,8=0,2 – экзамен по математике не сдан на 5
$P(\overline{B})$= 1-0,6=0,4 – экзамен по физике не сдан на 5.

Если студент сдал оба экзамена на 5, то P(X=2)=P(A)*P(B)=0,8*0,6=0,48
Если студент на 5 только один из двух экзаменов, то P(X=1)=P(A)* $P(\overline{B})$+ $P(\overline{A})$*P(B)=0,8*0,4+0,2*0,6=0,44
Если студент не сдал ни один экзамен на 5, то P(X=0)= $P(\overline{A})$*$P(\overline{B})$=0,2*0,4=0,08
Полученные результаты сведём в таблицу, которая и является ответом:

X	0	1	2	Сумма вероятностей
P(A)	0.08	0.44	0.48	0,08+0,44+0,48=1

Пример 2: Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев.

РЕШЕНИЕ: Вероятность приживаемости яблони равна 0,8, т.е p=0,8, q=1-p=1-0,8=0,2

X – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев. Возможные значения: $x_1 = 0$ – ни один саженец не прижился; $x_2 = 1$ – один саженец прижился; $x_3 = 2$ – два прижились; $x_4 = 3$ – три прижились; $x_5 = 4$ – четыре прижились, $x_6 = 5$ – пять яблонь прижились Найдем вероятности для каждого случая по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}00032 = 0{,}00032$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{5-1} = 5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}0016 = 0{,}0064$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{5-2} = 10 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}008 = 0{,}0512$$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{5-3} = 10 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}04 = 0{,}2048$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^{5-4} = 5 \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^{5-5} = 1 \cdot 0{,}32768 \cdot 1 = 0{,}32768$

Внесем найденные значения в таблицу и получим ответ.

Ответ:

X	0	1	2	3	4	5	Сумма вероятностей
P(X)	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768	1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1: Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить закон распределения случайной величины X, числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна P(A), а по физике – P(B).

№ варианта	Задание для практической работы		№ варианта	Задание для практической работы	
	P(A)	P(B)		P(A)	P(B)
1	0,13	0,25	16	0,95	0,15
2	0,2	0,36	17	0,28	0,38
3	0,31	0,45	18	0,34	0,2
4	0,41	0,6	19	0,74	0,1
5	0,5	0,74	20	0,22	0,4
6	0,6	0,22	21	0,36	0,6
7	0,7	0,5	22	0,14	0,7
8	0,8	0,6	23	0,12	0,8
9	0,25	0,7	24	0,44	0,9
10	0,35	0,33	25	0,63	0,2
11	0,45	0,45	26	0,24	0,3
12	0,55	0,1	27	0,75	0,25
13	0,65	0,2	28	0,46	0,4
14	0,75	0,3	29	0,21	0,22
15	0,85	0,4	30	0,32	0,4

Задание 2: Стрелок делает по мишени 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Построить ряд распределения числа попаданий.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	p = 0,1	16	p = 0,85
2	p = 0,15	17	p = 0,9
3	p = 0,2	18	p = 0,95
4	p = 0,25	19	p = 0,52
5	p = 0,3	20	p = 0,64
6	p = 0,35	21	p = 0,72
7	p = 0,4	22	p = 0,84
8	p = 0,45	23	p = 0,43

9	p = 0,5	24	p = 0,37
10	p = 0,55	25	p = 0,7
11	p = 0,6	26	p =0,33
12	p = 0,65	27	p =0,28
13	p = 0,24	28	p =0,44
14	p = 0,75.	29	p =0,31
15	p = 0,8	30	p =0,14

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Перечислите виды случайных величин.
3. Какая случайная величина называется дискретной непрерывной?
4. Что представляет собой закон распределения дискретной случайной величины?
5. Перечислите способы задания закона распределения случайной величины.
6. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины?
7. Запишите формулу, по которой можно найти вероятность появления события при независимых испытаниях.

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

Расчет числовых характеристик случайной величины

Цель: приобрести практические навыки нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Оборудование: методические рекомендации

Время выполнения: 2 академических часа.

Ход занятия:

1. Изучить краткие теоретические сведения.
2. Изучить схему решения задач.
3. Оформить отчет по работе.

Содержание отчета:

1. Название практической работы, ее цель.
2. Выполненные задания в соответствии с данными своего варианта (не забывайте списывать само задание).
3. Ответы на контрольные вопросы
4. Вывод по практической работе.

Теоретическая часть:

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $x_1, x_2, \ldots x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots p_n$. Тогда математическое ожидание M(X) случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n .$$

Пример 1. Найти математическое ожидание, если ряд распределения имеет вид:

X	2	4	6	8
P(X)	0.4	0.2	0.1	0.3

РЕШЕНИЕ: $M(X)=2 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.3 = 4{,}6$

Ответ: 4,6

Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой постоянной, т.е. $M(C)=C$.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, т.е. $M(aX)=aM(X)$.
3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е. $M(X+У)= M(X)+M(У)$.
4. Для независимых случайных величин X и У: $M(X \cdot У)=M(X) \cdot M(У)$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boldsymbol{D(X) = M[X - M(X)]^2.}$$

Пример 2. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

X	1	2	5
P(X)	0,3	0,5	0,2

РЕШЕНИЕ: Математическое ожидание $M(X) = 1\cdot0{,}3+2\cdot0{,}5+5\cdot0{,}2 = 2{,}3$. Тогда $D(X) = (1 - 2{,}3)^2\cdot0{,}3 + (2 - 2{,}3)^2\cdot0{,}5 + (5 - 2{,}3)^2\cdot0{,}2 = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01$.

Ответ: M(X)=2,3, D(X)=2,01.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной случайной величины равно нулю, т.е. $D(C)=0$.
2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии в квадрате, т.е. $D(aX)=a^2D(X)$.
3. Дисперсия суммы нескольких случайных величин равно сумме их дисперсий, т.е. $D(X+У)= D(X)+D(У)$.
4. Для независимых случайных величин X и У: M(X·У)=M(X)·M(У).
5. Для вычисления дисперсии часто удобно пользоваться другой формулой: $\boldsymbol{D(X) = (X^2) - [M(X)]^2}$, т.е. дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

Корень квадратный из дисперсии случайной величины называется *средним квадратическим отклонением случайной величины*: $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{D(X)}}$.

Пример 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , которая задана следующим рядом распределения:

X	2	3	10
P(X)	0,1	0,4	0,5

РЕШЕНИЕ: Математическое ожидание $M(X) = 2\cdot0{,}1+3\cdot0{,}4+10\cdot0{,}5 = 6{,}4$.

Тогда $M(X^2) = 2^2\cdot0{,}1+3^2\cdot0{,}4+10^2\cdot0{,}5 = 54$.

Дисперсия $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2=54- (6{,}4)^2=13{,}04$. Далее находим среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} = 3{,}61$.

Ответ: $\sigma = 3{,}61$., D(X)=13,04.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задание 1:Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины **(2 способами)** и среднее квадратическое отклонение:

Вариант	Задание для практической работы						
1	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1
2	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,2	0,15	0,15	0,05	0,05	0,4
3	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1
4	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,25	0,3	0,15	0,15	0,1	0,05
5	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,15	0,15	0,1	0,1	0,05	0,45
6	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,1	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1
7	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,25	0,1	0,3	0,05	0,2	0,1
8	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,25	0,25	0,1	0,1	0,1	0,2
9	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,15	0,25	0,1	0,2	0,2	0,1
10	x_i	1	2	3	4	5	6

		p_i	0,15	0,35	0,15	0,15	0,1	0,1
11		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,1	0,3	0,15	0,25	0,1	0,1
12		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,05	0,05	0,4	0,15	0,15	0,2
13		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,4	0,4	0,05	0,05	0,05	0,05
14		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,15	0,25	0,35	0,05	0,1	0,1
15		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4
16		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,2	0,2	0,15	0,25	0,1	0,1
17		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,25	0,25	0,1	0,15	0,2	0,05
18		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,6	0,1	0,05	0,15	0,05	0,05
19		x_i	1	2	3	4	5	6
		p_i	0,5	0,15	0,1	0,15	0,05	0,05

20	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,15</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr></table>
21	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,15</td><td>0,4</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>
22	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,3</td><td>0,2</td></tr></table>
23	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,35</td><td>0,3</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,05</td><td>0,1</td></tr></table>
24	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,15</td><td>0,05</td><td>0,3</td><td>0,15</td></tr></table>
25	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,45</td><td>0,15</td></tr></table>
26	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr></table>
27	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,05</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,25</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table>
28	<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>p_i</td><td>0,25</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,25</td></tr></table>

29	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,25	0,15	0,1	0,1	0,2	0,2
30	x_i	1	2	3	4	5	6
	p_i	0,15	0,15	0,35	0,1	0,15	0,1

Задание 2: Торговый агент имеет пять телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что клиент сделает заказ равна p. Составьте ряд распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

№ варианта	Задание для практической работы	№ варианта	Задание для практической работы
1	p = 0,15	16	p = 0,8
2	p = 0,5	17	p = 0,95
3	p = 0,25	18	p = 0,65
4	p = 0,2	19	p = 0,1
5	p = 0,34	20	p = 0,3
6	p = 0,35	21	p = 0,4
7	p = 0,24	22	p = 0,42
8	p = 0,44	23	p = 0,75
9	p = 0,52	24	p = 0,85
10	p = 0,12	25	p = 0,6
11	p = 0,64	26	p =0,36
12	p = 0,32	27	p =0,28
13	p = 0,22	28	p =0,62
14	p = 0,7	29	p =0,45
15	p = 0,82	30	p =0,18

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Чему равно математическое ожидание числа появлений события в одном испытании?
3. Запишите две формулы нахождения дисперсии случайной величины.
4. Может ли дисперсия быть равной 0? В каком случае?
5. Дайте определение среднего квадратического отклонения. Может ли среднее квадратическое отклонение быть отрицательной величиной? (ответ аргументируйте).

Литература:

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования; под ред. В.А. Гусева. – 15-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020г.