Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 17
Некоторые сведения из теории множеств

17.1. Понятие множества

С понятием множества вы познакомились на уроках математики ещё в начальной школе, а затем работали с ним при изучении математики и информатики в основной школе.

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Примерами множеств могут служить: множество всех учеников вашего класса, множество всех жителей Санкт-Петербурга, множество всех натуральных чисел, множество всех решений некоторого уравнения и т. п.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, ...). Объекты, входящие в состав множества, называются его элементами.

Множество можно задать следующими способами:

1) перечислением всех его элементов;
2) характеристическим свойством его элементов.

В первом случае внутри фигурных скобок перечисляются все объекты, составляющие множество. Каждый объект, входящий в множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

Например, запись $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ означает, что множество M состоит из чисел 1, 3, 5, 7 и 9. Точно такой же смысл будет иметь запись $M = \{3, 1, 5, 9, 7\}$. Иначе говоря, порядок расположения элементов в фигурных скобках значения не имеет. Важно точно указать, какие именно объекты являются элементами множества.

Например:
- число 5 является элементом множества M: $5 \in M$[1];
- число 4 не является элементом множества M: $4 \notin M$.

Это же множество можно задать с помощью характеристического свойства образующих его элементов — такого свойства, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. В нашем примере можно говорить о множестве натуральных однозначных нечётных чисел.

В рассматриваемом множестве M содержится 5 элементов. Это обозначают так: $|M| = 5$. Можно составить множество, содержащее любое число элементов. Например, множество всех корней уравнения $x^2 - 4x - 5 = 0$ конечно (два элемента), а множество всех точек прямой бесконечно. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Первый способ задания множеств применим только для конечных множеств, да и то при условии, что число элементов множества невелико. Вторым способом можно задавать как конечные, так и бесконечные множества.

Из некоторых элементов множества M можно составить новое множество, например P: $P = \{1, 3, 5\}$.

Если каждый элемент множества P принадлежит множеству M, то говорят, что P есть **подмножество** M, и записывают: $P \subset M$.

Само множество M является своим подмножеством, т. к. каждый элемент M принадлежит множеству M. Пустое множество также является подмножеством M.

Работая с объектами какой-то определённой природы, всегда можно выделить «самое большое» или универсальное множество, содержащее все возможные подмножества. Пусть A — множество чётных чисел, B — множество натуральных чисел, C — множество чисел, кратных пяти. Тогда самым большим множеством, содержащим в себе множества A, B и C, а также другие подобные множества, будет множество целых чисел. Универсальное множество будем обозначать буквой U.

Для наглядного изображения множеств используются круги Эйлера (рис. 4.1). Точки внутри круга считаются элементами множества.

[1] Символ $\in$ называется знаком принадлежности.

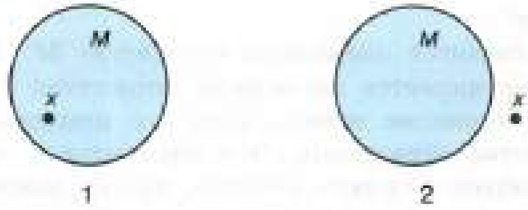


Рис. 4.1. Графическое изображение множеств: 1) $x \in M$, 2) $x \notin M$

17.2. Операции над множествами

Над множествами, как и над числами, производят некоторые операции.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Пересечение множеств обозначают с помощью знака $\cap$: $X \cap Y$. На рисунке 4.2 закрашено множество $X \cap Y$.

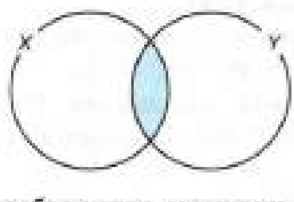


Рис. 4.2. Графическое изображение множества $X \cap Y$

Пусть множества X и Y состоят из букв:

$$X = \{ш;\ к,\ о,\ л,\ а\};$$
$$Y = \{у,\ р,\ о,\ к\}.$$

Эти множества имеют общие элементы: к, о.

$$X \cap Y = \{к,\ о\}.$$

Множества M и X не имеют общих элементов, их пересечение — пустое множество:

$$M \cap X = \varnothing.$$

Пересечение множеств M и P есть множество P, а пересечение множеств M и M есть множество M:

$$M \cap P = P;$$
$$M \cap M = M.$$

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Объединение множеств обозначают с помощью знака $\cup$: $X \cup Y$.

На рисунке 4.3 закрашено множество $X \cup Y$.

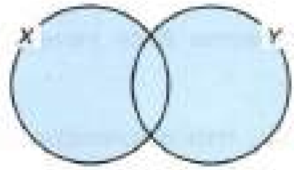


Рис. 4.3. Графическое изображение множества $X \cup Y$

Для наших примеров:

$$X \cup Y = \{ш, к, о, л, а, у, р\};$$
$$M \cup X = \{1, 3, 5, 7, 9, ш, к, о, л, а\};$$
$$M \cup P = M; \quad M \cup M = M.$$

Подумайте, возможно ли равенство: $A \cup B = A \cap B$.

Пересечение и объединение выполняются для любой пары множеств. Третья операция — дополнение — имеет смысл не для всех множеств, а только тогда, когда второе множество является подмножеством первого.

Пусть множество P является подмножеством множества M. **Дополнением** P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Дополнение P до M обозначают $\overline{P}$: $\overline{P} = \{7, 9\}$.

Дополнение M до M есть пустое множество, дополнение пустого множества до M есть M: $\overline{M} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = M$.

Особый интерес представляет дополнение некоторого множества B до универсального множества U. Например, если B — это множество точек, принадлежащих некоторому отрезку, то его дополнением $\overline{B}$ до универсального множества U, которым в данном случае является множество всех точек числовой прямой, является множество точек, не принадлежащих данному отрезку.

В общем случае можем записать: $B \cup \overline{B} = U$ (рис. 4.4)

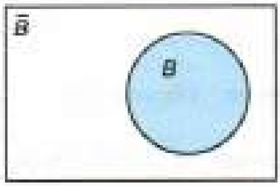


Рис. 4.4. Дополнение множества B до универсального множества

На рисунке 4.5 видно, что множество $A \cup B$ будет совпадать с универсальным, если A будет совпадать с множеством $\overline{B}$ или содержать его в качестве подмножества. В первом случае, т. е. при $A = \overline{B}$, мы имеем дело с минимальным множеством A, таким что $A \cup B = U$.

Рис. 4.5. Выбор такого множества A, что $A \cup B = U$

Каким должно быть множество A для того, чтобы множество $\overline{A} \cup B$ совпадало с универсальным множеством?

Для ответа на этот вопрос воспользуйтесь рисунком 4.6.

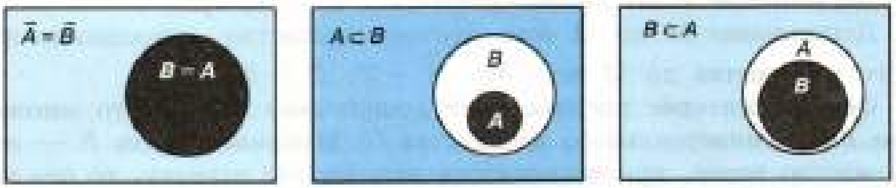


Рис. 4.6. Выбор такого множества A, что $\overline{A} \cup B = U$

17.3. Мощность множества

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Мощность множества X обозначается $|X|$.

В рассмотренных выше примерах $|X| = 5$, $|M| = 5$.

Число элементов объединения двух непересекающихся множеств равно сумме чисел элементов этих множеств. Так, в объединении множеств M и X содержится 10 элементов: $|M \cup X| = 10$.

Если же множества пересекаются, то число элементов объединения находится сложнее. Так, X состоит из 5 элементов, множество Y — из 4, а их объединение — из 7. Сложение чисел 5 и 4 даёт нам число 9. Но в эту сумму дважды вошло число элементов пересечения. Чтобы получить правильный результат, надо к числу элементов X прибавить число элементов Y и из суммы вычесть число элементов пересечения. Полученная формула подходит для любых двух множеств: $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. Это частный случай так называемого **принципа включений-исключений**.

Принципом включений-исключений называется формула, позволяющая вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Для случая объединения трёх множеств формула имеет вид:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Аналогичные формулы справедливы и для пересечения множеств:

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|;$$

$$|X \cap Y \cap Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cup Y| - |X \cup Z| - |Y \cup Z| + |X \cup Y \cup Z|.$$

Пример. В зимний оздоровительный лагерь отправляется 100 старшеклассников. Почти все они увлекаются сноубордом, коньками или лыжами. При этом многие из них занимаются не одним, а двумя и даже тремя видами спорта. Организаторы выяснили, что всего кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на лыжах — 28, на коньках — 42. Всего умением кататься на лыжах и сноуборде из них могут похвастаться 8 ребят, на лыжах и коньках — 10, на сноуборде и коньках — 5, но только трое из них владеют всеми тремя видами спорта. Сколько ребят не умеет кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках?

Обозначим через S, L и K множества сноубордистов, лыжников и любителей коньков соответственно. Тогда $|S| = 30$, $|L| = 28$ и $|K| = 42$. При этом $|S \cap L| = 8$, $|K \cap L| = 10$, $|S \cap K| = 5$, $|S \cap L \cap K| = 3$.

Объединение множеств S, L и K — это множество ребят, увлекающихся хотя бы каким-то видом спорта.

По формуле включений-исключений находим:

$$|S \cup L \cup K| = 30 + 28 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, из 100 старшеклассников 20 не умеют кататься ни на сноуборде, ни на лыжах, ни на коньках.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Множество — это совокупность объектов произвольной природы, которая рассматривается как единое целое.

Пересечением двух множеств X и Y называется множество их общих элементов.

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов этих множеств и не содержащее никаких других элементов.

Пусть множество P является подмножеством множества M. Дополнением P до M называется множество, состоящее из тех элементов M, которые не вошли в P.

Мощностью конечного множества называется число его элементов.

Формула включений-исключений позволяет вычислить мощность объединения (пересечения) множеств, если известны их мощности и мощности всех их пересечений (объединений).

Вопросы и задания

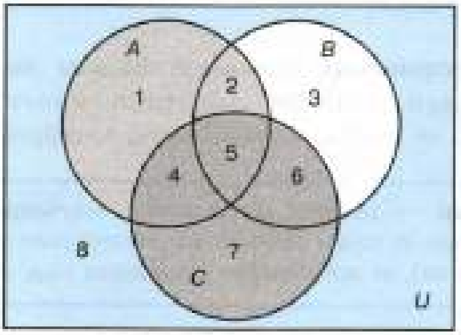
1. Если множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 2, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 3, то что будет:
   1) пересечением этих множеств;
   2) объединением этих множеств?

2. Пусть множество X — это множество натуральных чисел, делящихся нацело на 18, а Y — множество натуральных чисел, делящихся нацело на 14. Укажите наименьшее число, входящее:

   1) в пересечение этих множеств;

   2) в объединение этих множеств?

3. Пусть A, B и C — некоторые множества, обозначенные кругами, U — универсальное множество.



   С помощью операций объединения, пересечения и дополнения до универсального множества выразите через A, B и C следующие множества:

   1) $1 \cup 2 \cup 3 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;

   2) $2 \cup 5$;

   3) 5;

   4) $2 \cup 4 \cup 5 \cup 6$;

   5) $1 \cup 2 \cup 3$;

   6) 8.

4. В первую смену в лагере «Дубки» отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. При этом 10 человек были и отличниками, и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличниками, и спортсменами, и победителями олимпиад. Сколько ребят отдыхало в лагере?

5. Старшеклассники заполняли анкету с вопросами об экзаменах по выбору. Оказалось, что выбрали они информатику, физику и обществознание. В классе 38 учеников. Обществознание выбрал 21 ученик, причём трое из них выбрали ещё и информатику, а шестеро — ещё и физику. Один ученик выбрал все три предмета. Всего информатику выбрали 13 учеников, пятеро из которых указали в анкете два предмета. Надо определить, сколько же учеников выбрали физику.

*6. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий. Сколько человек знают все три языка?

§ 18
Алгебра логики

Из курса информатики основной школы вы знаете, что для компьютерных наук большое значение имеет математическая логика, а точнее, её часть, называемая алгеброй логики.

Алгебра логики — раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые с точки зрения их логических значений (истинности или ложности), и логические операции над ними.

Джордж Буль (1815–1864) — английский математик, основоположник алгебры логики. Дж. Буль изучал логику мышления математическими методами и разработал алгебраические методы решения традиционных логических задач. В 1854 году он опубликовал работу, в которой изложил суть алгебры логики, основанной на трёх операциях: and, or, not. Долгое время алгебра логики была известна достаточно узкому классу специалистов. В 1938 году Клод Шеннон применил алгебру логики для описания процесса функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

18.1. Логические высказывания и переменные

Высказывание — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно.

Например, высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики» истинно, а высказывание «2 + 2 = 5» ложно.

Что вы можете сказать об истинности или ложности предложения «Данное высказывание — ложь»?

Из имеющихся высказываний можно строить новые высказывания. Для этого используются логические связки — слова и словосочетания «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда» и др.

Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными (сложными). Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным (простым).

Например, из двух простых высказываний «Алгебра логики является основой строения логических схем компьютеров» и «Алгебра логики служит математической основой решения сложных логических задач» можно получить составное высказывание «Алгебра логики является основой строения логических схем компьютеров и служит математической основой решения сложных логических задач».

Обоснование истинности или ложности элементарных высказываний не является задачей алгебры логики. Эти вопросы решаются теми науками, к сфере которых относятся элементарные высказывания. Такое сужение интересов позволяет обозначать высказывания символическими именами (например, A, B, C). Так, если обозначить элементарное высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики» именем A, а элементарное высказывание «$2 + 2 = 5$» именем B, то составное высказывание «Джордж Буль — основоположник алгебры логики, и $2 + 2 = 5$» можно записать как «A и B». Здесь A, B — логические переменные, «и» — логическая связка.

Логическая переменная — это переменная, которая обозначает любое высказывание и может принимать логические значения «истина» или «ложь».

Для логических значений «истина» и «ложь» могут использоваться следующие обозначения:

Истина	Ложь
И	Л
true	false
да	нет
1	0

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

18.2. Логические операции

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Из курса информатики основной школы вам известны логические операции отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Их таблицы истинности представлены ниже.

Конъюнкция

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкция

A	A	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Отрицание

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны, называется **конъюнкцией** или **логическим умножением**.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, называется **дизъюнкцией** или **логическим сложением**.

Логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному, называется **отрицанием** или **инверсией**.

При построении отрицания простого высказывания:

- используется оборот «неверно, что» или к сказуемому добавляется частица «не»;
- в высказывании, содержащем слово «все», это слово заменяется на «некоторые» и наоборот.

Рассмотрим несколько новых логических операций.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся ложным тогда и только тогда, когда первое высказывание (посылка) истинно, а второе (следствие) — ложно, называется **импликацией** или **логическим следованием**.

Операция импликации обозначается символом → и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В разговорной речи импликации соответствуют предложения, содержащие связку «если ..., то». Эту связку мы используем тогда, когда хотим показать наличие причинно-следственной связи, иначе говоря, зависимость одного события от другого. Например, пусть некоторый человек сказал: «Если завтра будет хорошая погода, то я пойду гулять». Ясно, что человек окажется лжецом лишь в том случае, если погода действительно будет хорошей, а гулять он не пойдёт. Если же погода будет плохой, то, независимо от того, пойдёт он гулять или нет, во лжи его нельзя обвинить: обещание пойти гулять он давал лишь при условии, что погода будет хорошей.

Результат операции импликации, как и других логических операций, определяется истинностью или ложностью логических переменных, а не наличием причинно-следственных связей между высказываниями. Например, абсурдное с житейской точки зрения высказывание «Если 2 > 3, то существуют ведьмы» является истинным с точки зрения алгебры логики.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным тогда и только тогда, когда только одно из двух высказываний истинно, называется **строгой (исключающей) дизъюнкцией**.

Строгая дизъюнкция обозначается символом $\oplus$ и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

В русском языке строгой (разделительной) дизъюнкции соответствует связка «либо». В отличие от обычной дизъюнкции (связка «или») в высказывании, содержащем строгую дизъюнкцию, мы утверждаем, что произойдёт только одно событие.

Например, высказывая утверждение «На сегодняшнем матче Петя сидит на трибуне А либо на трибуне Б», мы считаем, что Петя сидит либо только на трибуне А, либо только на трибуне Б, и что сидеть одновременно на двух трибунах Петя не может.

Логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям новое, являющееся истинным, когда оба исходных высказывания истинны или оба исходных высказывания ложны, называется **эквиваленцией** или **равнозначностью**.

В логике эквиваленция обозначается символом $\leftrightarrow$ и задаётся следующей таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В разговорной речи для выражения взаимной обусловленности используется связка «тогда и только тогда, когда», а в математике — «необходимо и достаточно».

Рассмотрим высказывание «Денис пойдёт в бассейн тогда и только тогда, когда он выучит уроки».

Это высказывание истинно (договорённость соблюдается), если истинны оба элементарных высказывания («Денис пойдёт в бассейн», «Денис выучит уроки»). Высказывание истинно (договорённость не нарушается) и в том случае, если оба элементарных высказывания ложны («Денис не пойдёт в бассейн», «Денис не выучит уроки»). Если же одно из двух высказываний ложно («Денис пойдёт в бассейн, хотя и не выучит уроки», «Денис выучит уроки, но не пойдёт в бассейн»), то договорённость нарушается, и составное высказывание становится ложным.

А сейчас посмотрите внимательно на таблицы истинности строгой дизъюнкции и эквиваленции: если на некотором наборе логических переменных результатом строгой дизъюнкции является истина, то на этом же наборе результатом эквиваленции всегда будет ложь, и наоборот. Можно сделать выводы:

- операция эквиваленции есть отрицание операции строгой дизъюнкции ($A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B}$);
- операция строгой дизъюнкции есть отрицание операции эквиваленции ($A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$).

На сегодняшний день в алгебре логики не существует унифицированной символики для обозначения логических операций. В таблице 4.1 представлены логические операции и их наиболее распространённые обозначения, используемые как в алгебре логики, так и в некоторых языках программирования. Здесь же приведены речевые обороты, соответствующие логическим операциям.

Таблица 4.1

Логические операции и их обозначения

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Отрицание (инверсия, логическое НЕ)	$\neg A$, $\overline{A}$, НЕ A, not A	«Не», «неверно, что»
Конъюнкция (логическое умножение, логическое И)	$A \wedge B$, A & B, $A \cdot B$, AB, A И B, A and B	«И», «как ..., так и», «вместе с», «но», «хотя», «а»
Дизъюнкция (логическое сложение, логическое ИЛИ)	$A \vee B$, $A + B$, $A \mid B$, A ИЛИ B, A or B	«Или», «или ..., или ..., или оба вместе»

Окончание табл. 4.1

Операция	Обозначение	Речевой оборот
Строгая дизъюнкция (исключающая дизъюнкция, исключающее ИЛИ)	$A \oplus B$, A xor B	«Либо ..., либо», «только ... или только»
Импликация (логическое следование)	$A \to B$, $A \Rightarrow B$	«Если ..., то», «из ... следует», «влечёт»
Эквиваленция (эквивалентность, равнозначность)	$A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $A = B$	«Эквивалентно», «равносильно», «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда»

Операция отрицания выполняется над одним операндом. Такие операции называются одноместными или унарными. Все остальные логические операции, представленные в таблице 4.1, выполняются над двумя операндами и называются двуместными или бинарными.

18.3. Логические выражения

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Для логического выражения справедливо:

1) всякая логическая переменная, а также логические константы (0, 1) есть логическое выражение;
2) если A — логическое выражение, то и $\overline{A}$ — логическое выражение;
3) если A и B — выражения, то, связанные любой бинарной операцией, они также представляют собой логическое выражение.

При преобразовании или вычислении значения логического выражения логические операции выполняются в соответствии с их приоритетом:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Как и в арифметике, скобки меняют порядок выполнения операций.

Пример 1. Выясним, какие из приведённых слов удовлетворяют логическому условию (первая буква согласная → вторая буква согласная) & (последняя буква гласная → предпоследняя буква гласная):

1) ОЗОН;
2) ИГРА;
3) МАФИЯ;
4) ТРЕНАЖ.

Вычислим значение логического выражения для каждого из данных слов:

1) $(0 \to 1) \ \& \ (0 \to 1) = 1 \ \& \ 1 = 1$;
2) $(0 \to 1) \ \& \ (1 \to 0) = 1 \ \& \ 0 = 0$;
3) $(1 \to 0) \ \& \ (1 \to 1) = 0 \ \& \ 1 = 0$;
4) $(1 \to 1) \ \& \ (0 \to 1) = 1 \ \& \ 1 = 1$.

Итак, заданному условию удовлетворяют первое и четвёртое слова.

Решение логического уравнения — это один или несколько наборов значений логических переменных, при которых логическое уравнение становится истинным выражением.

Пример 2. Решим логическое уравнение

$$(A \to C) \vee ((\overline{B \vee C}) \ \& \ A) \vee D = 0.$$

Дизъюнкция ложна в том и только в том случае, когда ложно каждое из образующих её высказываний. Иными словами, наше уравнение соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} A \to C = 0; \\ (\overline{B \vee C}) \ \& \ A = 0; \\ D = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значение переменной D уже найдено.

Импликация равна нулю в единственном случае — когда из истины следует ложь. Иначе говоря, в нашем случае: $A = 1$ и $C = 0$.

Подставим найденные значения переменных в уравнение $(\overline{B \vee C}) \ \& \ A = 0$. Получим: $(\overline{B \vee 0}) \ \& \ 1 = 0$ или $\overline{B} = 0$, т. е. $B = 1$.

Ответ: $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$.

Логические уравнения могут иметь не одно, а несколько и даже очень много решений. Зачастую требуется, не выписывая все решения уравнения, указать их количество.

Пример 3. Выясним, сколько различных решений имеет логическое уравнение $(A \ \& \ B \ \& \ \overline{C}) \vee (\overline{B} \ \& \ C \ \& \ D) = 1$.

Дизъюнкция истинна, если истинно хотя бы одно из образующих её высказываний. Решение данного логического уравнения равносильно совокупности, состоящей из двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = 1; \\ \overline{B} \,\&\, C \,\&\, D = 1. \end{array}\right.$$

Первое равенство будет выполняться только при $A = 1$, $B = 1$ и $C = 0$. Поскольку D в этом уравнении не задействовано, оно может принимать любое из двух значений (0 или 1). Таким образом, всего первое уравнение имеет два решения.

Самостоятельно выясните, сколько решений имеет второе уравнение (из совокупности двух уравнений).

Сколько решений имеет исходное уравнение?

Пример 4. Выясним, сколько решений имеет очень простое с виду логическое уравнение $x_1 \ \& \ x_2 \to x_3 \ \& \ x_4 = 1$.

Введём замену переменных. Пусть $t_1 = x_1 \ \& \ x_2$, $t_2 = x_3 \ \& \ x_4$. Тогда исходное уравнение примет вид: $t_1 \to t_2 = 1$.

На t_1 никаких ограничений нет, эта переменная может принимать значения 0 и 1. Импликация равна 0 только в случае, когда из истины (1) следует ложь (0). Исключим этот вариант. Построим дерево решений, представив на нём значения переменных t_1 и t_2, при которых $t_1 \to t_2 = 1$.

Получаем для t_1 и t_2 три набора значений: 00, 01, 11. Первая двоичная цифра в каждом из этих трёх наборов — результат выражения $x_1 \ \& \ x_2$, вторая — $x_3 \ \& \ x_4$. Рассмотрим первый набор: существует три набора x_1 и x_2 таких, что $x_1 \ \& \ x_2 = 0$, другими словами, первый 0 мы можем получить тремя способами. Второй 0 в этом наборе мы также можем получить тремя способами.

Из курсов информатики и математики основной школы вам известно одно из основных правил комбинаторики — правило умножения. Согласно ему, если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Согласно правилу умножения, пару 00 можно получить $3 \cdot 3 = 9$ способами.

Что касается пары 01, то первый 0 мы можем получить тремя способами, а для получения 1 существует единственный вариант (x_3 & $x_4 = 1$ при $x_3 = 1$ и $x_4 = 1$). Следовательно, есть ещё три набора переменных x_1, x_2, x_3, x_4, являющихся решением исходного уравнения.

Самостоятельно доведите решение этой задачи до конца.

18.4. Предикаты и их множества истинности

Равенства, неравенства и другие предложения, содержащие переменные, высказываниями не являются, но они становятся высказываниями при замене переменной каким-нибудь конкретным значением. Например, предложение $x < 12$ становится истинным высказыванием при $x = 5$ ($5 < 12$ — истина) и ложным при $x = 15$ ($15 < 12$ — ложь). Предложения такого рода называют **высказывательными формами** или **предикатами**.

Предикáт — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных.

Выделим некоторый предикат $P(x)$ и рассмотрим множество всевозможных объектов I, к которым он относится, — **область определения предиката**. Можно выделить такое подмножество P множества I, что на всех его элементах предикат $P(x)$ будет превращаться в истинное высказывание. Определённое таким образом P называется **множеством истинности предиката** $P(x)$.

Рассмотрим множество учеников некоторого класса. Известно, что в этом классе два отличника — Иван и Саша. Предикат «Он отличник» будет истинным высказыванием только по отношению к этим двум ученикам и ложным по отношению ко всем остальным.

Предикаты позволяют задать множество, не перечисляя всех его элементов. Например, множество истинности предиката $P(x) = (x < 0)$ — множество отрицательных чисел; множество истинности предиката $P(x, y) = (x^2 + y^2 = 1)$ — множество точек окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Следует отметить, что многие задания, выполняемые вами на уроках математики, прямо связаны с предикатами. Например, стандартное задание «Решить квадратное уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$» фактически означает требование найти множество истинности предиката $P(x) = (x^2 - 3x + 2 = 0)$.

Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Пусть A и B соответственно являются множествами истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$. Тогда пересечение множеств A и B будет являться множеством истинности для предиката $A(x) \& B(x)$, а объединение множеств A и B будет множеством истинности для предиката $A(x) \vee B(x)$.

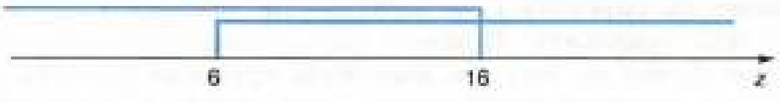
Пример 5. Найдём все целые числа z, превращающие предикат

$$P(z) = (z > 5) \& (z - 2 < 15)$$

в истинное высказывание. Другими словами, требуется найти множество истинности предиката $P(z)$, заданного на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Предикат $P(z)$ состоит из двух предикатов, соединённых операцией конъюнкции: $P(z) = A(z) \& B(z)$. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

Множеством истинности предиката $A(z) = (z > 5)$ являются целые числа 6, 7, 8 и т. д. Множеством истинности предиката $B(z) = (z - 2 < 15)$ являются все целые числа, меньшие 17.



Множество истинности исходного предиката — пересечение (общие элементы) множеств истинности образующих его предикатов:

$$P = A \cap B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}.$$

Его мощность $|P| = 11$.

Пример 6. Рассмотрим предикат $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$, определённый на множестве целых чисел. Найдём множество истинности этого предиката.

Зачастую задания такого рода формулируют несколько иначе. Например, так: «Найдите все целые числа x, для которых истинно высказывание $(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$».

Проанализируем отдельно каждый из элементарных предикатов $(50 < x^2)$ и $(50 > (x + 1)^2)$, решив соответствующие неравенства:

$50 < x^2$ истинно для всех целых $x \in]-\infty; -8] \cup [8; +\infty[$;

$50 > (x + 1)^2$ истинно для всех целых $x \in [-8; 6]$.

Определим значение исходного предиката на каждом из полученных подмножеств, причём отдельно рассмотрим значение $x = -8$ (оно попадает в два подмножества) и значение $x = 7$ (оно не попадает ни в одно подмножество):

$x \in Z$	$50 < x^2$	$50 > (x + 1)^2$	$(50 < x^2) \to (50 > (x + 1)^2)$
$]-\infty; -9]$	1	0	0
-8	1	1	1
$[-7; 6]$	0	1	1
7	0	0	1
$[8; +\infty[$	1	0	0

Итак, множеством истинности исходного предиката являются целые числа, принадлежащие отрезку $[-8; 7]$. Наименьшим элементом этого множества является число -8, наибольшим — число 7; мощность множества равна 16.

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Высказывание — это предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания, образованные из других высказываний, называются составными (сложными). Высказывание, никакая часть которого не является высказыванием, называется элементарным (простым). Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности образующих их высказываний и определённой трактовки связок (логических операций над высказываниями).

Логическая операция полностью может быть описана таблицей истинности, указывающей, какие значения принимает составное высказывание при всех возможных значениях образующих его элементарных высказываний.

Логические переменные		**Логические операции**					
		Отрицание	**Конъюнкция**	**Дизъюнкция**	**Импликация**	**Строгая дизъюнкция**	**Эквиваленция**
A	B	$\overline{A}$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант (0, 1), логических переменных, знаков логических операций и скобок.

Логические операции имеют следующий приоритет:

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, строгая дизъюнкция;
4) импликация, эквиваленция.

Операции одного приоритета выполняются в порядке их следования, слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций.

Предикáт — это утверждение, содержащее одну или несколько переменных. Из имеющихся предикатов с помощью логических операций можно строить новые предикаты.

Вопросы и задания

1. Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями. Обоснуйте свой выбор.
   1) Как пройти в библиотеку?
   2) Коля спросил: «Который час?»
   3) Картины Пикассо слишком абстрактны.
   4) Компьютеры могут быть построены только на основе двоичной системы счисления.
2. Из каждых трёх выберите два высказывания, являющихся отрицаниями друг друга:
   1) «$1999 < 2000$», «$1999 > 2000$», «$1999 \le 2000$»;
   2) «Петя решил все задания контрольной работы», «Петя не решил все задания контрольной работы», «Петя решил не все задания контрольной работы»;
   3) «Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна — спутник Земли», «Неверно, что Луна не является спутником Земли»;
   4) «Прямая a не параллельна прямой c», «Прямая a перпендикулярна прямой c», «Прямые a и c не пересекаются» (считаем, что прямые a и c лежат в одной плоскости);
   5) «Мишень поражена первым выстрелом», «Мишень поражена не первым выстрелом», «Неверно, что мишень поражена не первым выстрелом».
3. Рассмотрите следующие элементарные высказывания: A = «Река Днепр впадает в Чёрное море», B = «45 — простое число», C = «Вена — столица Австрии», D = «0 — натуральное число».

   Определите, какие из них истинные, а какие ложные.

   Составьте сложные высказывания, применяя каждый раз только одну из пяти логических операций ($\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) к высказываниям A, B, C и D. Сколько новых высказываний можно получить с помощью отрицания (инверсии)? Конъюнкции? Дизъюнкции? Импликации? Эквиваленции?

   Сколько всего новых высказываний можно получить? Сколько среди них будет истинных?
4. Представьте каждую пословицу в виде сложного логического высказывания, построенного на основе простых высказываний. Ответ обоснуйте при помощи таблиц истинности.
   1) На вкус и цвет товарищей нет.
   2) Если долго мучиться, что-нибудь получится.

3) Не зная броду, не суйся в воду.

4) Тяжело в ученье, легко в бою.

5) То не беда, что во ржи лебеда, то беда, что ни ржи, ни лебеды.

6) Где тонко, там и рвётся.

7) Или грудь в крестах, или голова в кустах.

8) За двумя зайцами погонишься — ни одного не поймаешь.

9) И волки сыты, и овцы целы.

5. Подберите вместо A, B, C, D такие высказывания, чтобы полученные сложные высказывания имели смысл:

1) если (A или B и C), то D;

2) если (не A и не B), то (C или D);

3) (A или B) тогда и только тогда, когда (C и не D).

6. Вычислите:

1) $1 \vee X \& 0$;

2) $X \& X \& 1$;

3) $0 \& X \vee 0$;

4) $0 \vee X \& X$.

7. Сколько из приведённых чисел Z удовлетворяют логическому условию: ((Z кратно 4) $\vee$ (Z кратно 5)) $\rightarrow$ (Z кратно 6)?

1) 4; 2) 6; 3) 7; 4) 12.

8. Найдите все целые числа Z, для которых истинно высказывание:

1) $\overline{(Z>5)} \& (Z^2 < 100)$;

2) $\overline{(Z > 5) \rightarrow (Z>10)}$.

9. Какие из высказываний A, B, C должны быть истинны и какие ложны, чтобы были ложны следующие высказывания?

1) $((\overline{A} \vee B) \& B) \rightarrow C$;

2) $\overline{A \& B} \leftrightarrow 1$.

10. Даны три числа в различных системах счисления:

$A = 23_{10}$, $B = 23_8$, $C = 1A_{16}$.

Переведите A, B и C в двоичную систему счисления и выполните поразрядно логические операции $(A \vee B) \& C$. Ответ дайте в десятичной системе счисления.

11. Логическое отрицание восьмиразрядного двоичного числа, записанное в десятичной системе счисления, равно 217. Определите исходное число в десятичной системе счисления.

12. Определите логическое произведение и логическую сумму всех двоичных чисел в диапазоне от 16_{10} до 22_{10}, включая

границы. Ответ запишите в восьмеричной системе счисления.

13. Сколько различных решений имеет логическое уравнение?
   1) $(A \vee B \vee C) \& (\overline{B} \& \overline{C} \& D) = 1$;
   2) $(A \vee B \vee C) \vee (\overline{B} \& C \& D) = 0$;
   3) $(A \to C) \vee (B \& A) \vee (D \to B \& C) = 0$;
   4) $(A \& B \& C) \to (\overline{C} \& D) = 1$.
14. Сколько решений имеет логическое уравнение $x_1 \& x_2 \vee x_3 \& x_4 = 1$?
15. Изобразите в декартовой прямоугольной системе координат множества истинности для следующих предикатов:
   1) $P(x, y) = (y \ge x) \& (y + x \ge 0) \& (y \le 1)$;
   2) $P(x, y) = (|x| \le 1) \& (|y| \le 1)$;
   3) $P(x, y) = (x^2 + y^2 \le 4) \& (x^2 + y^2 \ge 1)$.
16. Предикат $((8x - 6) < 75) \to (x(x - 1) > 65)$ определён на множестве целых чисел. Найдите его множество истинности. Укажите наибольшее целое число x, при котором предикат превращается в ложное высказывание.

§ 19
Таблицы истинности

19.1. Построение таблиц истинности

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Для того чтобы построить таблицу истинности логического выражения, достаточно:

1) определить число строк таблицы $m = 2^n$, где n — число переменных в логическом выражении;
2) определить число столбцов таблицы как сумму чисел логических переменных и логических операций в логическом выражении;

3) установить последовательность выполнения логических операций с учётом скобок и приоритетов операций;
4) заполнить строку с заголовками столбцов таблицы истинности, занеся в неё имена логических переменных и номера выполняемых логических операций;
5) выписать наборы входных переменных с учётом того, что они представляют собой ряд целых n-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$;
6) провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции.

Пример 1. Построим таблицу истинности для логического выражения

$$A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B}.$$

В этом выражении две логические переменные и пять логических операций. Всего в таблице истинности будет пять строк (2^2 плюс строка заголовков) и 7 столбцов.

Начнём заполнять таблицу истинности с учётом следующего порядка выполнения логических операций: сначала выполняются операции отрицания (в порядке следования), затем операции конъюнкции (в порядке следования), последней выполняется дизъюнкция.

$$A \overset{\boxed{3}}{\&} B \overset{\boxed{5}}{\vee} \overset{\boxed{1}}{\overline{A}} \overset{\boxed{4}}{\&} \overset{\boxed{2}}{\overline{B}}$$

A	*B*	1	2	3	4	5
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

Обратите внимание на последний столбец, содержащий конечный результат. Какой из рассмотренных логических операций он соответствует?

Логические выражения, зависящие от одних и тех же логических переменных, называются равносильными или эквивалентными, если для всех наборов входящих в них переменных значения выражений в таблицах истинности совпадают.

Таблица истинности, построенная в предыдущем примере, доказывает равносильность выражений $A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B}$ и $A \leftrightarrow B$.

Можно записать: $A \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} = A \leftrightarrow B$.

С помощью таблиц истинности докажите равносильность выражений $A \rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют **логической функцией**. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

19.2. Анализ таблиц истинности

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные A, B и C.

A	B	C	F
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Сколько из приведённых ниже логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $(A \vee C) \& B$;
2) $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$;
3) $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$;
4) $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$.

Ответить на поставленный вопрос можно, вычислив значение каждого логического выражения на каждом заданном наборе переменных и сравнив его с имеющимся значением F.

1) Логическое выражение $(A \vee C) \& B$ соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	B	C	$(A \vee C) \& B$	F
1	0	1	$(1 \vee 1) \& 0 = 1 \& 0 = 0$	0
1	1	0	$(1 \vee 0) \& 1 = 1 \& 1 = 1$	1
1	1	1	$(1 \vee 1) \& 1 = 1 \& 1 = 1$	1

2) Логическое выражение $(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности, т. к. уже на первом наборе значение рассматриваемого логического выражения не совпадает со значением F. Проведение дальнейших вычислений не имеет смысла.

A	B	C	$(A \vee B) \& (C \rightarrow A)$	F
1	0	1	$(1 \vee 0) \& (1 \rightarrow 1) = 1 \& 1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

3) Логическое выражение $(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$ не соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	B	C	$(A \& B \vee C) \& (B \rightarrow A \& C)$	F
1	0	1	$(1 \& 0 \vee 1) \& (0 \rightarrow 1 \& 1) = 1 \& 1 = 1$	0
1	1	0		1
1	1	1		1

4) Логическое выражение $(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$ соответствует данному фрагменту таблицы истинности:

A	B	C	$(A \rightarrow B) \vee (C \vee A \rightarrow B)$	F
1	0	1	$(1 \rightarrow 0) \vee (1 \vee 1 \rightarrow 0) = 0$	0
1	1	0	$(1 \rightarrow 1) \vee (0 \vee 1 \rightarrow 1) = 1$	1
1	1	1	$(1 \rightarrow 1) \vee (1 \vee 1 \rightarrow 1) = 1$	1

Итак, имеется два логических выражения, соответствующих заданному фрагменту таблицы истинности.

Можно ли утверждать, что в результате решения задачи мы нашли логическое выражение F?

Пример 3. Логическая функция F задаётся выражением:

$$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\ \&\ (\bar{x} \vee y).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F истинна.

?	?	?	F
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Определим, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

В исходном логическом выражении задействовано три логические переменные. Полная таблица истинности для этого выражения должна состоять из 8 (2^3) строк.

Наборам переменных, на которых логическое выражение истинно, соответствуют десятичные числа 0, 2, 3, 4 и 7.

Следовательно, наборам переменных, на которых логическое выражение ложно, должны соответствовать десятичные числа 1, 5 и 6 (их двоичные коды 001, 101 и 110). Построим по этим данным вторую часть таблицы истинности:

?	?	?	F
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Теперь выясним, при каких значениях x, y, z логическое выражение ложно: $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})\ \&\ (\bar{x} \vee y) = 0$. Логическое произведение ложно, если хотя бы один из операндов равен нулю. Таким образом, мы имеем две дизъюнкции, каждая из которых должна быть ложной. Это возможно только в случае равенства нулю каждого из операндов, входящих в дизъюнкцию. Подберём подходящие значения x, y и z, заполняя следующую таблицу:

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$				0
$\bar{x} \vee y$				0

Первая дизъюнкция равна нулю на наборе 011. Для равенства нулю второй дизъюнкции требуется, чтобы $x = 1$, $y = 0$, а z может быть и 0, и 1.

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	0
$\bar{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0

Сравним эту таблицу с восстановленным нами фрагментом исходной таблицы истинности, предварительно подсчитав, сколько раз каждая переменная принимает единичное значение.

Восстановленный фрагмент

?	?	?	F
0	0	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
2	1	2	

Таблица со значениями x, y и z

	x	y	z	F
$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0	1	1	0
$\bar{x} \vee y$	1	0	0	0
	1	0	1	0
	2	1	2	

Переменная y принимает единичное значение только один раз. Следовательно, ей соответствует второй столбец исходной таблицы. Из таблицы со значениями x, y и z следует, что при $y = 1$: $x = 0$, а $z = 1$. Следовательно, переменной z соответствует первый столбец, а переменной x — третий столбец исходной таблицы.

Убедиться в правильности полученного ответа можно, полностью заполнив следующую таблицу:

z	y	x	$A = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	$B = \bar{x} \vee y$	$A \& B$	F
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Таблицу значений, которые принимает логическое выражение при всех сочетаниях значений (наборах) входящих в него переменных, называют таблицей истинности логического выражения.

Истинность логического выражения можно доказать путём построения его таблицы истинности.

Функцию от n переменных, аргументы которой и сама функция принимают только два значения — 0 и 1, называют логической функцией. Таблица истинности может рассматриваться как способ задания логической функции.

Вопросы и задания

1. Что представляет собой таблица истинности?
2. Составлена таблица истинности для логического выражения, содержащего n переменных. Известно m — количество строк, в которых выражение принимает значение 0. Требуется выяснить, в скольких случаях логическое выражение примет значение 1 при следующих значениях n и m:
   1) $n = 6$, $m = 15$;
   2) $n = 7$, $m = 100$;
   3) $n = 10$, $m = 500$.

3. Постройте таблицы истинности для следующих логических выражений:
   1) $(A \to B) \leftrightarrow (A \,\&\, B)$;
   2) $(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A})$;
   3) $(A \to (C \to B)) \to (B \lor C)$.
4. Рассмотрите два составных высказывания:
   - F_1 = «Если одно слагаемое делится на 3 и сумма делится на 3, то и другое слагаемое делится на 3»;
   - F_2 = «Если одно слагаемое делится на 3, а другое слагаемое не делится на 3, то сумма не делится на 3».

   Формализуйте эти высказывания, постройте таблицы истинности для каждого из полученных выражений и убедитесь, что результирующие столбцы совпадают.
5. Логическое выражение, являющееся истинным при любом наборе входящих в него переменных, называется тождественно истинным. Убедитесь, что следующие логические выражения являются тождественно истинными:
   1) $A \to (B \to A)$;
   2) $(A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$;
   3) $(A \,\&\, C \to B) \to (C \to (A \lor B \to B \,\&\, C))$.
6. Какое из приведённых логических выражений равносильно выражению $(A \to C) \,\&\, (B \to C)$?
   1) $A \,\&\, B \to C$;
   2) $A \to B \to C$;
   3) $A \lor B \to C$;
   4) $A \leftrightarrow B \to C$.
7. Известен фрагмент таблицы истинности для логического выражения F, содержащего логические переменные A, B и C.

A	B	C	F
0	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Какое из приведённых далее логических выражений соответствуют этому фрагменту?

1) $A \& C \vee (B \to A)$;
2) $(A \vee B) \& (C \to A)$;
3) $(A \& B \vee C) \& (B \to A \& C)$;
4) $(\overline{B \to A}) \vee (C \vee A \to B)$;
5) ни одна из указанных формул.

8. Логическая функция F задаётся выражением

$$(A \& B \& \overline{C}) \vee (A \& B \& C) \vee (A \& \overline{B} \& \overline{C}).$$

Ниже приведён фрагмент таблицы истинности, содержащий все наборы переменных, на которых F ложна.

?	?	?	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0

Какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных A, B, C?

§ 20
Преобразование логических выражений

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики.

20.1. Основные законы алгебры логики

Приведём основные законы алгебры логики.

1. Переместительные (коммутативные) законы:
$A \& B = B \& A$;
$A \vee B = B \vee A$.
2. Сочетательные (ассоциативные) законы:
$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$;
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.
3. Распределительные (дистрибутивные) законы:
$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$;
$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$.
4. Законы идемпотентности (отсутствия степеней и коэффициентов):
$A \& A = A$;
$A \vee A = A$.
5. Закон противоречия:
$A \& \overline{A} = 0$.
6. Закон исключённого третьего:
$A \vee \overline{A} = 1$.
7. Закон двойного отрицания:
$\overline{\overline{A}} = A$.
8. Законы работы с константами:
$A \vee 1 = 1$; $A \vee 0 = A$;
$A \& 1 = A$; $A \& 0 = 0$.
9. Законы де Моргана:
$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;
$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$.
10. Законы поглощения:
$A \& (A \vee B) = A$;
$A \vee (A \& B) = A$.

Справедливость законов можно доказать построением таблиц истинности.

<u>**Пример 1.**</u> Упростим логическое выражение
$A \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C}$.

Последовательно применим дистрибутивный закон и закон исключённого третьего:

$$A \& B \& C \vee A \& B \& \overline{C} = A \& B \& (C \vee \overline{C}) = A \& B \& 1 = A \& B.$$