1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения практического занятия
по дисциплине «Математика»

Раздел 8. Первообразная функции, ее применение.

Темы № 8.1-8.6, в том числе:

Тема № 8.1: «Первообразная функции. Правила нахождения первообразных»

Тема № 8.2: «Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань
2026

Практическое занятие «Нахождение первообразных функций, вычисление неопределенных, определенных интегралов»

Цель занятий: повторить со студентами понятие первообразной функции, формулы и правила интегрирования, нахождение первообразных функций, неопределенных, определенных интегралов

Основные вопросы:

1. Понятие первообразной функции. Формулы, правила интегрирования (правила нахождения первообразных). Первообразные некоторых элементарных функций (таблица первообразных). Физический, геометрический смысл неопределенного, определенного интегралов. Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление интегралов.
2. Практическое применение полученных знаний – решение задач (нахождение первообразных функций, неопределенных, определенных интегралов).

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. — 13-е изд., стер. — 463 с., – Москва: Просвещение, 2025, ISBN 978-5-09-127034-1. — Текст: электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/497603 (печатный: ISBN 978-5-09-120157-4), с. 291-297 (часть 6), 298-316 (часть 7) **§54-57 (2012-2017,2025 годы издания**, глава **X**).

Первый вопрос: <u>Понятие первообразной функции. Формулы, правила интегрирования (правила нахождения первообразных). Первообразные некоторых элементарных функций (таблица первообразных). Физический, геометрический смысл неопределенного, определенного интегралов. Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление интегралов.</u>

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины в **§ 54 (с. 291-293), § 55 (с. 294-296), § 56 (с. 297-301), § 57 (с. 301-304), § 58 (с. 304-309) Учебника по Алгебре.**

Первый вопрос: Понятие неопределённого интеграла.

Во многих заданиях по математическому анализу и в случаях его практического применения появляется задача, противоположная нахождению производной: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой была бы равна функции $f(x)$.

Такая функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$.

Понятие неопределённого интеграла

Если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x)+C$ (где C — произвольная постоянная) называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$, обозначается символом $\int f(x)\,dx$ и пишется: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

Пример:

1. $(x^2+x)' = 2x+1$, *поэтому* $\int (2x+1)\,dx = x^2+x+C$.
2. $(\sin x)' = \cos x$, *поэтому* $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Также сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике на с. 291-295 (часть 6) **§ 54, 55 (2012-2017,202 годы издания**, глава **X**).

Геометрический смысл определённого интеграла.

Сведения по данному вопросу представлены в 1-ом учебнике на с. 297 (часть 6), с.298-300 **§ 56 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Физический смысл определённого интеграла.

Физический смысл определённого интеграла заключается в том, что он позволяет посчитать любую величину, изменение которой задано функцией. Например:

– **Путь**, пройденный движущейся по прямой материальной точкой за отрезок времени, равен определённому интегралу скорости.

– **Количество** вступившего в реакцию вещества за промежуток времени равно определённому интегралу от скорости химического превращения.

– **Работа переменной силы**, величина которой есть непрерывная функция, действующая на отрезке, равна определённому интегралу от величины силы, взятому по этому отрезку.

– **Масса** неоднородного стержня на отрезке равна определённому интегралу от плотности.

Таким образом, определённый интеграл даёт возможность найти суммарный путь, зная закон, по которому изменялась скорость, или рассчитать работу переменной силы.

Сведения по данному вопросу также представлены в 1-ом учебнике
на с. 291 (часть 6) **§ 54 (2012-2017,2024 годы издания**, глава **X**

Теорема. *Если $F(x)$ — первообразная функция для непрерывной функции $y=f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$, то имеет место формула:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Это *формула Ньютона–Лейбница* — основная формула интегрального исчисления, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралом. Она читается так:

Определенный интеграл — это разность значений любой первообразной функции для $f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Можно отметить разницу между определенным и неопределенным интегралами: определенный интеграл — это число, а неопределенный интеграл — это функция.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ (*свойство аддитивности*).

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6. Если функция $f(x) \geq 0$ всегда на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^a f(x)dx \geq 0.$$

7. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Геометрический смысл определенного интеграла: он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$; $x = b$; $y = 0$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если функция положительна, и со знаком минус, если функция отрицательна (рис. 2.19).

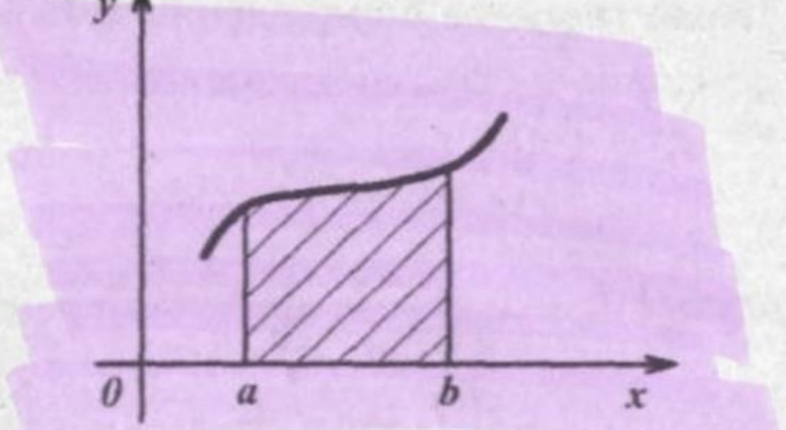


Рис. 2.19. *Геометрическая интерпретация определенного интеграла*

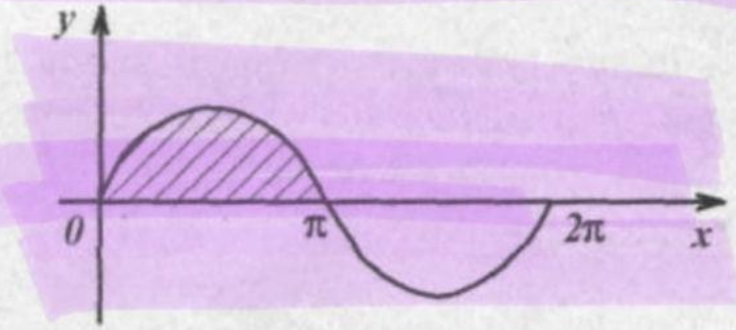
Применение определенного интеграла для решения прикладных задач

▸ *Площадь плоской фигуры*

Площадь криволинейной трапеции

◆ Пример 2.102

Определить площадь полуволны синусоиды.

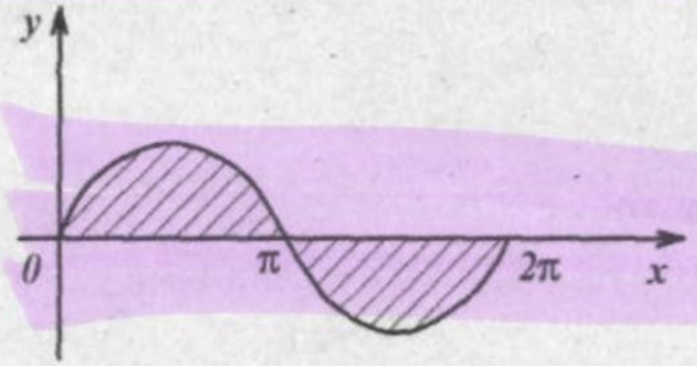


Решение:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2\ (\textit{кв. ед.}).$$

◆ Пример 2.103

Определить площадь полной синусоиды.



Решение:

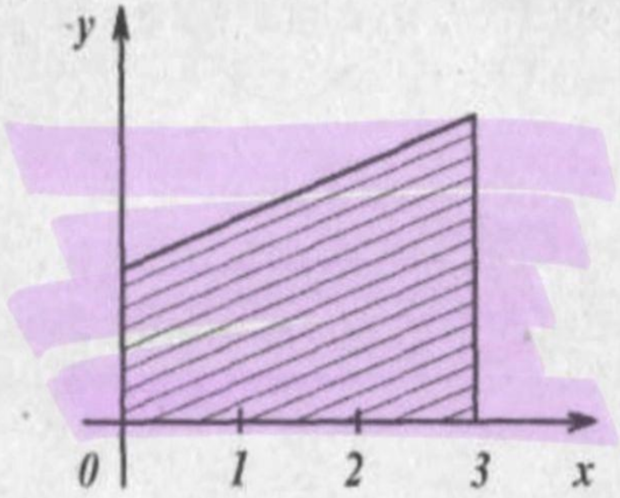
$$S=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=-(+1-1)=0.$$

Ответ: $S=0$.

◆ Пример 2.105

Определить площадь фигуры, образованной функцией $y = 2x + 5$ и осью при изменении x от 0 до 3.

Решение:



$$S = \int_0^3 (2x+5)dx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 + 5x\Big|_0^3 = x^2\Big|_0^3 + 5x\Big|_0^3 = 9 + 15 =$$

$= 24$ (*кв. ед.*).

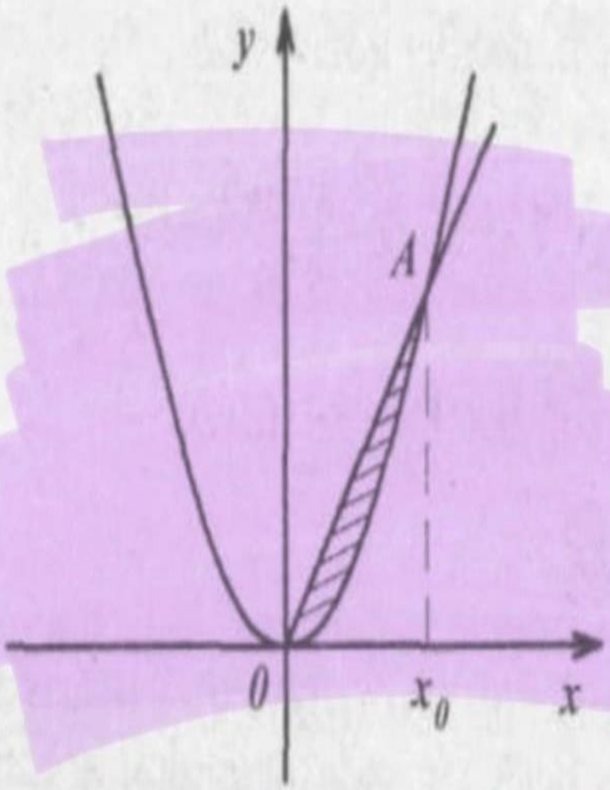
◆ Пример 2.106

Вычислить площадь между линиями $y_1 = x^2$ и $y_2 = 3x$.

Решение:

Искомая площадь — это разность между площадью прямоугольного треугольника $0Ax_0$ и площадь криволинейного треугольника, ограниченного сверху участком параболы.

$$S = \int_0^{x_0} 3x dx - \int_0^{x_0} x^2 dx.$$



Точку x_0 — абсциссу точки пересечения графиков находим из уравнения $x^2 = 3x \Rightarrow x_0 = 3$.

$$S = \int_0^3 3x dx - \int_0^3 x^2 dx = 3\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Определенный интеграл — это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Интегральная сумма $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i — произвольная точка существующего отрезка.

Расчёт суммы большого количества чисел. Для компактной записи используют знак суммы (сигму, Σ). Под знаком указывают индекс, его начальное и конечное значения.

Сигма формула: история и основы математической нотации

Сигма-нотация (Σ) — одно из самых элегантных изобретений в математической символике, позволяющее кратко записывать суммирование последовательностей чисел. Этот символ, восемнадцатая буква греческого алфавита, был введен в математический обиход Леонардом Эйлером в XVIII веке, хотя концепция суммирования рядов существовала задолго до формализации обозначений.

Классическая запись сигма-формулы выглядит так:

```
∑_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n
```

где:

- Σ — символ суммирования
- i — индекс суммирования (переменная)
- m — нижний предел (начальное значение индекса)
- n — верхний предел (конечное значение индекса)
- a_i — слагаемое, зависящее от индекса i

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=k}^{p}\sum_{j=m}^{n} a_{ij} = \sum_{i=k}^{p}(a_{im} + a_{i,m+1} + \ldots + a_{in}) =$$

$$= a_{km} + a_{k,m+1} + \ldots + a_{kn} +$$

$$+ a_{k+1,m} + a_{k+1,m+1} + \ldots + a_{k+1,n} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{pm} + a_{p,m+1} + \ldots + a_{pn} =$$

$$= \sum_{i=k}^{p} a_{im} + \sum_{i=k}^{p} a_{i,m+1} + \ldots + \sum_{i=k}^{p} a_{in} =$$

$$= \sum_{j=m}^{n}\left(\sum_{i=k}^{p} a_{ij}\right) = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=k}^{p} a_{ij}.$$

$$\sum_{i=8}^{11} i^3 = 8^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3$$

$$S = \sum_{i=m}^{n}(2 * i)$$

<u>Практическая часть.</u>

Третий вопрос: <u>Применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел.</u>

<u>Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла.</u>

формула для вычисления объёма тела с помощью интеграла:

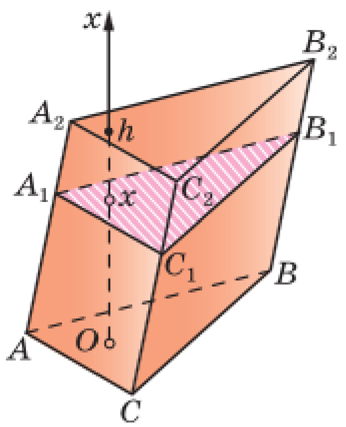
$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Указанная формула называется основной формулой для вычисления объёмов тел.

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.125-126 (часть 1), **§ 3, п.56** (**2024,2019 годы издания**, глава **V**), с.165-167, **§ 3,п.78** (**2012-2014 годы издания,** глава **VII**).

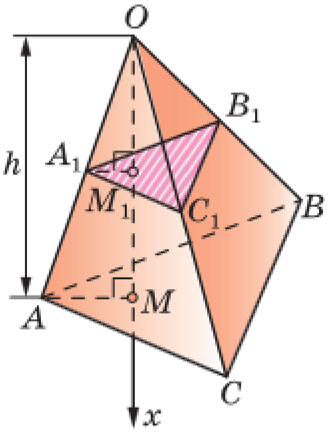
<u>Объём наклонной призмы.</u>

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h S dx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$



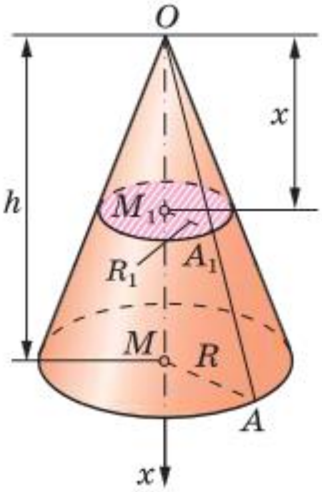
<u>Объём пирамиды.</u>

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S \cdot h.$$



<u>Объём конуса.</u>

$$V=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2\,dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$



<u>Объём шара.</u>

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — координата точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \quad (1)$$

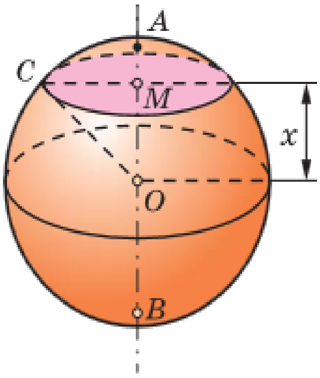


Рис. 149

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

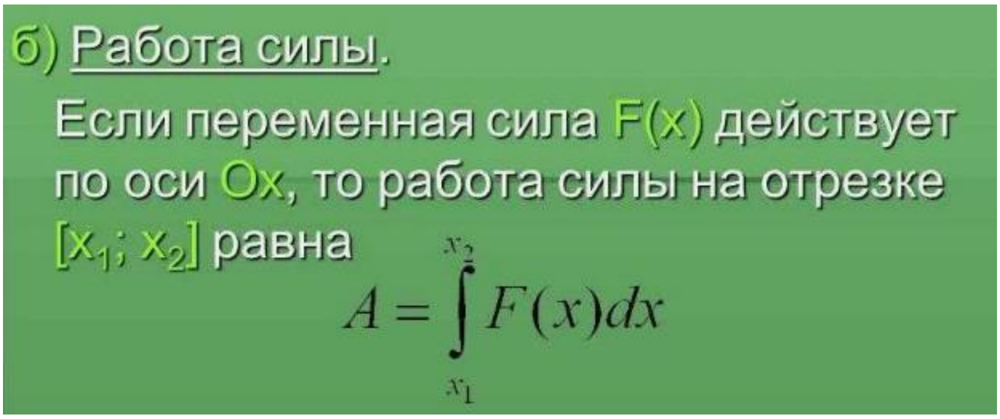
Применение определённого интеграла для вычисления физических величин.

Физический смысл определённого интеграла заключается в том, что он позволяет посчитать любую величину, изменение которой задано функцией. Например:

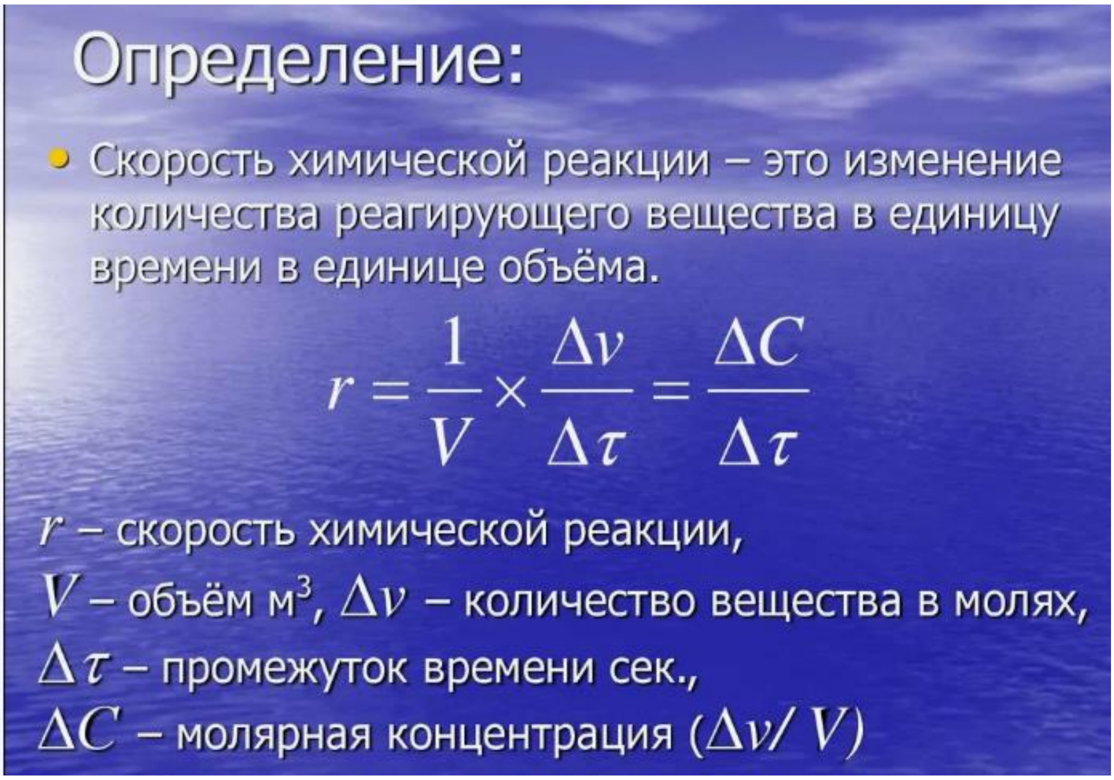
– **Путь**, пройденный движущейся по прямой материальной точкой за отрезок времени, равен определённому интегралу скорости.

– **Масса** неоднородного стержня на отрезке равна определённому интегралу от плотности.

– **Работа переменной силы**, величина которой есть непрерывная функция, действующая на отрезке, равна определённому интегралу от величины силы, взятому по этому отрезку.



– **Количество** вступившего в реакцию вещества за промежуток времени равно определённому интегралу от скорости химического превращения.



Таким образом, определённый интеграл даёт возможность найти суммарный путь, зная закон, по которому изменялась скорость, или рассчитать работу переменной силы.

Сведения по данному вопросу также представлены в 1-ом учебнике на с. 291 (часть 6) **§ 54** (**2012- 2017,2024 годы издания**, глава **X**).

Второй вопрос: <u>Практическое применение полученных знаний – решение задач (нахождение первообразных функций, неопределенных, определенных интегралов).</u>

Задание:

1. Повторить теоретические, практические сведения по следующим вопросам:

- Понятие первообразной функции. **§ 54 (с. 291-292) Учебника по Алгебре.**
- Нахождение первообразных функций. **§ 55 (с.294-295) Учебника по Алгебре.**
- Неопределенный и определенный интегралы.
- Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. **§ 56,57,58 (с.297-308), Учебника по Алгебре.**

2. Рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных в **§ 54, § 55, § 56, § 57, § 58** 1-ого учебника раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины «Математика» (с. 291-309 Учебника по алгебре).

3. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

1. Найти все первообразные функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$
2. Найти все первообразные функции $f(x) = 10x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 8$

3. Найти все первообразные функции $f(x) = x^4 - 2x + 4$

4. Решить задачи, заданные преподавателем (из приведенного ниже списка):

№ 985 **(с. 293)**, 988 **(с. 295)**, 1000, 1001 **(с. 301),** 1004 **(с.303),** 1034 **(с.315),** 1036 **(с.318) Учебника по Алгебре.**