Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

10-11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

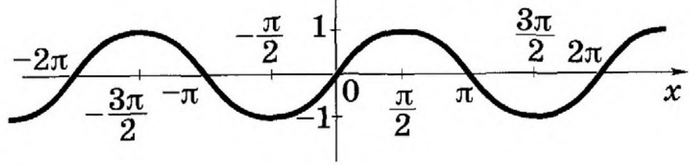
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Тригонометрические функции

$y = \sin x$

$\sin x = a$

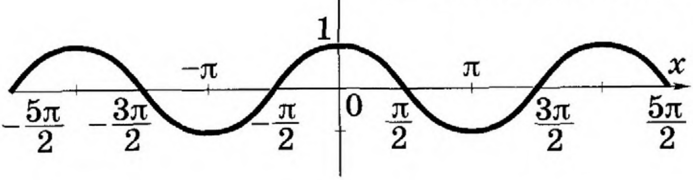
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$



$y = \cos x$

$\cos x = a$

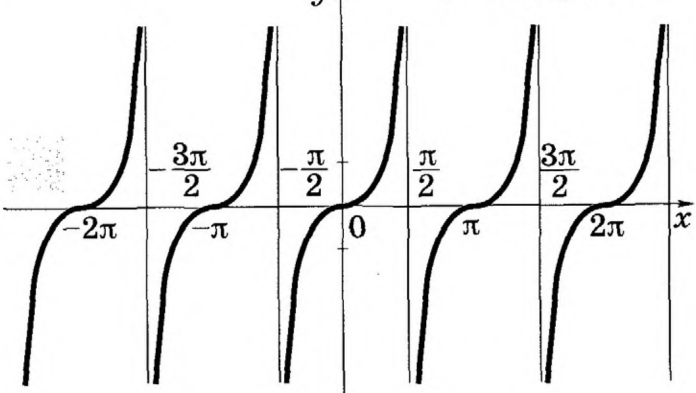
$x = \pm \arccos a + 2\pi n$



$y = \mathrm{tg}\,x$

$\mathrm{tg}\,x = a$

$x = \mathrm{arctg}\,a + \pi n$



ФГОС

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

10-11 классы

Учебник для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

3-е издание

Москва
«Просвещение»
2016

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72
М34

Авторы: *Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин*

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАО № 012-н от 29.01.14), **педагогической** (заключения РАО № 410 от 29.01.14, № 214 от 05.02.15) и **общественной** (заключения РКС № 403 от 07.02.14, № 884 от 01.04.15) экспертиз.

Условные обозначения

выделение основного материала

текст, который важно знать и полезно помнить

▶ ◁ решение задачи

● ○ обоснование утверждения или вывод формулы

обязательные задачи

дополнительные задачи

трудные задачи

* дополнительный более сложный материал

М34 **Математика:** алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.]. — 3-е изд. — М. : Просвещение, 2016. — 463 с. : ил. — ISBN 978-5-09-037071-4.

В данном учебнике завершается развитие основных идей курса алгебры 7—9 классов авторов Ш. А. Алимова и др. Элементарные функции изучаются в 10 классе классическими элементарными методами без привлечения производной; числовая линия и линия преобразований развиваются параллельно с функциональной; начала математического анализа рассматриваются в 11 классе. Система упражнений представлена на трёх уровнях сложности. Задачи повышенной трудности в конце учебника содержат богатый материал для подготовки в вузы с повышенными требованиями по математике.

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14 я72+22.161.я72

ISBN 978-5-09-037071-4

I

глава

Действительные числа

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров

Целые и рациональные числа

§ 1

Изучение математики начинается со знакомства с натуральными числами, т. е. с числами 1, 2, 3, 4, 5, ... При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако разность и частное натуральных чисел могут не быть натуральными числами.

Дополнением натуральных чисел нулём и отрицательными числами (т. е. числами, противоположными натуральным) множество натуральных чисел расширяется до множества целых чисел, т. е. чисел 0, ±1, ±2, ±3, ... При сложении, вычитании и умножении целых чисел всегда получаются целые числа. Однако частное двух целых чисел может не быть целым числом.

Введение рациональных чисел, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, позволило находить частное любых двух целых чисел при условии, что делитель не равен нулю. Каждое целое число m также является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$.

При выполнении четырёх арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа.

Если рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{10^k}$, где m — целое число, k — натуральное число, то его можно записать в виде конечной десятичной дроби. Например, число $\frac{327}{100}$ можно записать так: 3,27; число $-\frac{23}{10}$ можно записать так: $-2{,}3$; число $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2}$ можно записать так: $\frac{4}{10}$ или 0,4.

Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{9}$, $\frac{3}{7}$. Если, например, попытаться записать число $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби, используя алгоритм деления уголком, то получится бесконечная десятичная дробь 0,3333..., которую называют *периодической*, повторяющуюся цифру **3** — её *периодом*. Периодическую дробь 0,333... коротко записывают так: 0,(3); читается: «Нуль целых и три в периоде».

Вообще, периодическая дробь — это бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого десятичного знака, повторяется одна и та же цифра или группа цифр — период дроби.

Например, десятичная дробь

$$23{,}14565656... = 23{,}14(56)$$

периодическая с периодом 56; читается «23 целых, 14 сотых и 56 в периоде».

Задача 1 Записать число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

▶ Воспользуемся алгоритмом деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-27 & 11 \\
\underline{22} & 2{,}4545\ldots \\
-50 & \\
\underline{44} & \\
-60 & \\
\underline{55} & \\
-50 & \\
\underline{44} & \\
6\ldots &
\end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Следовательно, $\frac{27}{11} = 2,4545... = 2,(45)$. ◁

Вообще, при делении целого числа m на натуральное число n на некотором шаге остаток может стать равным нулю или остатки начинают повторяться, так как каждый из остатков меньше n. Тогда начинают повторяться и цифры частного.

В первом случае в результате деления получается целое число или конечная десятичная дробь, во втором случае — бесконечная десятичная периодическая дробь. Например:

$$\frac{360}{15} = 24, \quad \frac{15}{4} = 3,75, \quad \frac{29}{9} = 3,222... = 3,(2).$$

Заметим, что каждое целое число или конечную десятичную дробь можно считать и бесконечной десятичной периодической дробью с периодом, равным нулю. Например:

$27 = 27,000... = 27,(0), \quad 3,74 = 3,74000... = 3,74(0).$

Итак, каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Справедливо и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом, так как может быть представлена в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число.

Задача 2 Представить бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(18) в виде обыкновенной.

▶ Пусть $x = 0,2(18) = 0,2181818...$. Так как в записи этого числа до периода содержится только один десятичный знак, то, умножая на 10, получаем

$$10x = 2,181818... . \qquad (1)$$

Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому, умножая обе части последнего равенства на $10^2 = 100$, находим

$$1000x = 218,181818... . \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $990x = 216$. Отсюда $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$. ◁

Задача 3 Показать, что $2{,}999... = 3$.

▶ Пусть $x = 2{,}(9)$. Тогда $10x = 29{,}(9)$, откуда $9x = 27$, $x = 3$. ◁

Аналогично можно показать, что любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной дроби двумя способами: с периодом 0 и с периодом 9. Например,

$$1{,}75 = 1{,}75000... = 1{,}74999...,$$
$$-0{,}2 = -0{,}2000... = -0{,}199999... .$$

Условимся в дальнейшем не использовать бесконечные десятичные дроби с периодом 9. Вместо таких дробей будем записывать конечные десятичные дроби или бесконечные десятичные дроби с периодом 0. Например,

$$5{,}2999... = 5{,}30000... = 5{,}3.$$

Упражнения

1 Записать в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{8}{11}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $-8\frac{2}{7}$; 6) $\frac{13}{99}$.

2 Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

1) $\frac{2}{11}+\frac{1}{9}$; 2) $\frac{8}{13}+\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}+1{,}25$;

4) $\frac{1}{6}+0{,}33$; 5) $\frac{3}{14}\cdot 1{,}05$; 6) $\frac{7}{9}\cdot 1{,}7$.

3 Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

1) $0{,}(6)$; 2) $1{,}(55)$; 3) $0{,}1(2)$;

4) $-0{,}(8)$; 5) $-3{,}(27)$; 6) $-2{,}3(82)$.

4 Вычислить:

1) $(20{,}88 : 18 + 45 : 0{,}36) : (19{,}59 + 11{,}95)$;

2) $\frac{7}{36}\cdot 9+8\cdot\frac{11}{32}+\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{18}$.

5 Вычислить:

1) $\left(3\frac{4}{25}+0{,}24\right)2{,}15+\left(5{,}1625-2\frac{3}{16}\right)\frac{2}{5}$;

2) $0{,}364:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0{,}125+2\frac{1}{2}\cdot 0{,}8$.

§ 2 Действительные числа

В § 1 было показано, что любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби и каждая бесконечная десятичная периодическая дробь является рациональным числом. Если же бесконечная десятичная дробь непериодическая, то она не является рациональным числом. Например, дробь 0,101001000100001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и, вообще, после n-й цифры стоит n нулей, не является периодической. Поэтому написанная дробь не представляет никакого рационального числа. В этом случае говорят, что данная дробь является *иррациональным числом*.

Иррациональным числом называется бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Иррациональные числа, как и рациональные, могут быть положительными и отрицательными. Например, число 0,123456..., в котором после запятой записаны подряд все натуральные числа, является положительным иррациональным числом. Число −5,246810..., в котором после запятой записаны подряд все чётные числа, является отрицательным иррациональным числом.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt[3]{3}$, π также являются иррациональными, так как можно доказать, что они могут быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество *действительных чисел*.

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь, т. е. дробь вида

$$+a_0,a_1a_2a_3 \ldots \text{ или } -a_0,a_1a_2a_3 \ldots,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а каждая из букв a_1, a_2, ... — это одна из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например: 1) в записи действительного числа $\pi = 3{,}1415...$ число $a_0 = 3$, а первые четыре десятичных знака таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$; 2) в записи действительного числа $-\sqrt{234} = -15{,}297058...$ число $a_0 = 15$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 2$, $a_2 = 9$, $a_3 = 7$, $a_4 = 0$ и т. д.;
3) в записи действительного числа $37{,}19 = 37{,}19000...$ число $a_0 = 37$, а десятичные знаки таковы: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_n = 0$ при $n \geqslant 3$. Заметим, что $37{,}1999... = 37{,}2000... = 37{,}2$.

Действительное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Бесконечная десятичная дробь равна нулю, если все цифры в её записи — нули. Положительное действительное число — это десятичная дробь, не равная нулю, со знаком «+», а отрицательное — со знаком «−». Знак «+» перед дробью обычно опускается.

Вам известно, как выполняются действия над конечными десятичными дробями. Арифметические операции над действительными числами, т. е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями. Например, вычислим приближённые значения $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. С помощью микрокалькулятора находим

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135..., \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508... .$$

Поэтому с точностью до единицы

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1 \approx 3,$$

с точностью до одной десятой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14 \approx 3{,}1,$$

с точностью до одной сотой

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \approx 3{,}15 \text{ и т. д.}$$

Числа 3; 3,1; 3,15 и т. д. являются последовательными десятичными приближениями (первые два с недостатком, третье с избытком) значения суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Итак, при отыскании суммы $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ заменялись их приближениями — рациональными числами, и выполнялось сложение чисел по известным правилам.

Аналогично, вычисляя произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, например, с точностью до 0,1, получаем

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}41 \cdot 1{,}73 = 2{,}4393 \approx 2{,}4.$$

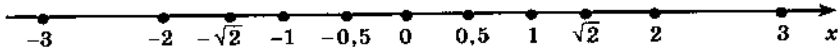


Рис. 1

Вообще, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательные приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д. Тогда погрешность приближения $|x - x_n|$ как угодно близко приближается к нулю (стремится к нулю). В этом случае пишут

$$|x - x_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} |x - x_n| = 0$$

(читается: «$|x - x_n|$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности» или «предел $|x - x_n|$ при n, стремящемся к бесконечности, равен нулю»). Это означает, что x_n как угодно близко приближается к x, т. е.

$$x_n \to x \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Отметим, что все основные законы и правила действий над рациональными числами сохраняются и для действительных чисел (переместительный, сочетательный и распределительный законы, правила сравнения и т. д.).

Модуль действительного числа x **обозначается $|x|$ и определяется так же, как и модуль рационального числа:**

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, если $x = -0{,}1010010001\ldots$, то $|x| = -x = 0{,}1010010001\ldots$.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой прямой (рис. 1).

Покажем, например, как можно геометрически указать на числовой прямой точку с координатой $\sqrt{2}$. Построим квадрат со стороной 1 (рис. 2) и с помощью циркуля отложим диагональ OA на числовой оси.

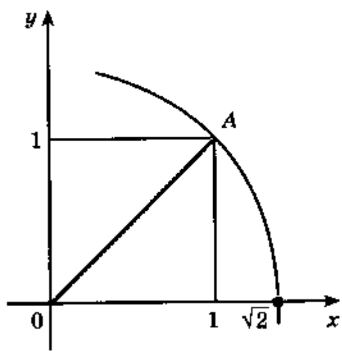


Рис. 2

Заметим, что если бы не было иррациональных чисел и соответствующих им точек числовой оси, то прямая оказалась бы с «дырками», в частности, не было бы на числовой оси точки с координатой $\sqrt{2}$.

Множество действительных чисел «заполняет» всю числовую прямую: каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число. Точку, изображающую число a, также обозначают буквой a. Отметим, что если $a < b$, то точка a лежит левее точки b.

Множество всех действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Запись $x \in \boldsymbol{R}$ (читается: «x принадлежит $\boldsymbol{R}$») означает, что x является действительным числом.

Упражнения

6 (Устно.) Какие из данных десятичных дробей являются иррациональными числами:

1) 16,9; 2) 7,25(4);

3) 1,21221222... (после n-й единицы стоит n двоек);

4) 99,1357911... (после запятой записаны подряд все нечётные числа)?

7 Установить, какая из пар чисел 5,4 и 5,5 или 5,5 и 5,6 образует десятичные приближения числа $\sqrt{31}$ с недостатком и с избытком.

8 Какое из равенств $|x| = x$ или $|x| = -x$ является верным, если:

1) $x = 5 - \sqrt{7}$; 2) $x = 4 - 3\sqrt{3}$; 3) $x = 5 - \sqrt{10}$?

9 Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения:

1) $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$; 2) $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3})$;

3) $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2}$; 4) $(5\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{3}$;

5) $(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2$; 6) $(\sqrt{5} - 1)^2 - (2\sqrt{5} + 1)^2$.

10 Вычислить:

1) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28}$; 2) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{50} : \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{12} : \sqrt{27}$.

11 Сравнить числовые значения выражений:

1) $\sqrt{3{,}9} + \sqrt{8}$ и $\sqrt{1{,}1} + \sqrt{17}$; 2) $\sqrt{11} - \sqrt{2{,}1}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3{,}1}$.

12 Вычислить:

1) $\sqrt{(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{16 - 6\sqrt{7}} + \sqrt{7}) \cdot 3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}) \cdot 2 + 7}$.

§ 3 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Напомним: геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, где $b_1 \neq 0$, что для всех натуральных n выполняется равенство $b_{n+1} = b_n q$, где $q \neq 0$.

Например, таковы последовательности:

$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots \quad (b_1 = 1,\ q = 3);$

$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots, \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \ldots \left(b_1 = 1,\ q = \frac{1}{5}\right);$

$2, -4, 8, -16, \ldots, -(-2)^n, \ldots \ (b_1 = 2,\ q = -2).$

По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$ вычисляется n-й член геометрической прогрессии.

По формуле $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ вычисляется сумма её первых n членов, если $q \neq 1$, а если $q = 1$, то $S_n = b_1 n$.

Среди геометрических прогрессий особый интерес представляют так называемые *бесконечно убывающие геометрические прогрессии.*

Начнём с примера. Рассмотрим квадраты, изображённые на рисунке 3. Сторона первого квадрата равна 1, сторона второго равна $\frac{1}{2}$, сторона третьего — $\frac{1}{2^2}$ и т. д.

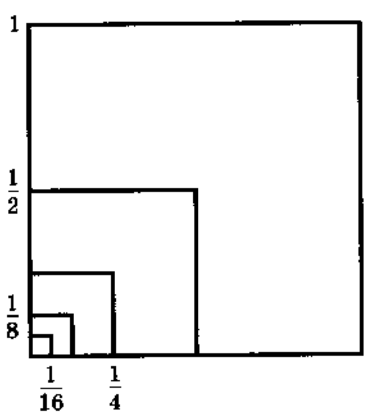


Рис. 3

Таким образом, стороны квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots . \qquad (1)$$

Площади этих квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \ldots,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ \ldots . \qquad (2)$$

Из рисунка 3 видно, что стороны квадратов и их площади с возрастанием номера n становятся всё меньше, приближаясь к нулю. Поэтому каждая из прогрессий (1) и (2) называется *бесконечно убывающей.*

Рассмотрим теперь геометрическую прогрессию

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ \ldots .$$

Знаменатель этой прогрессии $q = -\frac{1}{3}$, а её члены

$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{3},\ b_3 = \frac{1}{9},\ b_4 = -\frac{1}{27}$ и т. д.

С возрастанием номера n члены этой прогрессии приближаются к нулю. Эту прогрессию также называют бесконечно убывающей. Отметим, что модуль её знаменателя меньше единицы: $|q| < 1$.

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

Задача 1 Доказать, что геометрическая прогрессия, заданная формулой n-го члена $b_n = \frac{3}{5^n}$, является бесконечно убывающей.

▶ По условию $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, откуда $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$.

Так как $|q| < 1$, то данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. ◁

На рисунке 4 изображён квадрат со стороной 1. Отметим штриховкой его половину, затем половину оставшейся части и т. д. Площади заштрихованных прямоугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots .$$

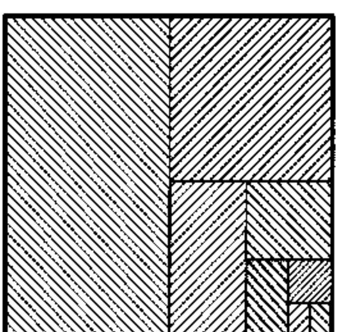


Рис. 4

Если заштриховать все получающиеся таким образом прямоугольники, то штриховкой покроется весь квадрат. Естественно считать, что сумма площадей всех заштрихованных прямоугольников равна 1, т. е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

В левой части этого равенства стоит сумма бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим сумму первых n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Если n неограниченно возрастает, то $\frac{1}{2^n}$ как угодно близко приближается к нулю, т. е.

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ или } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$.

Бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ считают равной 1.

Итак, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots .$$

Например, для прогрессии

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots,$$

где $b_1 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$, имеем

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \ldots,$$

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots .$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}$.

Выведем *формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии* с помощью формулы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Запишем её так:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n. \qquad (3)$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_1}{1-q} q^n = 0$, и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Таким образом, сумма S бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) при $b_1 = 1$ получаем $S = \frac{1}{1-q}$. Это равенство обычно записывают так:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Подчеркнём, что это равенство справедливо при $|q| < 1$, в частности при $q = 0$.

Задача 2 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots .$$

▶ Так как $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{6}$, то $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$, и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$. ◁

Задача 3 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = -1$, $q = \frac{1}{7}$.

▶ Применяя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$, при $n = 3$ получаем

$$-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}, \quad -1 = b_1 \cdot \frac{1}{49},$$

откуда $b_1 = -49$. По формуле (4) находим $S = \dfrac{-49}{1-\frac{1}{7}} = -57\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 С помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии записать бесконечную периодическую десятичную дробь $a = 0{,}(15) = 0{,}151515...$ в виде обыкновенной дроби.

▶ Составим следующую последовательность приближённых значений данной бесконечной дроби:

$$a_1 = 0{,}15 = \frac{15}{100}, \quad a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}, \quad \dots .$$

Запись приближений показывает, что данную периодическую дробь можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots .$

По формуле (3) получаем $a = \dfrac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$. ◁

Упражнения

13 Выяснить, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой *n-го* члена:

1) $b_n = -5^{2n}$; 2) $b_n = 2^{3n}$.

14 Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_4 = 88$, $q = 2$; 2) $b_1 = 11$, $b_4 = 88$.

15 Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

1) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$; 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;

3) $-27, -9, -3, \dots$; 4) $-64, -32, -16, \dots$.

16 Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

1) $b_1 = 40$, $b_2 = -20$; 2) $b_7 = 12$, $b_{11} = \frac{3}{4}$;

3) $b_7 = -30$, $b_6 = 15$; 4) $b_5 = 9$, $b_{10} = -\frac{1}{27}$.

17 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}2)^n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{7^n}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\right)$.

18 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q=-\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{8}$; 2) $q=\frac{1}{3}$, $b_5=\frac{1}{81}$;

3) $q=-\frac{1}{3}$, $b_1=9$; 4) $q=-\frac{1}{2}$, $b_4=\frac{1}{8}$.

19 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$; 2) $-25, -5, -1, \ldots$.

20 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби:

1) 0,(5); 2) 0,(8); 3) 0,(32); 4) 0,2(5).

21 Выяснить, является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она задана формулой n-го члена:

1) $b_n = 3\cdot(-2)^n$; 2) $b_n = -5\cdot 4^n$;

3) $b_n = 8\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

22 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q=\frac{1}{2}$, $b_5=\frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4=\frac{9}{8}$.

23 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 30. Найти:

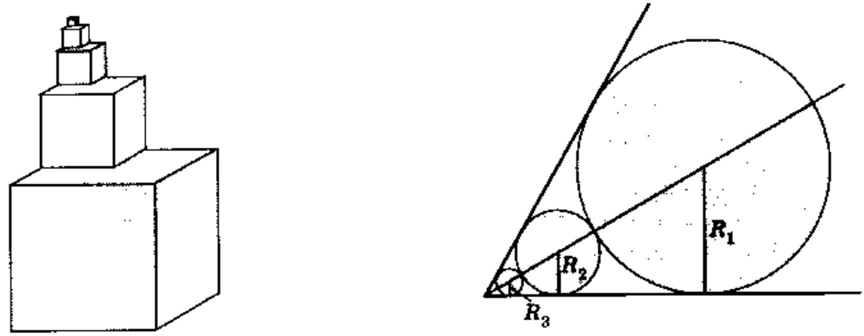
1) b_1, если $q=\frac{1}{5}$; 2) q, если $b_1=20$.

24 Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2^n}{2^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}+2}{3^n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5^n+1)^2}{5^{2n}}$.

25 На куб со стороной a поставили куб со стороной $\frac{a}{2}$, на него куб со стороной $\frac{a}{4}$, затем куб со стороной $\frac{a}{8}$ и т. д. (рис. 5, *а*). Найти высоту получившейся фигуры.

26 В угол, равный 60°, последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 5, *б*). Радиус первой окружно-



а) б)

Рис. 5

сти равен R_1. Найти радиусы R_2, R_3, ..., R_n, ... остальных окружностей и показать, что они образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что сумма $R_1 + 2\,(R_2 + R_3 + \ldots + R_n + \ldots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

§ 4 Арифметический корень натуральной степени

Задача 1 Решить уравнение $x^4 = 81$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^4 - 81 = 0$, или $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$.

Так как $x^2 + 9 \neq 0$, то $x^2 - 9 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. ◁

Итак, уравнение $x^4 = 81$ имеет два действительных корня $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. Их называют корнями четвёртой степени из числа 81, а положительный корень (число 3) называют арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81 и обозначают $\sqrt[4]{81}$. Таким образом, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Можно доказать, что уравнение $x^n = a$, где n — натуральное число, a — неотрицательное число, имеет единственный неотрицательный корень. Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.

Определение. ***Арифметическим корнем*** **натуральной степени $n \geqslant 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

Арифметический корень n-й степени из числа a обозначается так: $\sqrt[n]{a}$. Число a называется *подкоренным выражением*. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Арифметический корень второй степени называют также *квадратным корнем*, а корень третьей степени — *кубическим корнем*.

В тех случаях, когда ясно, что речь идёт об арифметическом корне n-й степени, кратко говорят: «Корень n-й степени».

Чтобы, используя определение, доказать, что корень n-й степени $\sqrt[n]{a}$ $(a \geqslant 0)$ равен b, нужно показать, что: 1) $b \geqslant 0$; 2) $b^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 \geqslant 0$ и $4^3 = 64$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$, а также $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Например, $(\sqrt[5]{7})^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется *извлечением корня n-й степени*. Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.

Задача 2 Решить уравнение $x^3 = 8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 - 8 = 0$, или

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0, \quad (x - 2)((x + 1)^2 + 3) = 0.$$

Так как $(x + 1)^2 + 3 \neq 0$, то $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$. ◁

Итак, уравнение $x^3 = 8$ имеет один действительный корень $x = 2$. Так как $2 \geqslant 0$, то это число — арифметический корень из 8, т. е. $\sqrt[3]{8} = 2$.

Задача 3 Решить уравнение $x^3 = -8$.

▶ Запишем уравнение в виде $x^3 + 8 = 0$, или

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0, \quad (x + 2)((x - 1)^2 + 3) = 0.$$

Так как $(x-1)^2+3 \neq 0$, то $x+2=0$, откуда $x=-2$. ◁

Итак, уравнение $x^3=-8$ имеет один действительный корень $x=-2$. Так как $-2<0$, то число -2 является корнем из числа -8, но оно не является арифметическим корнем. Число -2 называют *корнем кубическим из числа* -8 и обозначают $\sqrt[3]{-8}$:

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2.$$

Вообще, для любого нечётного натурального числа $2k+1$ уравнение $x^{2k+1}=a$ при $a<0$ имеет только один корень, причём отрицательный. Этот корень обозначается, как и арифметический корень, символом $\sqrt[2k+1]{a}$. Его называют *корнем нечётной степени из отрицательного числа*.

Например, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a=|a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Например, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Задача 4 Вычислить

$\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}$.

▶ $\sqrt[3]{-0{,}027}-\sqrt[4]{0{,}0016}-\sqrt[6]{729}-\sqrt[7]{-128}=\sqrt[3]{-(0{,}3)^3}-$
$-\sqrt[4]{(0{,}2)^4}-\sqrt[6]{3^6}-\sqrt[7]{-2^7}=-0{,}3-0{,}2-3+2=-1{,}5$. ◁

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если $a \geqslant 0$, $b>0$, а n, m и k — натуральные числа, причем $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, то

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.
5. $\sqrt[kn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Отметим, что в свойстве 1 число b может также быть равным 0; в свойстве 3 число m может быть любым целым, если $a>0$.

Докажем, например, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

2) $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = ab$, так как $(\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$. ○

Аналогично доказываются и остальные свойства. Приведём примеры применения свойств арифметического корня.

1) $\sqrt[4]{27}\,\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27\cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{256}{625}} : \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{256}{625} : \dfrac{4}{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{4}{5}$;

3) $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$;

4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$;

5) $(\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$.

Задача 5 Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

▶ Используя свойства арифметического корня, получаем $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} = \dfrac{a^3 b^2}{\sqrt[6]{a^{12} b^6}} = \dfrac{a^3 b^2}{a^2 b} = ab$. ◁

Отметим ещё одно свойство арифметического корня чётной степени.

При любом значении a справедливо равенство
$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|,$$ где k — натуральное число.

● Воспользуемся определением арифметического корня:

1) $|a| \geqslant 0$ по определению модуля;

2) $|a|^{2k} = a^{2k}$, так как $|a|^2 = a^2$. ○

Задача 6 Упростить выражение $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6}$, если $3 < x < 5$.

▶ $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = |x-5| + |x-3|$. Так как $3 < x < 5$, то $|x-5| = -(x-5) = 5-x$, $|x-3| = x-3$. Поэтому $\sqrt[4]{(x-5)^4} + \sqrt[6]{(x-3)^6} = 5 - x + x - 3 = 2$. ◁

Упражнения

27 (Устно.) 1) Найти арифметический квадратный корень из числа: 1; 0; 16; 0,81; 169; $\frac{1}{289}$.

2) Найти арифметический кубический корень из числа: 1; 0; 125; $\frac{1}{27}$; 0,027; 0,064.

3) Найти арифметический корень четвёртой степени из числа: 0; 1; 16; $\frac{16}{81}$; $\frac{256}{625}$; 0,0016.

Вычислить (28—30).

28 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$.

29 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$.

30 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

31 Решить уравнение:

1) $x^4 = 256$; 2) $x^5 = -\frac{1}{32}$; 3) $5x^5 = -160$; 4) $2x^6 = 128$.

Вычислить (32—36).

32 1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32} - 0{,}5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0{,}001} - \sqrt[4]{0{,}0016}$.

33 1) $\sqrt[3]{343 \cdot 0{,}125}$; 2) $\sqrt[3]{512 \cdot 216}$; 3) $\sqrt[5]{32 \cdot 100000}$.

34 1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$; 2) $\sqrt[4]{11^4 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt[5]{(0{,}2)^5 \cdot 8^5}$; 4) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 21^7}$.

35 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; 2) $\sqrt[3]{0{,}2} \cdot \sqrt[3]{0{,}04}$; 3) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$; 4) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$.

36 1) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$;

3) $\sqrt[4]{3^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^8}$; 4) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$.

37[1] Извлечь корень:

1) $\sqrt[3]{64x^3z^6}$; 2) $\sqrt[4]{a^8b^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$; 4) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}}$.

38 Упростить выражение:

1) $\sqrt[3]{2ab^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}$; 2) $\sqrt[4]{3a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{27a^2b}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}$.

Вычислить **(39—40)**.

39 1) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 4) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

40 1) $\sqrt[4]{324}:\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{2000}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;

5) $(\sqrt{25}-\sqrt{45}):\sqrt{5}$; 6) $(\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}):\sqrt[3]{5}$.

41 Упростить выражение:

1) $\sqrt[5]{a^6b^7}:\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $\sqrt[3]{81x^4y}:\sqrt[3]{3xy}$;

3) $\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}:\sqrt[3]{\frac{y}{9x^2}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2b}{a^3}}:\sqrt[4]{\frac{a}{8b^3}}$.

Вычислить **(42—43)**.

42 1) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; 2) $(\sqrt[6]{9})^{-3}$; 3) $(\sqrt[10]{32})^2$; 4) $(\sqrt[8]{16})^{-4}$.

43 1) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; 2) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[9]{3^7}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

44 Упростить выражение:

1) $(\sqrt[3]{x})^6$; 2) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; 3) $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b})^6$;

4) $(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3})^{12}$; 5) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; 6) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}}\right)^4$.

45 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[6]{x+3}$; 3) $\sqrt[6]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Вычислить **(46—47)**.

46 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены положительные числа, если нет дополнительных условий.

47 1) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$;

5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; 6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$.

Упростить выражение (**48—49**).

48 1) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}\cdot\sqrt[3]{27b}$; 2) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$.

49 1) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt[4]{\sqrt{x}}\right)^8$;

3) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}}-\left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$; 4) $\left(\left(\sqrt[5]{a\sqrt[5]{a}}\right)^5-\sqrt[5]{a}\right):\sqrt[10]{a^2}$.

50 Вычислить:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; 3) $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})$.

51 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ при: а) $x\geqslant 2$; б) $x<2$;

2) $\sqrt{(3-x)^6}$ при: а) $x\leqslant 3$; б) $x>3$;

3) $\sqrt[4]{(x+6)^4}+\sqrt{(x-3)^2}$, если $-1<x<2$;

4) $\sqrt[6]{(2x+1)^6}-\sqrt[4]{(4+x)^4}$, если $-3<x<-1$.

52 Сравнить значения выражений:

1) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{30}$ и $\sqrt[3]{63}$; 2) $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

53 Доказать, что:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$;

2) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

54 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$.

Степень с рациональным и действительным показателями

§ 5

1. Степень с рациональным показателем.

Задача 1 Вычислить $\sqrt[4]{5^{12}}$.

▶ Так как $5^{12} = (5^3)^4$, то $\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$. ◁

Таким образом, можно записать $\sqrt[4]{5^{12}} = 125 = 5^3$ или $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}}$, так как $3 = \frac{12}{4}$.

Точно так же можно записать, что $\sqrt[5]{7^{-15}} = 7^{-\frac{15}{5}}$.

Если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

● По условию $\frac{m}{n} = k$ — целое число, откуда $m = nk$.

Применяя свойства степени и арифметического корня, получаем

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}. \ ○$$

Если же частное $\frac{m}{n}$ не является целым числом, то степень $a^{\frac{m}{n}}$, где $a > 0$, определяют так, чтобы осталась верной формула (1), т. е. и в этом случае считают, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, формула (1) справедлива для любого целого числа m и любого натурального числа $n \geqslant 2$ и $a > 0$. Например:

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$

$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7\sqrt[4]{7};$

$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$

Напомним, что рациональное число r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Тогда по формуле (1) получаем $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Таким образом, степень определена для любого рационального показателя r и любого положительного основания a.

Если $r = \frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a = 0$, причём $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Поэтому считают, что при $r > 0$ выполняется равенство $0^r = 0$.

Пользуясь формулой (1), степень с рациональным показателем можно представить в виде корня и наоборот.

Так как $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, где n и k — натуральные числа, m — целое число, то при любом $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}. \qquad (2)$$

Например, $8^{\frac{5}{15}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$.

Можно показать, что все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$. 2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$. 4. $(ab)^p = a^p b^p$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

В основе доказательства этих свойств лежат свойства корней.

Докажем, например, свойство $a^p a^q = a^{p+q}$.

● Пусть $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$, где n и l — натуральные числа, m и k — целые числа. Нужно доказать, что

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}}. \qquad (3)$$

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть равенства (3) в виде

$$a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{ml}{nl}}a^{\frac{kn}{nl}}.$$

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем

$$a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{k}{l}}=a^{\frac{ml}{nl}}a^{\frac{kn}{nl}}=\sqrt[nl]{a^{ml}}\cdot\sqrt[nl]{a^{kn}}=\sqrt[nl]{a^{ml}\cdot a^{kn}}=$$

$$=\sqrt[nl]{a^{ml+kn}}=a^{\frac{ml+kn}{nl}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}. \bigcirc$$

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Приведём примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}}\cdot 7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=7;$

2) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}=16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^{4\cdot\frac{3}{4}}=2^3=8;$

4) $24^{\frac{2}{3}}=(2^3\cdot 3)^{\frac{2}{3}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=4\sqrt[3]{3^2}=4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}.$

Задача 2 Вычислить $25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

▶ $25^{\frac{1}{5}}\cdot 125^{\frac{1}{5}}=(25\cdot 125)^{\frac{1}{5}}=(5^5)^{\frac{1}{5}}=5.$ ◁

Задача 3 Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

▶ $$\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab.$$ ◁

Задача 4 Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}.$$

▶ $$\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$
$= 1+a-(1-a)=2a.$ ◁

Задача 5* Вкладчик поместил в банк 10 000 р. Банк ежегодно начисляет вкладчику 3% от суммы вклада. Какую сумму денег получит вкладчик через 3 года и 5 месяцев?

▶ Искомая сумма вычисляется по формуле сложных процентов:

$$S=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

где a — первоначальная сумма денег, p — число процентов, начисляемых банком в год, t — число лет, в течение которых деньги находились в банке. В данной задаче $a = 10\,000$, $p = 3$, $t=3\frac{5}{12}$.

По формуле сложных процентов находим $S=10\,000\cdot 1{,}03^{3\frac{5}{12}}$. Вычисления можно провести на микрокалькуляторе, имеющем клавишу $\boxed{y^x}$.

Ответ 11 062 р. 70 к. ◁

2. Степень с действительным показателем.

Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем, на примере $3^{\sqrt{2}}$.

Пусть $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ — последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ (например, с недостатком):

$$r_1 = 1{,}4,\ r_2 = 1{,}41,\ r_3 = 1{,}414,\ \dots .$$

Эта последовательность стремится к числу $\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\sqrt{2}$.

Числа r_1, r_2, r_3, ... являются рациональными, и для них определены степени 3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, ..., т. е. определена последовательность

$$3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ \dots\ .$$

Можно показать, что эта последовательность стремится к некоторому действительному числу, которое обозначают $3^{\sqrt{2}}$, т. е. $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$.

Вообще, пусть $a > 0$ и x — произвольное иррациональное число. Рассмотрим последовательность x_1, x_2, ..., x_n, ... десятичных приближений числа x. Эта последовательность имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Можно показать, что последовательность a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}, ... также имеет предел. Этот предел обозначают a^x и называют степенью числа a с показателем x (подробнее см. в Приложении).

Таким образом, степень a^x определена для любого $a > 0$ и любого действительного показателя x.

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом:

$$a^x > 0 \text{ при } x \in R,\ a > 0.$$

Если основание степени $a = 0$, то степень 0^x определяют только при $x > 0$ и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^{0,1} = 0$. При $x \leqslant 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Например, выражения 0^{-1}, $0^{-\sqrt{2}}$ смысла не имеют.

При таком определении степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем. Доказательство этих свойств для степени с действительным показателем проводится в курсе высшей математики.

Задача 6 Упростить выражение $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}}$.

▶ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} = \frac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \frac{a^2}{a} = a. \ \triangleleft$$

Приведём ещё одно свойство степени, также доказываемое в курсе высшей математики с помощью теории пределов.

Для любого $a > 1$ и любого $x > 0$ число a^x больше 1, т. е. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$. (1)

С помощью свойств степени с действительным показателем доказывается следующая теорема:

Теорема. Пусть $a > 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} < a^{x_2}$.

● По условию $x_2 - x_1 > 0$. Поэтому по доказанному свойству (1) имеем $a^{x_2 - x_1} > 1$. Умножив обе части этого равенства на положительное число a^{x_1}, получим $a^{x_1} a^{x_2 - x_1} > a^{x_1}$.

Отсюда по свойству умножения степеней получаем $a^{x_2} > a^{x_1}$, т. е. $a^{x_1} < a^{x_2}$. ○

Следствие 1. Пусть $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$. Тогда $a^{x_1} > a^{x_2}$.

● Так как $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому из теоремы следует, что при $x_1 < x_2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}.$$

По свойству деления степеней $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$. Следовательно, $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$, откуда $a^{x_1} > a^{x_2}$. ○

Следствие 2. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$. Тогда $x_1 = x_2$.

● Предположим, что равенство $x_1 = x_2$ не выполняется. Пусть, например, $x_1 < x_2$. Тогда при $a > 1$ по теореме должно быть $a^{x_1} < a^{x_2}$, а при $0 < a < 1$ по следствию 1 должно быть $a^{x_1} > a^{x_2}$, что противоречит условию $a^{x_1} = a^{x_2}$. ○

Задача 7 Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$.

▶ Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и $12 < 18$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$. ◁

Задача 8 Сравнить числа $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$.

▶ Так как $0 < \pi < 4$, то $0 < \frac{\pi}{4} < 1$. Сравним показатели: так как $8 < 9$, то $\sqrt{8} < \sqrt{9}$, т. е. $\sqrt{8} < 3$. Применяя следствие 1, получаем $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{8}} > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3}$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $4^x = 2^{4\sqrt{3}}$.

▶ По свойствам степени $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Поэтому уравнение можно записать так: $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$. Применяя следствие 2, получаем $2x = 4\sqrt{3}$, откуда $x = 2\sqrt{3}$. ◁

Следствие 3. Пусть $0 < x_1 < x_2$. Тогда если $p > 0$, то $x_1^p < x_2^p$, а если $p < 0$, то $x_1^p > x_2^p$.

● По условию $\frac{x_2}{x_1} > 1$.

1) Если $p > 0$, то по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^p > 1$. По свойству деления степеней $\frac{x_2^p}{x_1^p} > 1$, откуда $x_2^p > x_1^p$, т. е. $x_1^p < x_2^p$.

2) Если $p < 0$, то $-p > 0$, и по свойству (1) получаем $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-p} > 1$, откуда $\frac{x_2^{-p}}{x_1^{-p}} > 1$, $\frac{x_1^p}{x_2^p} > 1$, $x_1^p > x_2^p$. ○

Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

Задача 10 Сравнить числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$.

▶ По свойствам степени получаем

$$(\sqrt{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9.$$

Так как $0 < 8 < 9$ и $\frac{1}{6} > 0$, то $8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$, т. е. $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. ◁

Упражнения

55 (Устно.) Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

56 (Устно.) Представить в виде корня из степени с целым показателем:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Вычислить **(57—60)**.

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

61 Найти значение выражения:

1) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,09$; 2) $\sqrt{b} : \sqrt[6]{b}$ при $b = 27$;

3) $\dfrac{\sqrt{b}\,\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ при $b = 1,3$; 4) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$ при $a = 2,7$.

62 Представить в виде степени с рациональным показателем:

1) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7} \cdot x^{2,8} : \sqrt{x^5}$; 6) $y^{-3,8} : y^{-2,3} \cdot \sqrt[3]{y}$.

63 Вынести общий множитель за скобки:

1) $x^{\frac{1}{2}} + x$; 2) $(ab)^{\frac{1}{3}} + (ac)^{\frac{1}{3}}$; 3) $y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{1}{3}}$; 4) $12xy^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}y$.

64 Пользуясь тождеством $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, разложить на множители:

1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 2) $y^{\frac{2}{3}} - 1$; 3) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$;

4) $x - y$; 5) $4a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 6) $0{,}01m^{\frac{1}{6}} - n^{\frac{1}{6}}$.

65 Разложить на множители, используя тождество $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ или $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

1) $a - x$; 2) $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}$; 3) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$; 4) $27a + c^{\frac{1}{2}}$.

66 Сократить дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}$; 2) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}{m + 2\sqrt{mn} + n}$; 3) $\dfrac{c - 2c^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{c} - 1}$.

67 Упростить выражение $\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{cb^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{2c^2 - 4cb}{c - b}$.

68 Вычислить:

1) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; 2) $3^{2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; 3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$; 4) $((0{,}5)^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$.

Вычислить (69—71).

69 1) $2^{2-3\sqrt{5}} \cdot 8^{\sqrt{5}}$; 2) $3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}}$;

3) $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 4) $(5^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}} - (\sqrt{5})^0$.

70 1) $2^{1-2\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$; 2) $3^{2-3\sqrt{3}} \cdot 27^{\sqrt{3}}$;

3) $9^{1+\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 3^{-2-\sqrt{3}}$; 4) $4^{3+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{-4-\sqrt{2}}$.

71 1) $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}} \cdot 5^{1+\sqrt{7}}}$; 2) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$;

3) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$; 4) $(2^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

72 Выяснить, какое из чисел больше:

1) $3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$; 4) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 6) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ или $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

73 Сравнить число с единицей:

1) 2^{-2}; 2) $(0{,}013)^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^5$; 4) $27^{1,5}$;

5) $2^{-\sqrt{5}}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 7) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

74 Упростить выражение:

1) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $a^{\sqrt{3}-1} \cdot a^{\sqrt{3}+1}$; 3) $(b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} : b^2$.

75 Сравнить числа: 1) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{7}$.

76 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$; 2) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

3) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$; 4) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

Упростить выражение (77—78).

77 1) $(a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}$.

78 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}} b^{-1} - a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

79 Вычислить:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}} : 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[4]{1000}$.

Упростить выражение (80—83).

80 1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}} + (ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^4}$;

4) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab}\right)$.

81 1) $\left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}}b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

82 1) $\dfrac{m^{\sqrt{3}} \cdot n^{\sqrt{3}}}{(mn)^{2+\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{x^{\sqrt{7}} \cdot y^{\sqrt{7}-1}}{(xy)^{\sqrt{7}}}$; 3) $(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})$;

4) $\left(2a^{-0,5} - \frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3}b^{-\sqrt{3}} + 2a^{-0,5}\right)$.

83 1) $(a^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$; 2) $\left(m^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} \cdot m^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$;

3) $(a^{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}})^{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$; 4) $(a^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1})^{1-\sqrt[3]{3}}$.

Решить уравнение (84—85).

84 1) $5^{2x}=5^4$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; 3) $9^x=3^{2\sqrt{2}}$; 4) $16^x=2^{8\pi}$.

85 1) $7^{x\sqrt{3}}=\sqrt{7}$; 2) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt{5}$;

3) $(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{3})^{3x}=3\sqrt{3}$.

86 Сравнить числа:

1) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[5]{20}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{7}$; 3) $\sqrt{17}$ и $\sqrt[3]{28}$; 4) $\sqrt[4]{13}$ и $\sqrt[5]{23}$.

Упростить выражение (87—89).

87 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2}{a-b}$;

2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

88 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}-\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

89 1) $\dfrac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$;

3) $\left(\dfrac{3x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}}{x+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right):\left(4x^{\frac{1}{3}}+4+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$.

90 Вкладчик вложил в банк 5000 р. под 2% годовых. Сколько денег получит вкладчик через 3 года?

91 Банк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Сколько денег получит вкладчик через 2 года 7 месяцев, если первоначальная сумма вклада составляла 2000 р.?

Упражнения к главе I

92 Вычислить:

1) $\left(0,645 : 0,3 - 1\frac{107}{180}\right) \cdot \left(4 : 6,25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \cdot 1,96\right)$;

2) $\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 0,108)$.

93 Представить в виде обыкновенной дроби:

1) 1,3(1); 2) 2,3(2); 3) 0,(248); 4) 0,(34).

94 Вычислить:

1) 48^0, 10^{-2}, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $(0,3)^{-3}$, $(-1,2)^{-2}$, $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

2) $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[6]{8^2}$, $\sqrt[8]{16^2}$, $\sqrt[3]{27^2}$;

3) $8^{\frac{1}{3}}$, $27^{\frac{2}{3}}$, $10000^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{2}{5}}$, $32^{-\frac{3}{5}}$, $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$.

95 Вычислить:

1) $\sqrt[3]{5^3 \cdot 7^3}$, $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

2) $56^0 : 8^{-2}$, $16^{\frac{1}{4}} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{15}\right)^{-1} : 9^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 : 16^{-1}$;

3) $\dfrac{5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}}}{5^2}$, $\dfrac{7^{\frac{7}{3}} \cdot 7^{-\frac{4}{3}}}{7^2}$, $\dfrac{0,3^{0,3} \cdot 0,3^{-1}}{0,3^{1,3}}$.

Вычислить (96—97).

96 1) $\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1}$;

4) $(0,01)^{-2} : 100^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\left(\frac{64}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$; 6) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

97 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{1}{4}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{6\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[4]{15\frac{5}{8}}:\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$;

4) $\sqrt[3]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$; 6) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16}}\right)^3$.

98 Расположить числа в порядке возрастания:

1) $1^{3,75}$, 2^{-1}, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 2) 98^0, $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$, $32^{\frac{1}{5}}$.

99 Сравнить числа:

1) $0,88^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ и $0,41^{-\frac{1}{4}}$;

3) $4,09^{\sqrt[3]{2}}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ и $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

100 Упростить выражение, представив его в виде степени с основанием a:

1) $\dfrac{a^{1\frac{1}{2}}\,a^{-0,5}}{a^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{a^{-3}\,a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(a^{2,5})^2\,\sqrt[5]{a}$; 4) $\sqrt[7]{a^2}\left(a^{\frac{3}{14}}\right)^2$.

101 Упростить выражение:

1) $x^{-2\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$; 2) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}$.

102 Сравнить числа:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$;

2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$.

103 Решить уравнение:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^x=27$; 3) $7^{3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$.

104 Сократить дробь:

1) $\dfrac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}$.

105 Упростить:

1) $\dfrac{ab^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-1}$; 2) $\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$.

Проверь себя!

1 **Вычислить:**

1) $\dfrac{15^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$; 2) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 \cdot 379^0$; 3) $\left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$.

2 **Упростить выражение:** 1) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{c}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{a^5 b}{c^2}}$; 2) $\dfrac{a^{-3} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.

3 **Сократить дробь** $\dfrac{a - 9a^{\frac{1}{2}}}{7a^{\frac{1}{4}} + 21}$.

4 **Сравнить числа** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{9}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3}$.

5 **Упростить выражение** $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^2$.

106 Показать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, если:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_2 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$.

107 Записать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: 1) 1,10(209); 2) 0,108(32).

108 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, если сумма первых трёх её членов равна 39, а сумма их обратных величин равна $\dfrac{13}{27}$.

109 Упростить выражение $\sqrt{43 + 30\sqrt{2}} + \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$.

110 Упростить выражение $a = (4 - 3\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{5}$.

Сравнить полученное число с нулём.

111 Сравнить числа a и b, если:

1) $a = \dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \dfrac{5}{3 + 2\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$;

2) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{10}$;

3) $a = 5 - \sqrt{15}$, $b = \sqrt{17} - 3$;

4) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$, $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

112 Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{5+\sqrt{10}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$;

6) $\frac{11}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

113 Вычислить:

1) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$;

2) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})$.

Упростить выражение (**114—117**).

114 1) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$; 2) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$;

3) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$; 4) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}-1$.

115 1) $\left(\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right)^3$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\frac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

3) $\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}$; 4) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^2b^2}+b^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

116 1) $\left(\frac{4a^2-9a^{-2}}{2a-3a^{-1}}+\frac{a^2-4+3a^{-2}}{a-a^{-1}}\right)^2$;

2) $\left(\frac{1}{(a+b)^{-2}}-\left(\frac{a-b}{a^3+b^3}\right)^{-1}\right)\cdot(ab)^{-1}$.

117 1) $\left(\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2+(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}{a+\sqrt{ab}}\right)^5\cdot\sqrt[3]{a^{10}\cdot\sqrt{a}}$;

2) $\left(\frac{a-a^{-1}}{(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{a}+1)(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{a}+1)}+\sqrt[3]{a^{-1}}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\frac{ab\sqrt[3]{a}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}}\right)\cdot\frac{1}{a+b}$.

118 Доказать, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

II
глава

Степенная функция

Как алгебраисты вместо АА, ААА, ... пишут A^2, A^3, ..., так я... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ... пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...

И. Ньютон

Степенная функция, её свойства и график

§ 6

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д. Все эти функции являются частными случаями *степенной функции*, т. е. функции $y = x^p$, где p — заданное действительное число.

Свойства степенной функции зависят от свойств степени с действительным показателем и, в частности, от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, *а*).

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C_2$.

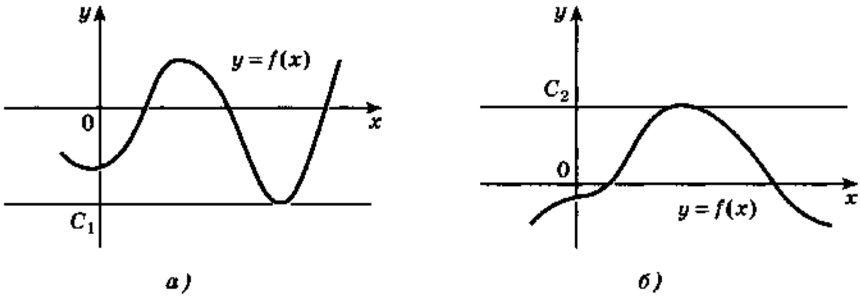


Рис. 6

В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат ниже прямой $y = C_2$ или на этой прямой (рис. 6, *б*).

Например: 1) функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geqslant -1$ (рис. 7, *а*); 2) функция $y = -x^2 - 2x + 3$ ограничена сверху, так как $-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2 \leqslant 4$ (рис. 7, *б*).

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной* на этом множестве.

Функция $y = f(x)$ является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда существует число $C > 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$,

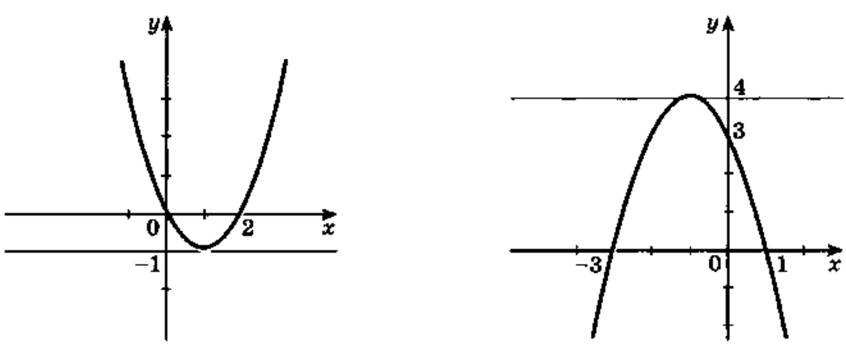


Рис. 7

то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$. Например, функция $y = x^2 - 2x$ принимает при $x = 1$ *наименьшее* значение, равное -1 (см. рис. 7, *а*).

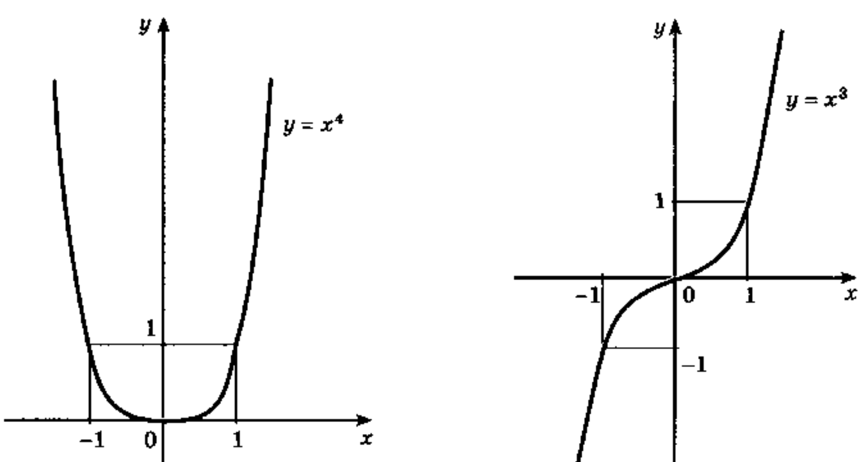
Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Перейдём к подробному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число. В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^4$ (рис. 8, *а*).



а) *б)*

Рис. 8

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси;
— функция не является ограниченной;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$ (рис. 8, *б*).

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$;
— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 9).

Прямую $y = 0$ (ось абсцисс) называют *горизонтальной асимптотой* (от греч. *asymptotos* — несовпадающий) графика функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$. Прямую $x = 0$ (ось ординат) называют *вертикальной асимптотой* графика этой функции (при значениях x, приближающихся к нулю, расстояния от точек этого графика до прямой $x = 0$ становятся сколь угодно малыми).

4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество R, кроме $x = 0$;

— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;

— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;

— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;

— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

График функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ (рис. 10). Ось абсцисс является горизонтальной асимптотой, а ось ординат — вертикальной асимптотой графика функции.

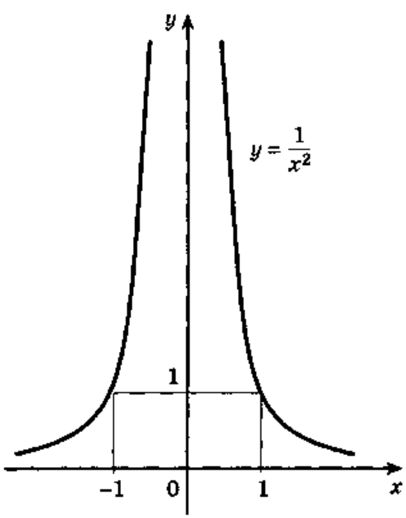


Рис. 9

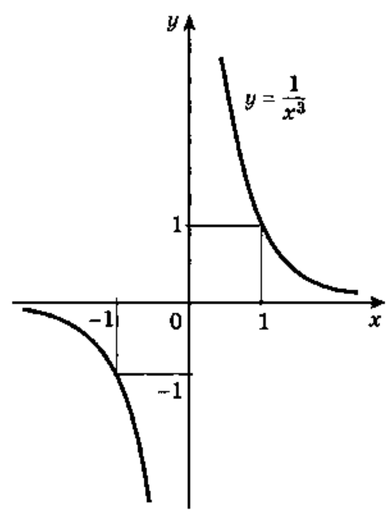


Рис. 10

5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;
— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;
— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

График функции $y = x^p$, где p — положительное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ (при $0 < p < 1$) или как, например, график функции $y = x^{\frac{4}{3}}$ (при $p > 1$) (рис. 11, *а*, *б*).

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;

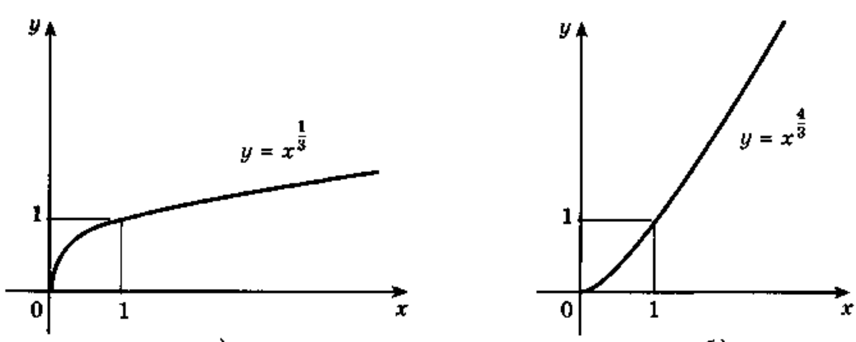


Рис. 11

— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу.

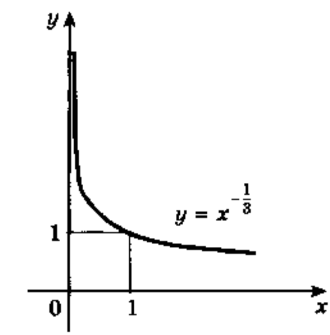


Рис. 12

График функции $y = x^p$, где p — отрицательное нецелое число, имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (рис. 12).

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

▶ Функция $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x \in [-2; 0]$, возрастает при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x = 0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как

$y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$,

то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◁

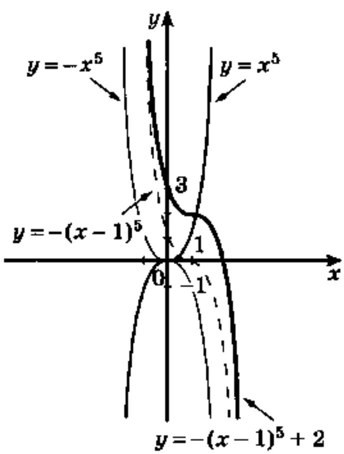


Рис. 13

Задача 2 Построить график функции $y = -(x-1)^5 + 2$.

▶ Областью определения функции является множество действительных чисел. Строим график функции $y = -x^5$, осуществляем сдвиг вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо и сдвиг вдоль оси ординат на 2 единицы вверх. График изображён на рисунке 13. ◁

Задача 3* Найти точки пересечения графиков функций

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{и} \quad y = x^{\frac{4}{3}}.$$

▶ Для нахождения точек пересечения этих графиков решим уравнение $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$. Левая часть этого уравнения имеет смысл при всех x, а правая — только при $x \geqslant 0$.

При $x \geqslant 0$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ совпадает с функцией $y = x^{\frac{1}{3}}$, поэтому уравнение можно записать так: $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$. Возводя это уравнение (при $x \geqslant 0$) в куб, получаем $x = x^4$, откуда $x(x^3 - 1) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ (0; 0), (1; 1). ◁

Упражнения

119 Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = x^6$; 2) $y = x^5$; 3) $y = x^7$;
4) $y = x^{-2}$; 5) $y = x^{-3}$; 6) $y = x^6$.

120 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = x^p$ возрастающей (убывающей) при $x > 0$, если:

1) $p = 7$; 2) $p = 16$; 3) $p = -3$;
4) $p = -7$; 5) $p = -4$; 6) $p = -10$?

121 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

1) $y = x^4$, $x \in [-1; 2]$; 2) $y = x^7$, $x \in [-2; 3]$;
3) $y = x^{-1}$, $x \in [-3; -1]$; 4) $y = x^{-2}$, $x \in [1; 4]$.

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{12}$; 2) $0{,}2^3$; 3) $0{,}7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1{,}3^{-2}$; 6) $0{,}8^{-1}$.

123 Построить график функции, указать её область определения и множество значений. Выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), является ли функция ограниченной, принимает ли она наибольшее (наименьшее) значение:

1) $y = -(x-2)^3 - 1$; 2) $y = (x+3)^4 + 2$.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;
3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$; 4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;
5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;
7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

125 В одной системе координат построить графики функций, находя сначала их области определения и множества значений:

1) $y = x^3$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = x^4$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;
3) $y = x^2$ и $y = x^{-2}$; 4) $y = x^5$ и $y = x^{-5}$.

126 Найти промежутки, на которых график функции:

1) $y = x^8$; 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

127 Изобразить схематически график функции и найти её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция возрастающей (убывающей), ограниченной сверху (снизу):

1) $y = (x-2)^7$; 2) $y = (x+1)^6$; 3) $y = (x+2)^{-2}$; 4) $y = (x-1)^{-3}$.

128 Пользуясь рисунком 13 (с. 45), найти промежутки, на которых график функции: 1) $y = x^{\frac{1}{5}}$; 2) $y = x^{\frac{5}{3}}$ — лежит выше (ниже) графика функции $y = x$.

129 Построить график функции и указать её область определения, множество значений и промежутки возрастания и убывания; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = |x|^5$; 3) $y = |x|^3 + 1$;
4) $y = |x|^{\frac{1}{5}} - 2$; 5) $y = |x+2|^{\frac{1}{3}}$; 6) $y = |2x|^{-3}$.

130 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = \sqrt[5]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{5}}$; 2) $y = \sqrt[7]{x}$ и $y = x^{\frac{5}{7}}$.

§ 7 Взаимно обратные функции

Если задана функция $y = f(x)$, то для каждого значения x из области определения функции можно найти соответствующее значение y. Нередко при-