1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения вводного занятия по теме 3.3
по дисциплине «Информатика»

Раздел 3. «Информационное моделирование.»

Тема 3.3:
«Математические модели в профессиональной области.»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Тема №3.3. «Математические модели в профессиональной области»

Цель занятия: изучить со студентами основные сведения о математических моделях, метод динамического программирования, элементы теории игр.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению на практике нового материала).

Метод проведения занятия: практическое занятие.

Время проведения практического занятия: 2 ч

Основные вопросы:

1. Алгоритмы моделирования кратчайших путей между вершинами (Алгоритм Дейкстры. Метод динамического программирования).
2. Элементы теории игр (выигрышная стратегия).
3. Математические модели.

Литература:

1. 5 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины: Босова, Л. Л. Информатика. 11 класс. Базовый уровень : учебник / Л.Л. Босова, А. Ю. Босова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2022. — 200 с. , ISBN 978-5-9963-3142-0, §11 главы 3.

Примерный расчет времени (по практическому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятия начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), перечисление литературы, проведения опроса по изученному ранее (пройденному) материалу.

Основная часть:

Первый вопрос: Алгоритмы моделирования кратчайших путей между вер-шинами (Алгоритм Дейкстры. Метод динамического программирования).

Графы как информационные модели находят широкое применение во многих сферах нашей жизни. Например, с их помощью можно планировать оптимальные транспортные маршруты, кратчайшие объездные пути, расположение торговых точек и других объектов. Необходимость решения задач, связанных с поиском кратчайшего пути на графе, возникает при проектировании инженерных сетей и линий электропередач, в микроэлектронике и во многих других случаях.

Путь между вершинами *A* и *B* графа считается кратчайшим, если:

- эти вершины соединены минимальным числом ребер (в случае, если граф не является взвешенным);
- сумма весов рёбер, соединяющих эти вершины, минимальна (для взвешенного графа).

Есть множество алгоритмов определения кратчайшего пути между вершинами графа, в том числе:

1) алгоритм построения дерева решений;
2) алгоритм Дейкстры;
3) метод динамического программирования.

Алгоритм построения дерева решений, как правило, используется для нахождения кратчайшего пути в ориентированном графе. Его мы рассмотрели в предыдущем параграфе.

Алгоритм Дейкстры служит для нахождения кратчайшего пути между одной конкретной вершиной (источником) и всеми остальными вершинами графа.

Суть алгоритма состоит в следующем. Каждой вершине графа ставится в соответствие метка — минимальное известное расстояние от источника до этой вершины. Метка самого источника полагается равной 0. Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки.

На первом шаге расстояние от источника до всех остальных вершин неизвестно. Метки вершин (кроме источника) считаются равными бесконечности, все вершины считаются непосещёнными.

Далее, из всех непосещённых вершин выбирается вершина, имеющая минимальную метку. Для каждого из соседей этой вершины (кроме отмеченных как посещённые) рассчитывается новая длина пути, как сумма значений текущей метки этой вершины и длины ребра, соединяющего её с соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, то значение метки заменяется полученным значением длины. После рассмотрения всех соседей вершина помечается как посещённая. Этот шаг алгоритма повторяется, пока есть непосещённые вершины. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. На рисунке 3.12 кружками обозначены вершины графа, в кружки вписаны имена вершин. Вершины соединены линиями — рёбрами графа. Около каждого ребра обозначен его «вес» — длина пути. Рядом с каждой вершиной дана метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины A: для вершины A — это 0, для всех других вершин она неизвестна и обозначена знаком «бесконечность».

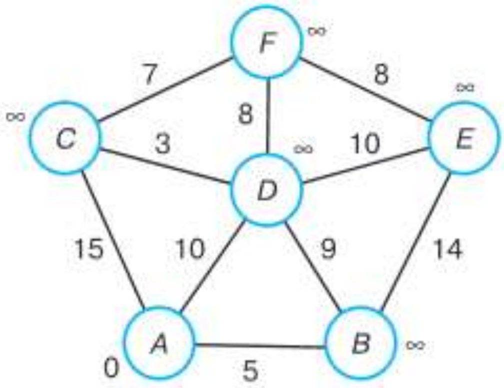


Рис. 3.12. Алгоритм Дейкстры. Начальное состояние

Минимальную метку (0) имеет вершина A. Её соседи — вершины B, C, D. Очерёдность рассмотрения соседей: B, D, C. После изменения их меток получим результат, представленный на рисунке 3.13.

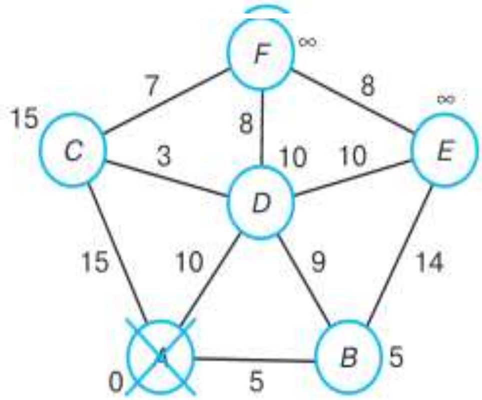


Рис. 3.13. Алгоритм Дейкстры. Шаг 1

После изменения меток всех соседей вершины A она помечается как просмотренная. Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины B. Её соседи — вершины D и E. Так как $5 + 9 > 10$, метка вершины D не изменяется. Вершина E получает метку 19 (рис. 3.14).

Теперь минимальная метка из непросмотренных вершин у вершины D. Её соседи — вершины C, E и F. Так как $10 + 3 < 15$, метка вершины C изменяется. Вершина F получает метку 18. Метка вершины E не изменяется (рис. 3.15).

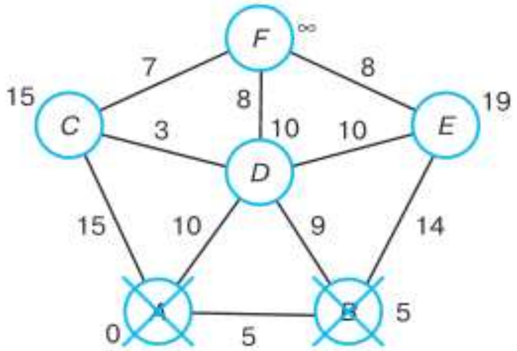


Рис. 3.14. Алгоритм Дейкстры. Шаг 2

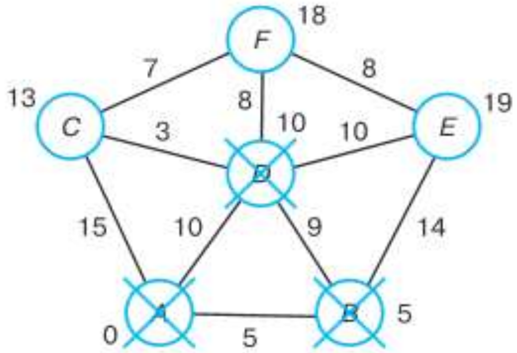


Рис. 3.15. Алгоритм Дейкстры. Шаг 3

Далее в качестве вершин с минимальными метками будут поочерёдно рассматриваться вершины *C*, *F* и *E*. К изменению меток соседних с ними вершин это не приведёт (рис. 3.16).

Полученные в результате работы алгоритма метки вершин графа — это и есть кратчайшие расстояния от вершины *A* до каждой из этих вершин.

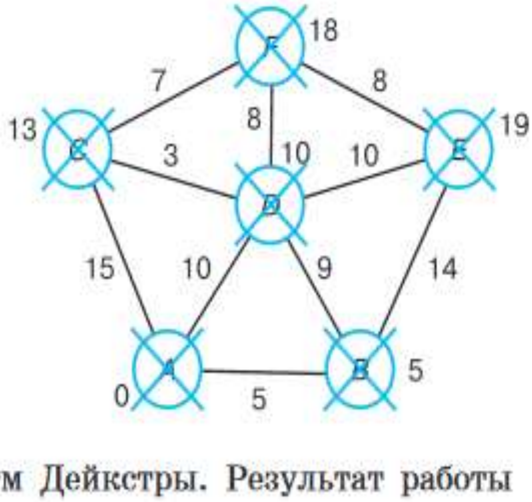


Рис. 3.16. Алгоритм Дейкстры. Результат работы

Метод динамического программирования основан на том, что процесс решения задачи разбивается на стадии (шаги), на каждой из которых принимаются решения, приводящие к достижению поставленной цели.

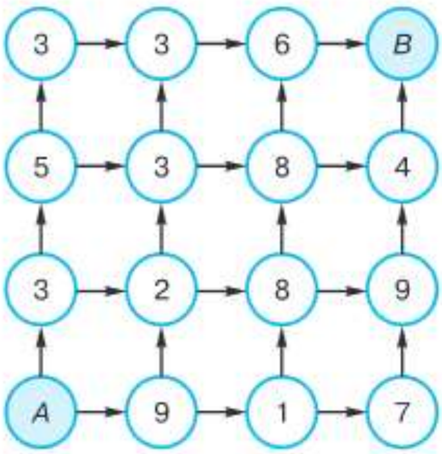


Рис. 3.17. Лабиринт

Предположим, персонажу некоторой игры необходимо пройти по лабиринту из пункта A в пункт B, набрав при этом как можно меньше штрафных баллов, количество которых указано в клетках лабиринта, причём перемещаться можно только вверх или вправо. С помощью графа начальные условия могут быть заданы так, как показано на рисунке 3.17.

Составим таблицу, в которой каждая ячейка будет соответствовать определённой клетке лабиринта. Числа в ячейках будут равны минимальному числу штрафных баллов, которое можно получить, пройдя путь от начала до соответствующей клетки.

Заполнять таблицу будем снизу вверх и слева направо. При этом для заполнения каждой новой ячейки будем рассматривать числа двух соседних с ней заполненных ячеек, находящихся слева от неё и под ней. Будем выбирать наименьшее из этих двух чисел, прибавлять к ним число текущей ячейки и результат записывать в неё.

3			
A	9		

3	5		
A	9		

8	8		
3	5	13	
A	9	10	

11			
8	8	16	
3	5	13	
A	9	10	17

11	11		
8	8	16	
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

11	11	17	17
8	8	16	20
3	5	13	22
A	9	10	17

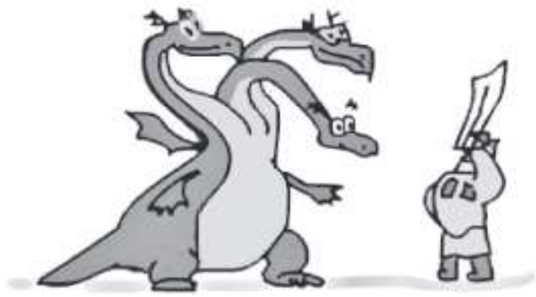
Ответ равен числу в правом верхнем углу таблицы.

Второй вопрос: Элементы теории игр (выигрышная стратегия).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Это задачка из учебника информатики для 4 класса[1]).

Алёша Попович и Добрыня Никитич воюют с девятиглавым змеем. По очереди богатыри ходят к его пещере и срубают 1, 2 или 3 головы. Как начавшему бой Алёше обрести славу победителя змея (срубить последнюю голову), если и Добрыня готов приложить все усилия, чтобы стать победителем в этой битве?



Изобразим на числовой линейке текущее число голов змея:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Здесь: 9 — начальное значение; 0 — конечное значение (победа).

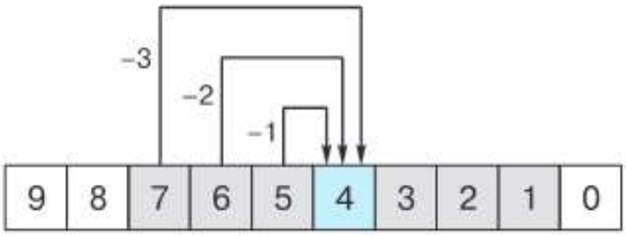
Алёша обретёт славу победителя, если после его последнего удара у змея останется 0 голов. Для этого нужно, чтобы после очередного удара Добрыни у змея осталось 3, 2 или 1 голова. Иначе говоря, позиции 3, 2 и 1 являются для Алёши выигрышными (как, впрочем, для любого из богатырей, кому они достаются в качестве исходных при последнем ударе). Выигрышные и проигрышные позиции на числовой линейке будем помечать буквами «В» и «П» соответственно:

						В	В	В	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Если Добрыня выйдет на бой с черырёхголовым змеем (будет находиться в позиции 4), то любым своим ударом он создаст Алёше условия для выигрыша (переведёт Алёшу в выигрышную позицию). Следовательно, задача Алёши на предыдущем шаге состоит в том, чтобы перевести Добрыню в эту заведомо проигрышную для него позицию:

					П	В	В	В	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Четырёхголового соперника Алёша сможет обеспечить Добрыне, если сам будет находиться в одной из позиций 7, 6 или 5:



Любой удар Добрыни приведёт к благоприятному для Алёши результату только в том случае, если Добрыня выйдет на бой с восьмиголовым змеем:

	П	В	В	В	П	В	В	В	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Следовательно, первым своим ударом Алёша должен срубить змею одну голову.

Выигрышная стратегия — это правило, следуя которому игрок выигрывает независимо от того, как играет противник.
Игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Выигрышная стратегия может быть только у одного игрока.
Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации при различной игре противника.

На рисунке 3.18 в форме дерева представлена выигрышная стратегия для Алёши. Поэтому для Алёши всегда указывается один ход («Ход А»), обеспечивающий требуемый результат. А вот для Добрыни, фактически выступающего в качестве соперника, рассматриваются все возможные варианты («Ход Д»).

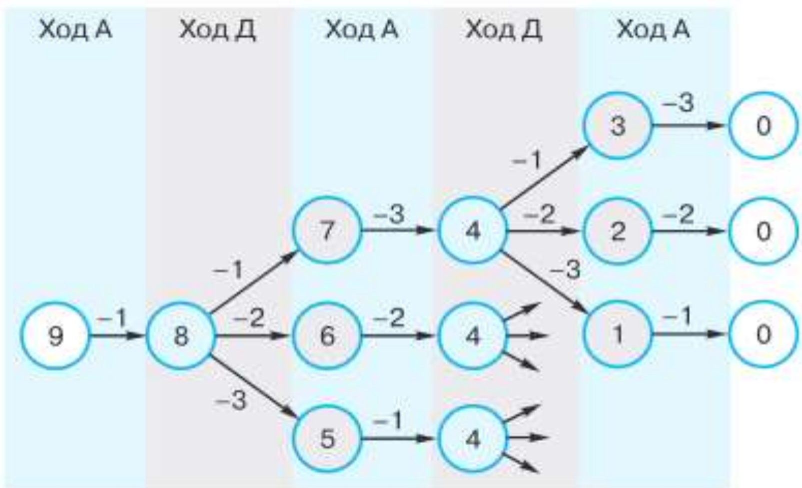


Рис. 3.18. Дерево выигрышной стратегии для Алёши

Пример 2. А эта задача из открытого банка заданий ЕГЭ по информатике (fipi.ru).

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя.

За один ход игрок может выполнить одно из следующих действий:

- добавить в кучу один камень (+ 1);
- добавить в кучу два камня (+ 2);
- увеличить количество камней в куче в 3 раза (× 3).

Например, имея кучу из 5 камней, за один ход можно получить кучу из 6, 7 или 15 камней.

У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 45. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший кучу, в которой будет 46 или больше камней. Будем считать, что в начальный момент в куче S камней, $1 \le S \le 45$.

Выясним, при каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом.

Если $S = 45$, то, добавив в кучу один камень (+ 1), два камня (+ 2) или утроив количество камней в ней (× 3), Петя становится победителем.

Если $S = 44$, то стать победителем можно, если добавить в кучу два камня (+ 2) или утроить количество камней в ней (× 3).

Если $S = 43$, то Петя становится победителем, утроив количество камней в куче (× 3). Также можно действовать для любого $S \ge 16$ ($16 \times 3 = 48$, $15 \times 3 = 45$).

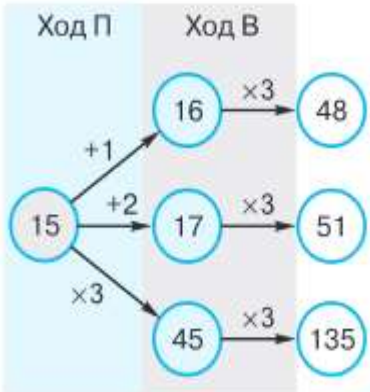


Рис. 3.19. Позиция 15 — выигрышная для Вани

Итак, Петя может выиграть, если $S = 16, ..., 45$ — это его выигрышные позиции. Для выигрыша Пете достаточно увеличить количество камней в 3 раза. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой будет 46 или более камней.

Если же в куче будет 15 камней, то после любого хода Пети своим первым ходом может выиграть Ваня. Действительно, при $S = 15$ после первого хода Пети («Ход П») в куче будет 16, 17 или 45 камней. Любой из этих случаев является выигрышным для делающего ход Вани («Ход В»), которому для победы достаточно увеличить количество камней в 3 раза (рис. 3.19).

Теперь попробуем определить значения S, при которых у Пети будет выигрышная стратегия, причём Петя не сможет выиграть первым ходом, но сможет выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Мы выяснили, что $S = 15$ — проигрышная позиция для любого игрока. Если Петя своим первым ходом сможет перевести в неё Ваню, то что бы ни делал последний, сам он выиграть не сможет, но переведёт в выигрышную позицию своего соперника. 15 камней Петя может получить при $S = 14$ (+ 1), $S = 13$ (+ 2) или $S = 5$ (× 3). Других вариантов для S нет (рис. 3.20).

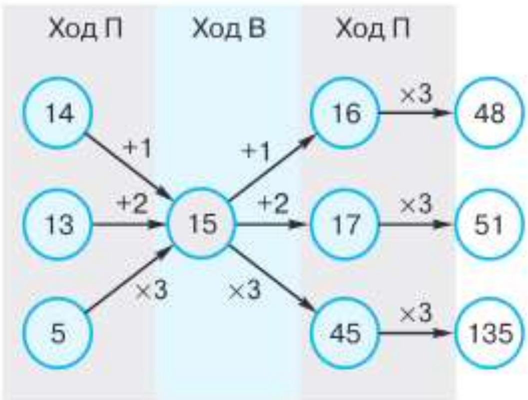


Рис. 3.20. Позиции 5, 13, 14 — выигрышные для Пети

Представим всю информацию на числовой линейке:

				В								В	В	П	В	В	В	В	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	45	46

Найдём на ней такое значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Здесь речь идёт о проигрышной позиции для первого игрока. Следовательно, искать значение S надо среди позиций, не отмеченных как выигрышные.

Пусть $S = 12$. Каким бы ни был ход Пети, им он переведёт своего соперника в выигрышную позицию: 13 (12 + 1), 14 (12 + 2) или 36 (12 × 3). В последнем случае Ваня имеет возможность выиграть своим первым же ходом (36 × 3), а в первых двух случаях он должен перевести соперника в проигрышную позицию $S = 15$, что обеспечит ему выигрыш вторым ходом. Следовательно, позиция $S = 12$ — проигрышная для Пети. На дереве решений наши рассуждения могут быть представлены так, как показано на рисунке 3.21.

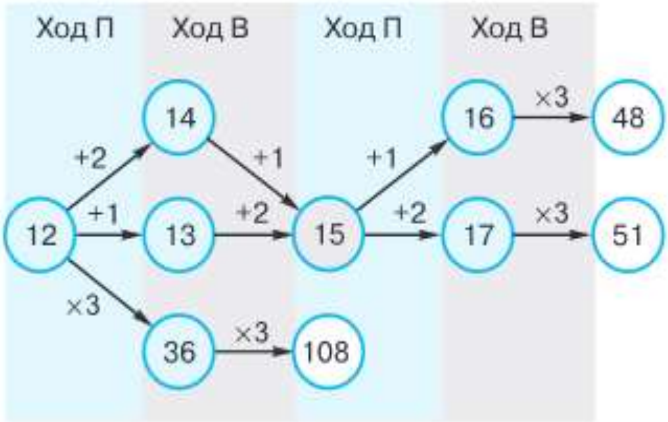


Рис. 3.21. Позиция 12 — проигрышная для Пети

Если вместо $S = 12$ взять $S = 11$, то приведёт ли любой ход Пети Ваню к выигрышу? Подойдёт ли для этой цели $S = 10$? Обоснуйте свой ответ.

Примеры, которые мы рассмотрели, имеют самое непосредственное отношение к теории игр — разделу современной математики, связанному с решением многих задач экономики, социологии, политологии, биологии, искусственного интеллекта и ряда других областей, где необходимо изучение поведения человека и животных в различных ситуациях.

Игра выступает в качестве математической модели некоторой ситуации и понимается как процесс, в котором участвуют две и более стороны, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. При этом игра характеризуется такими признаками, как:

1) присутствие нескольких игроков;
2) неопределённость поведения игроков, связанная с имеющимися у каждого из них несколькими вариантами действий;
3) различие (несовпадение) интересов игроков;
4) взаимосвязанность поведения игроков (результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех игроков);
5) наличие правил поведения, известных всем игрокам.

Игра может быть представлена в виде дерева, каждая вершина которого соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии.

Примеры, которые мы рассмотрели, относятся к так называемым играм с полной информацией. В играх с полной информацией участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Графы как информационные модели находят широкое применение во многих сферах нашей жизни. С их помощью можно планировать оптимальные транспортные маршруты, кратчайшие объездные пути, расположение торговых точек и других объектов.

Путь между вершинами A и B графа считается кратчайшим, если эти вершины соединены минимальным числом рёбер (в случае, если граф не является взвешенным) или если сумма весов рёбер, соединяющих эти вершины, минимальна (для взвешенного графа).

Для определения кратчайшего пути между вершинами графа используются алгоритм построения дерева решений, алгоритм Дейкстры, метод динамического программирования и другие алгоритмы.

Важную роль в решении многих задач экономики, социологии, политологии, биологии, искусственного интеллекта и ряда других областей, где необходимо изучение поведения человека и животных в различных ситуациях, играет теория игр.

Игра, выступающая в качестве математической модели некоторой ситуации, характеризуется такими признаками, как:

1) присутствие нескольких игроков;
2) неопределённость поведения игроков, связанная с имеющимися у каждого из них несколькими вариантами действий;
3) различие (несовпадение) интересов игроков;
4) взаимосвязанность поведения игроков (результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех игроков);
5) наличие правил поведения, известных всем игрокам.

Игра может быть представлена в виде дерева, каждая вершина которого соответствует ситуации выбора игроком своей стратегии.

В играх с полной информацией участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры.

Выигрышная стратегия — это правило, следуя которому игрок выигрывает независимо от того, как играет противник.

Третий вопрос: Математические модели.

Математические модели – специальный инструмент, который позволяет оценить недоступные прямым измерениям свойства регуляторных систем и процессов. Математическая модель представляет собой систему математических соотношений – формул, функций, уравнений, описывающих те или иные стороны изучаемого объекта, явления, процесса. Модель – не только отражение наших знаний об исследуемом объекте, но и источник новых сведений, полученных с помощью модели.

Классификация математических моделей.

В основу классификации математических моделей можно положить различные принципы. Можно классифицировать модели по отраслям наук (математические модели в физике, биологии, социологии и т.д.). Можно классифицировать по применяемому математическому аппарату (модели, основанные на применении обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, стохастических методов, дискретных алгебраических преобразований и т.д.). Наконец, если исходить из общих задач моделирования в разных науках безотносительно к математическому аппарату, наиболее естественна такая классификация:

– дескриптивные (описательные) модели;

– оптимизационные модели;

– многокритериальные модели;

– игровые модели.

Дескриптивные (описательные) модели. Например, моделирование движения кометы, вторгшейся в Солнечную систему, производится с целью предсказания траектории ее полета, расстояния, на котором она пройдет от Земли, и т.д. В этом случае цели моделирования носят описательный характер, поскольку нет никаких возможностей повлиять на движение кометы, что-то в нем изменить.

Оптимизационные модели используются для описания процессов, на которые можно воздействовать, пытаясь добиться достижения заданной цели. В этом случае в модель входит один или несколько параметров, доступных влиянию. Например, меняя тепловой режим в зернохранилище, можно задаться целью подобрать такой режим, чтобы достичь максимальной сохранности зерна, т.е. оптимизировать процесс хранения.

Многокритериальные модели. Нередко приходится оптимизировать процесс по нескольким параметрам одновременно, причем цели могут быть весьма противоречивыми. Например, зная цены на продукты и потребность человека в пище, нужно организовать питание больших групп людей (в армии, детском летнем лагере и др.) физиологически правильно и, одновременно с этим, как можно дешевле. Ясно, что эти цели совсем не совпадают, т.е. при моделировании будет использоваться несколько критериев, между которыми нужно искать баланс.

Игровые модели могут иметь отношение не только к компьютерным играм, но и к весьма серьезным вещам. Например, полководец перед сражением при наличии неполной информации о противостоящей армии должен разработать план: в каком порядке вводить в бой те или иные части и т.д., учитывая и возможную реакцию противника. Есть специальный раздел современной математики – теория игр, – изучающий методы принятия решений в условиях неполной информации.

Основными требованиями, предъявляемыми к математическим моделям, являются требования адекватности, универсальности и экономичности.

Адекватность. Модель считается адекватной, если отражает заданные свойства с приемлемой точностью. Точность определяется как степень совпадения значений выходных параметров модели и объекта.

Точность модели различна в разных условиях функционирования объекта. Эти условия характеризуются внешними параметрами. В пространстве внешних параметров выделить область адекватности модели, где погрешность меньше заданной предельно допустимой погрешности. Определение области адекватности моделей – сложная процедура, требующая больших вычислительных затрат, которые быстро растут с увеличением размерности пространства внешних параметров. Эта задача по объему может значительно превосходить задачу параметрической оптимизации самой модели, поэтому для вновь проектируемых объектов может не решаться.

Универсальность – определяется в основном числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров.

Экономичность модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов для ее реализации – затратами машинного времени и памяти.

Противоречивость требований к модели обладать широкой областью адекватности, высокой степени универсальности и высокой экономичности обусловливает использование ряда моделей для объектов одного и того же типа.

Основные этапы математического моделирования.

1) Построение модели.

На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект – явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

2) Решение математической задачи, к которой приводит модель.

На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

3) Интерпретация полученных следствий из математической модели.

Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4) Проверка адекватности модели.

На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5) Модификация модели.

На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Также сведения о математических моделях представлены в Приложении.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Дать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашние задания):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, приложении к данному План-конспекту, в учебнике, указанном на с.2 текущего документа.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу, защите ранее выполненных практических работ.