1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения вводного занятия по теме 1.5 (к практическим занятиям № 5-6)
по дисциплине «Информатика»

Раздел 1. «Информация и информационная деятельность человека»

Тема 1.5:
«Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики.»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2023

Вопросы занятия:

1. Основные понятия алгебры логики: высказывание, логические операции, построение таблицы истинности логического выражения.
2. Графический метод алгебры логики.
3. Понятие множества. Мощность множества. Операции над множествами.
4. Решение логических задач графическим способом.

Время проведения занятия – 1 час

Первый вопрос: Основные понятия алгебры логики: высказывание, логические операции, построение таблицы истинности логического выражения.

Алгебра логики. Высказывания.

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами**.** Многие математические объекты (целые и рациональные числа, многочлены, векторы, множества) вы изучаете в школьном курсе алгебры, где знакомитесь с такими разделами математики, как алгебра чисел, алгебра многочленов, алгебра множеств и т. д.

Для информатики важен раздел математики, называемый алгеброй логики; объектами алгебры логики являются высказывания.

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Например, относительно предложений «Великий русский учёный М. В. Ломоносов родился в 1711 году» и «Two plus six Is eight» можно однозначно сказать, что они истинны. Предложение «Зимой воробьи впадают в спячку» ложно. Следовательно, эти предложения являются высказываниями.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием.

Например, предложение «Это предложение является ложным» не является высказыванием, так как относительно него нельзя сказать, истинно оно или ложно, без того, чтобы не получить противоречие. Действительно, если принять, что предложение истинно, то это противоречит сказанному. Если же принять, что предложение ложно, то отсюда следует, что оно истинно.

Относительно предложения «Компьютерная графика — самая интересная тема в курсе школьной информатики» также нельзя однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

Например, не являются высказываниями такие предложения, как: «Запишите домашнее задание», «Как пройти в библиотеку?», «Кто к нам пришёл?».

Высказывания могут строиться с использованием знаков различных формальных языков — математики, физики, химии и т. п.

Примерами высказываний могут служить:

«Na — металл» (истинное высказывание);

«Второй закон Ньютона выражается формулой F=m•a» (истинное высказывание);

«Периметр прямоугольника с длинами сторон a и b равен a • b» (ложное высказывание).

Не являются высказываниями числовые выражения, но из двух числовых выражений можно составить высказывание, соединив их знаками равенства или неравенства. Например:

«3 + 5 = 2 • 4» (истинное высказывание);

«II + VI > VIII» (ложное высказывание).

Не являются высказываниями и равенства или неравенства, содержащие переменные. Например, предложение «X < 12» становится высказыванием только при замене переменной каким-либо конкретным значением: «5 < 12» — истинное высказывание; «12 < 12» — ложное высказывание.

Обоснование истинности или ложности высказываний решается теми науками, к сфере которых они относятся. Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Её интересует только то, истинно или ложно данное высказывание. В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют логическими переменными. При этом если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (А = 1), а если ложно — нулём (Б = 0). 0 и 1, обозначающие значения логических переменных, называются логическими значениями.

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

Оперируя логическими переменными, которые могут быть равны только 0 или 1, алгебра логики позволяет свести обработку информации к операциям с двоичными данными. Именно аппарат алгебры логики положен в основу компьютерных устройств хранения и обработки информации. С применением элементов алгебры логики вы будете встречаться и во многих других разделах информатики.

Логические функции. Проверка истинности логических высказываний.

Высказывания бывают простые и сложные. Высказывание называется простым, если никакая его часть сама не является высказыванием. Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Рассмотрим основные логические операции, определённые над высказываниями. Все они соответствуют связкам, употребляемым в естественном языке:

Конъюнкция: и, а, но, хотя

Дизъюнкция: или

Инверсия: не, неверно,что

Конъюнкция — логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Для записи конъюнкции используются следующие знаки: ∧ , •, И, &.

Например: A ∧ B, A • B, A И B, A & B.

Конъюнкцию можно описать в виде таблицы, которую называют таблицей истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Иначе конъюнкцию называют логическим умножением.

Дизъюнкция — логическая операция, которая каждым двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Для записи дизъюнкции используются следующие знаки: ∨ , |, ИЛИ, +. Например: A∨ B, A|B, A ИЛИ Б, A+Б.

Дизъюнкция определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Иначе дизъюнкцию называют логическим сложением.

Инверсия — логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Для записи инверсии используются следующие знаки: НЕ, ¬, ¯. Например: НЕ А, ¬А.

Инверсия определяется следующей таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Инверсию иначе называют логическим отрицанием.

Отрицанием высказывания «У меня дома есть компьютер» будет высказывание «Неверно, что у меня дома есть компьютер» или, что в русском языке то же самое, «У меня дома нет компьютера». Отрицанием высказывания «Я не знаю китайский язык» будет высказывание «Неверно, что я не знаю китайский язык» или, что в русском языке одно и то же, «Я знаю китайский язык». Отрицанием высказывания «Все юноши 9-х классов — отличники» является высказывание «Неверно, что все юноши 9-х классов — отличники», другими словами, «Не все юноши 9-х классов — отличники».

Таким образом, при построении отрицания к простому высказыванию либо используется речевой оборот «неверно, что ...», либо отрицание строится к сказуемому, тогда к соответствующему глаголу добавляется частица «не».

Любое сложное высказывание можно записать в виде логического выражения — выражения, содержащего логические переменные, знаки логических операций и скобки. Логические операции в логическом выражении выполняются в следующей очерёдности: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция. Изменить порядок выполнения операций можно с помощью расстановки скобок.

Логические операции имеют следующий приоритет: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Логическая функция - это функция, в которой переменные принимают только два значения: *логическая единица* или *логический ноль*. Истинность или ложность сложных суждений представляет собой функцию истинности или ложности простых. Эту функцию называют *булевой функцией суждений $f(a, b)$*.

Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записывается набор аргументов, а в правой части - соответствующие значения логической функции. При построении таблицы истинности необходимо учитывать порядок выполнения логических операций.

Для логического выражения можно построить таблицу истинности, показывающую, какие значения принимает выражение при всех наборах значений входящих в него переменных. Для построения таблицы истинности следует:

1. подсчитать n — число переменных в выражении;
2. подсчитать общее число логических операций в выражении;

3. установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов;
4. определить число столбцов в таблице: число переменных + число операций;
5. заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции в соответствии с последовательностью, установленной в п. 3;
6. определить число строк в таблице (не считая шапки таблицы) m = 2n;
7. выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой целый ряд n—разрядных двоичных чисел от 0 до 2^n - 1;
8. провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Построим таблицу истинности для логического выражения A ∨ A & B. В нём две переменные, две операции, причём сначала выполняется конъюнкция, а затем — дизъюнкция. Всего в таблице будет четыре столбца:

A	B	A&B	A ∨ A&B

Наборы входных переменных — это целые числа от 0 до 3, представленные в двухразрядном двоичном коде: 00, 01, 10, 11. Заполненная таблица истинности имеет вид:

A	B	A&B	A ∨ A&B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Последний столбец (результат) совпал со столбцом A. В таком случае говорят, что логическое выражение A ∨ A & B равносильно логическому выражению A.

Законы алгебры логики. Упрощение формул.

1. **Переместительный (коммутативный) закон**
   - для логического умножения:
     A & B = B & A;
   - для логического сложения:
     A ∨ B = B ∨ A.

2. Сочетательный (ассоциативный) закон

- для логического умножения:

  $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$;

- для логического сложения:

  $(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$.

При одинаковых знаках операций скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

3. Распределительный (дистрибутивный) закон

a. для логического умножения:

   $A \& (B \lor C) = (A \& B) \lor (A \& C)$;

b. для логического сложения:

   $A \lor (B \& C) = (A \lor B) \& (A \lor C)$.

4. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

5. Закон исключения третьего

a. для логического умножения:

   $A \& \overline{A} = 0$;

b. для логического сложения:

   $A \lor \overline{A} = 1$.

Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

6. Закон повторения

a. для логического умножения:

$A \& A = A$;

b. для логического сложения:

$A \lor A = A$.

7. Законы операций с 0 и 1

a. для логического умножения:

$A \& 0 = 0$; $A \& 1 = A$;

b. для логического сложения:

$A \lor 0 = A$; $A \lor l = l$.

8. Законы общей инверсии

a. для логического умножения:

$$\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B};$$

b. для логического сложения:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B}.$$

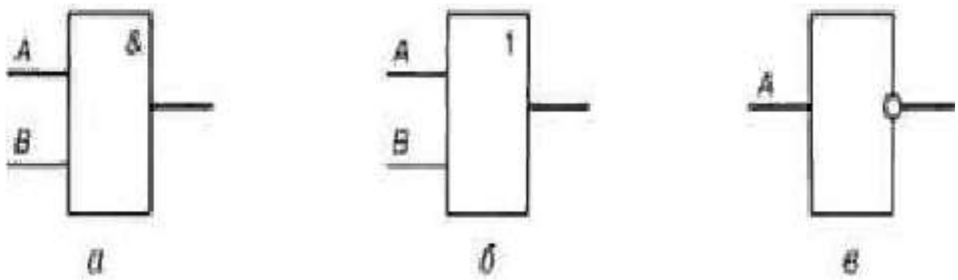
Законы алгебры логики могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Логические элементы. Логические схемы.

Алгебра логики — раздел математики, играющий важную роль в конструировании автоматических устройств, разработке аппаратных и программных средств информационных и коммуникационных технологий.

Вы уже знаете, что любая информация может быть представлена в дискретной форме — в виде фиксированного набора отдельных значений. Устройства, которые обрабатывают такие значения (сигналы), называются дискретными. Дискретный преобразователь, который выдаёт после обработки двоичных сигналов значение одной из логических операций, называется логическим элементом.

На рис. 1 приведены условные обозначения (схемы) логических элементов, реализующих логическое умножение, логическое сложение и инверсию:

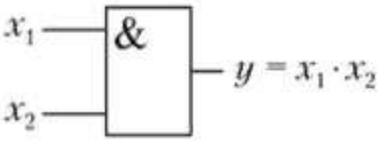


Логический элемент И (конъюнктор) реализует операцию логического умножения (рис. 1а). Единица на выходе этого элемента появится только тогда, когда на всех входах будут единицы.

Логический элемент ИЛИ (дизъюнктор) реализует операцию логического сложения (рис. 1 б). Если хотя бы на одном входе будет единица, то на выходе элемента также будет единица.

Логический элемент НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания (рис. 1в). Если на входе элемента 0, то на выходе 1 и наоборот.

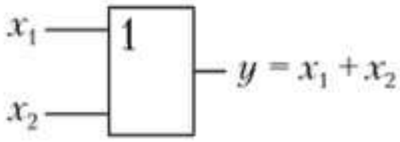
На рис. 2— 4 показаны условные изображения, принятые для устройств, выполняющих логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», и соответствующие таблицы истинности.



а

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

б



а

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

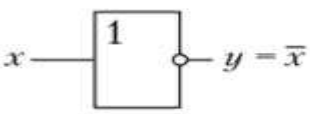
б

Рис. 3. **Устройство, выполняющее операцию логического сложения (дизъюнкции) двух логических аргументов:**

а — условное обозначение; *б* — таблица истинности

Рис. 2. **Устройство, выполняющее операцию логического умножения (конъюнкции) двух логических аргументов:**

а — условное обозначение; *б* — таблица истинности



а

x	$y = \overline{x}$
1	0
0	1

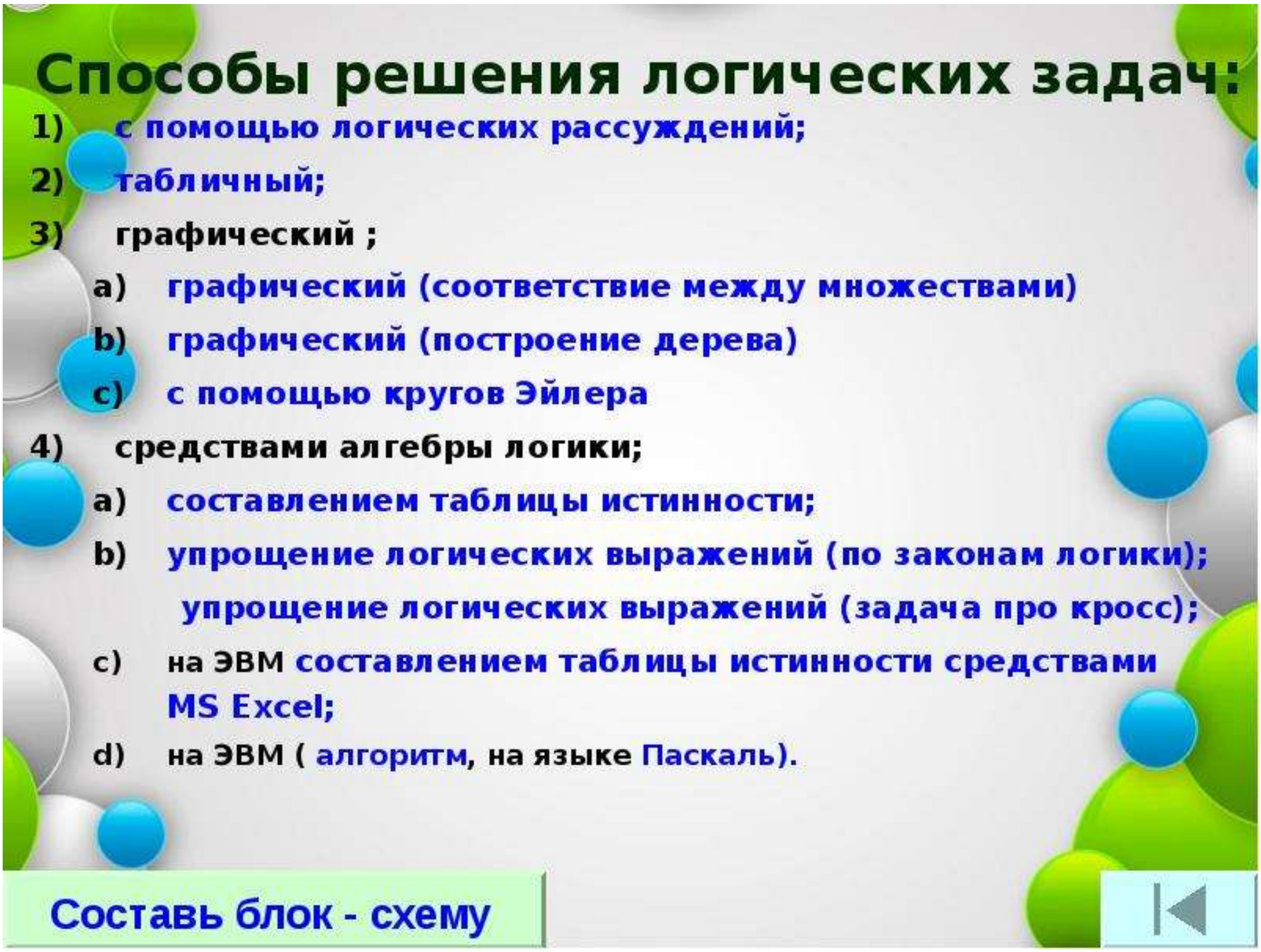
б

Рис. 4. **Устройство, выполняющее логическую операцию отрицания (инверсии):**

а — условное обозначение; *б* — таблица истинности

Компьютерные устройства, производящие операции над двоичными числами, и ячейки, хранящие данные, представляют собой электронные схемы, состоящие из отдельных логических элементов.

Второй вопрос: <u>Графический метод алгебры логики.</u>


Способы решения логических задач:
1) с помощью логических рассуждений;
2) табличный;
3) графический ;
a) графический (соответствие между множествами)
b) графический (построение дерева)
c) с помощью кругов Эйлера
4) средствами алгебры логики;
a) составлением таблицы истинности;
b) упрощение логических выражений (по законам логики);
упрощение логических выражений (задача про кросс);
c) на ЭВМ составлением таблицы истинности средствами MS Excel;
d) на ЭВМ (алгоритм, на языке Паскаль).
Составь блок - схему

Табличный метод

Задача. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	**1**	**0**	Даша	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	Анфиса	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	Лариса	**0**	**0**	**1**

! В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!

Третий вопрос: **Понятие множества. Мощность множества. Операции над множествами.**

Понятие множества.

Определение 1. *Множеством* называется совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому – либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами.*

Обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \dots, X, Y, \dots$, а их элементы обозначаются малыми буквами $a, b, \dots, x, y$.

Определение 1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

Множество можно задать пересечением и описанием.

Пример: $A=\{2,4,10\}$; $X=\{x: 0\le x\le 3\}$.

Определение 1.2.Множеством *A* называется подмножеством *B*, если каждый элемент множества *A* является элементом множества*B*. Символически это обозначают так: $A\subset B$ (*A* содержится в*B*).

Определение 1.3.Два множества *A* и*B* называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (*A =B)*.

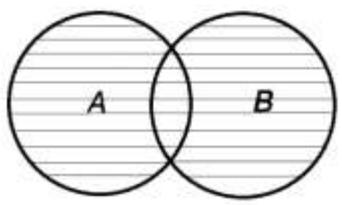
Операции над множествами.

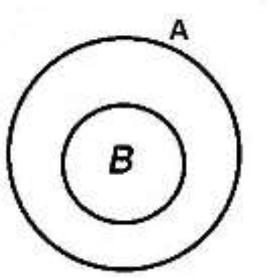
Определение 1.4.Объединением или суммой множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств.

Объединение множеств обозначают $A\cup B$ (или $A+B$). Кратко можно записать $A\cup B=\{x: x\in A\ или\ X\in B\}$.

$A\cup B=A+B$

Если $B\subset A$, то $A+B=A$



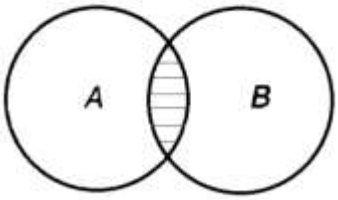


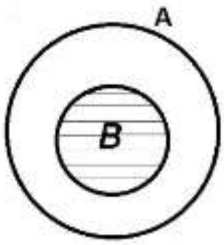
Определение 1.5.Пересечением или произведением множеств *A* и*B* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству *A* и множеству*B*одновременно. Пересечение множеств обозначают $A\cap B$ (или$A\cdot B$). Кратко можно записать:

$A\cap B=\{x: x\in A или X\in B\}$.

$A\cap B=A\cdot B$

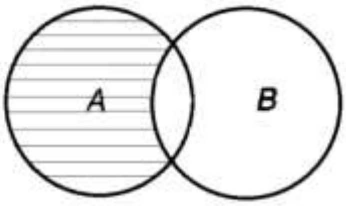
Если$B\subset A$, то$A\cdot B=B$

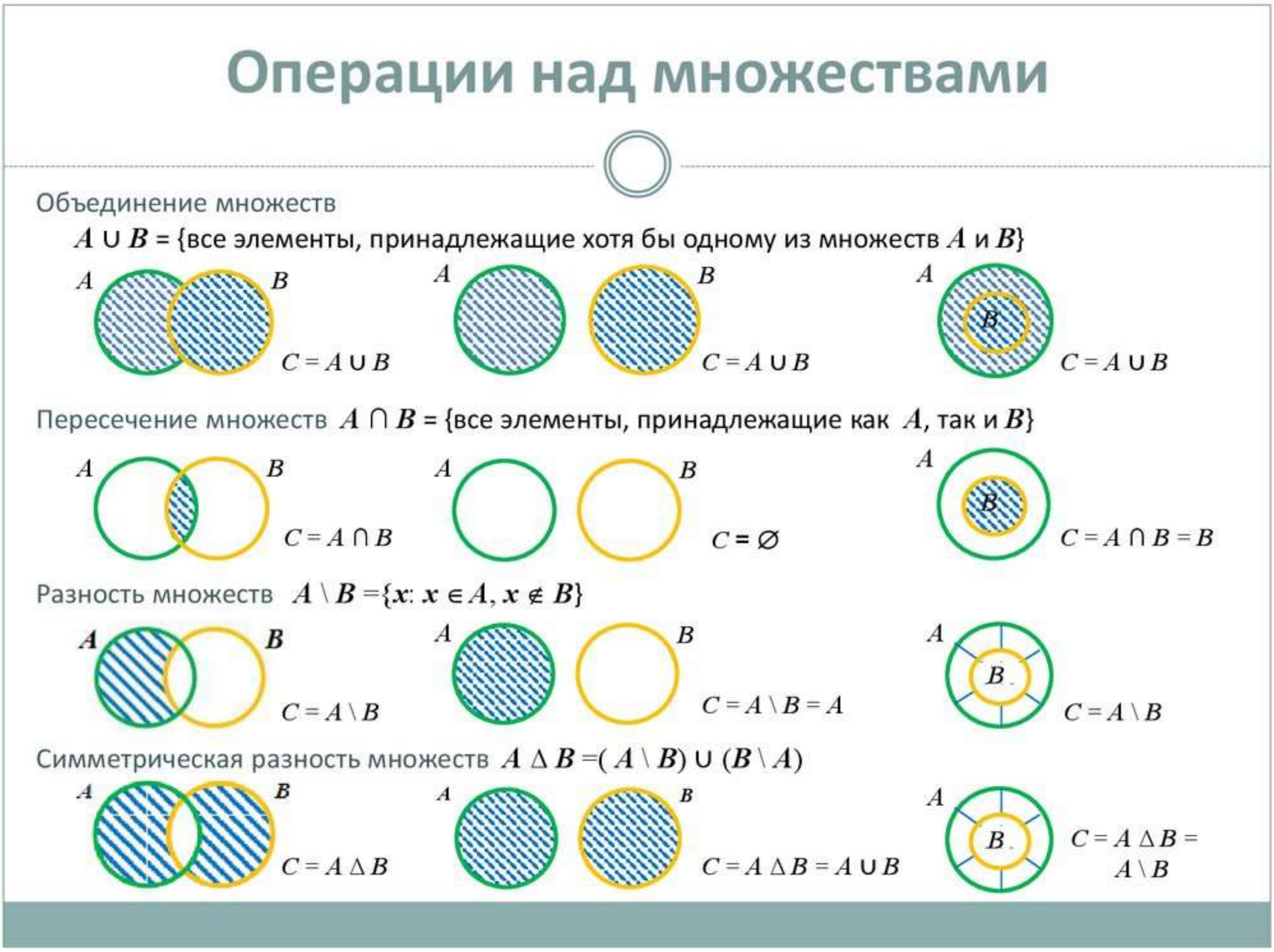


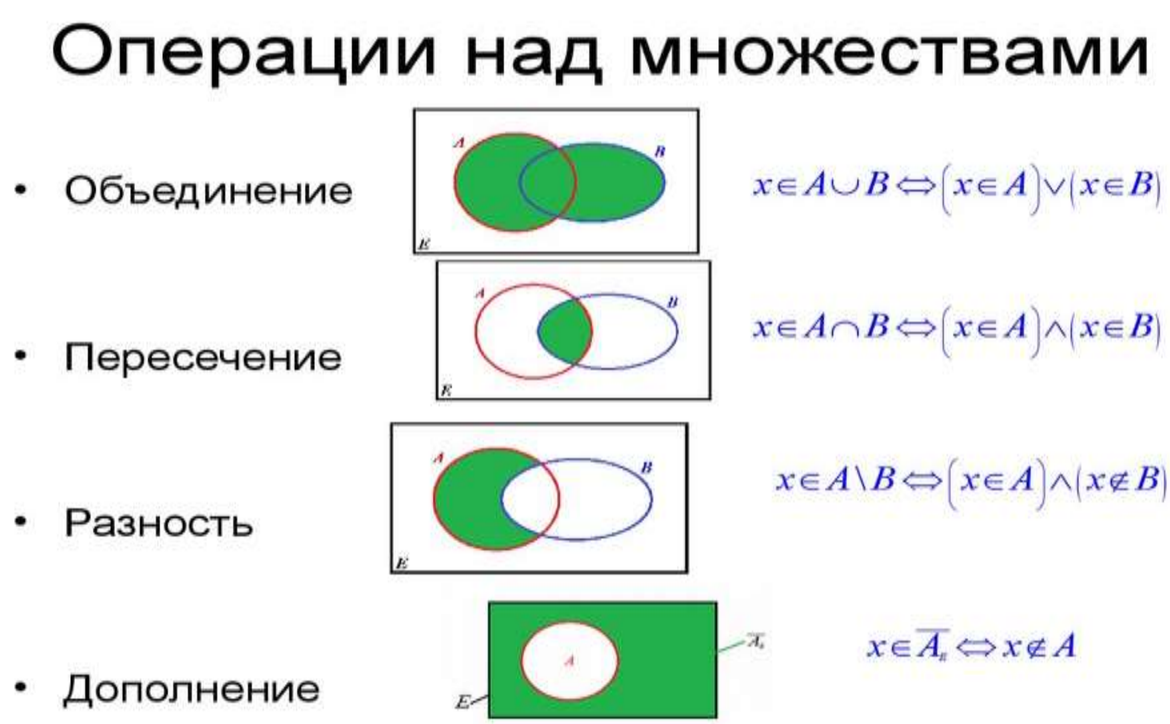


Определение 1.6. Разностью множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества Aи не является элементом множества B. Разность множеств обозначают A/B. По определению A/B = $\{x: x□\ A\ или\ X□\ B\}$.

$A/B = A – B$




Операции над множествами
Объединение множеств
$A \cup B$ = {все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A и B}
A
B
$C = A \cup B$
A
B
$C = A \cup B$
A
B
$C = A \cup B$
Пересечение множеств $A \cap B$ = {все элементы, принадлежащие как A, так и B}
A
B
$C = A \cap B$
A
B
$C = \varnothing$
A
B
$C = A \cap B = B$
Разность множеств $A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$
A
B
$C = A \setminus B$
A
B
$C = A \setminus B = A$
A
B
$C = A \setminus B$
Симметрическая разность множеств $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
A
B
$C = A \Delta B$
A
B
$C = A \Delta B = A \cup B$
A
B
$C = A \Delta B = A \setminus B$


Операции над множествами
• Объединение
$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$
• Пересечение
$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$
• Разность
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$
• Дополнение
$x \in \overline{A}_E \Leftrightarrow x \notin A$

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ - множество натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ - множество целых чисел.

$Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ - множество рациональных чисел.

R– множество действительных чисел.

Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333$ … – рациональные числа.

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Так, $\sqrt{2}$ = 1,41421356...; π= 3,14159265.... – иррациональное число.

K– множество комплексных чисел (вида $Z=a+bi$)

$R \subset K$

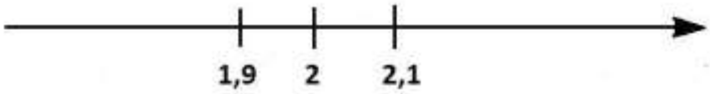
Определение 1.7. ε – окрестностью точки x_0 называется симметричный интервал ($x_0 - \varepsilon$; $x_0 + \varepsilon$), содержащий точку x_0.

В частности, если интервал ($x_0 - \varepsilon$; $x_0 + \varepsilon$), то выполнятся неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего означает попадание точки x в ε – окрестность точки x_0.

Пример 1:

$x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,1$.

(2 – 0,1; 2 + 0,1) или (1,9; 2,1) – ε– окрестность.



$|x - 2| < 0,1$

$-0,1 < x - 2 < 0,1$

$2 - 0,1 < x < 2 + 0,1$

$1{,}9 < x < 2{,}1$

Пример 2:

A– множество делителей 24;

B– множество делителей 18.

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

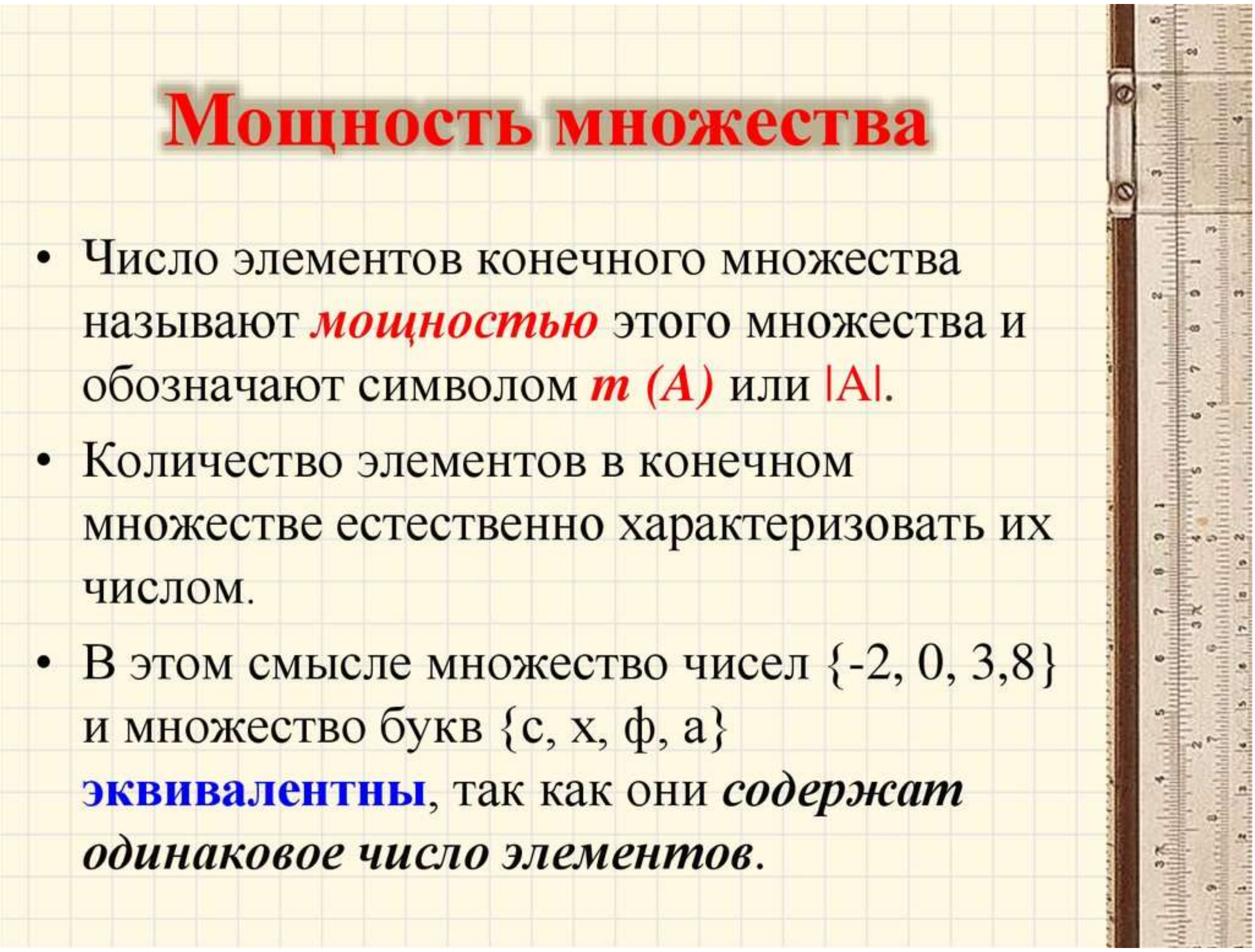
$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

$A \cup B = A + B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$

$A \cap B = A \cdot B = \{1, 2, 3, 6\}$

$A / B = A - B = \{4, 8, 12, 24\}$

Мощность множества.



Количество подмножеств

Если мощность множества ***n***, то у этого множества 2^n подмножеств.

A={1,2}

Подмножества A:

{∅}, {1}, {2}, {1,2}.

1.4. Классификация множеств. Мощность множества

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. Пустое множество является *конечным* и имеет мощность, равную нулю, т.е. $|\varnothing| = 0.$ Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным.**

Бесконечное множество, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется **счётным**. В противном случае бесконечное множество будет **несчётным**.

Четвёртый вопрос: Решение логических задач графическим способом.

Решение логических задач

Этапы решения логических задач

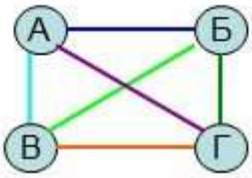
1. Изучить условие задачи.
2. Ввести логические переменные для обозначения простых высказываний.
3. Формализовать условие задачи с помощью языка алгебры логики.
4. Составить конечную логическую формулу, описывающую все логические связи сформулированные условием задачи, прировнять к 1.
5. Упростить формулу и/или построить таблицу истинности.
6. Проанализировать условие задачи.
7. Записать ответ.

Метод графов – один из способов решения логических задач.

По условию задачи составляется схема, состоящая из линий (ребер) и точек (вершин).

Пример 1. *Айдар, Борис, Владимир и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?*

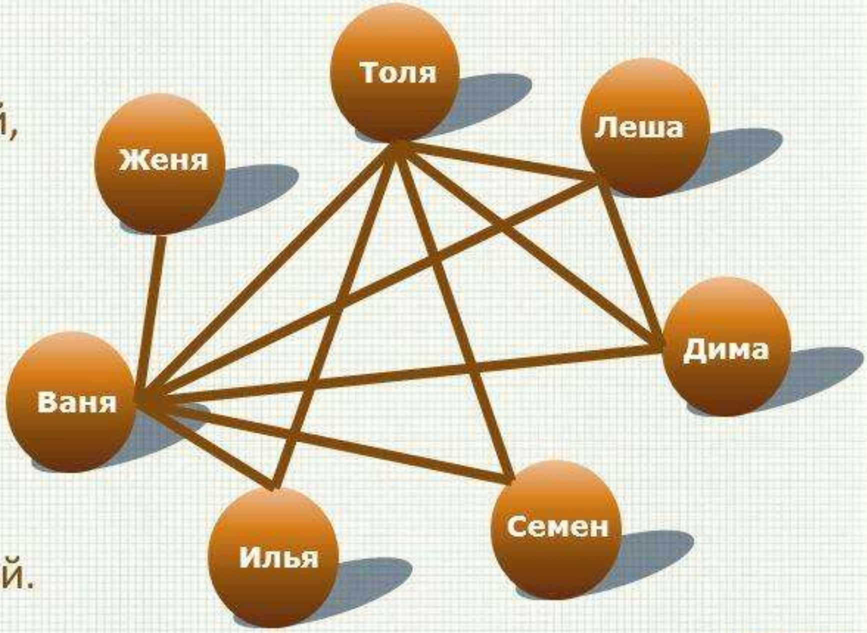
Для решения задачи составим граф с 4 вершинами А, Б, В, Г, обозначенными первыми буквами имен участников игры в шахматы. Тогда количество рёбер этого графа дает ответ. Для наглядности каждое ребро выделено разным цветом.



ОТВЕТ: Было сыграно 6 партий.

Логические задачи

В шахматном турнире по круговой системе, в которой каждый участник встречается с каждым, участвуют 7 школьников. Известно, что на данный момент Ваня сыграл 6 партий, Толя – 5, Леша и Дима – по 3, Семен и Илья – по 2, Женя – 1. С кем играл Леша?»



Ответ: Леша играл с Толей, Ваней и Димой. [6]