ходится решать обратную задачу: по данному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x.

Примером может служить функция $v(t) = v_0 - gt$, которая выражает зависимость скорости v движения тела, брошенного вверх с начальной скоростью v_0, от времени движения t. Из этой формулы можно найти обратную зависимость $t = t(v)$ — времени t от скорости v:

$$t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

В рассмотренном примере каждому значению функции $v = v(t)$ соответствует одно значение аргумента. Для таких функций можно выразить обратную зависимость значений аргумента от значений функции. Такие функции называют *обратимыми*.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение только при одном значении x, то эту функцию называют *обратимой*.

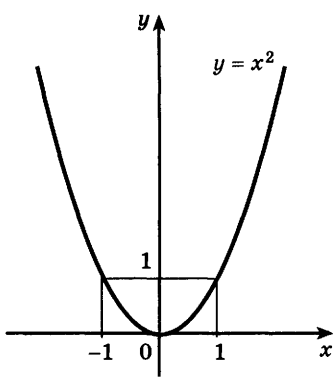


Рис. 14

Например, функция $y = 2x - 2$ обратима, так как каждое значение y принимается при единственном значении аргумента x. Это значение можно найти, решая уравнение $y = 2x - 2$ относительно x.

Функция $y = x^2$ не является обратимой, так как, например, значение $y = 1$ она принимает при $x = 1$ и при $x = -1$ (рис. 14). Пусть $y = f(x)$ — обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y, которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями поменяем местами x и y. Получим $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют *обратной* к функции $y = f(x)$.

Задача 1 Найти функцию, обратную к функции

$$y = 3x + 5. \qquad (1)$$

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = \frac{1}{3}(y - 5)$. В этой формуле поменяем местами x и y:

$$y = \frac{1}{3}(x - 5). \qquad (2)$$

Функция (2) обратна к функции (1). ◁

Вообще, если обратимая функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y.

Заметим, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для неё обратной $y = \frac{1}{3}(x - 5)$ функции. Поэтому эти функции называют *взаимно обратными*.

Из определения обратной функции следует, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции.

Задача 2 Найти функцию, обратную к функции $y = \frac{1}{x-2}$.

▶ Решая это уравнение относительно x, получаем $x = 2 + \frac{1}{y}$. Заменив x на y и y на x, находим $y = 2 + \frac{1}{x}$. ◁

В этой задаче область определения функции $y = \frac{1}{x-2}$ есть множество действительных чисел, не равных 2, а множество её значений — все действительные числа, не равные 0. График этой функции изображён на рисунке 15.

Для обратной функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ область определения — множество действительных чисел, не равных 0, а множество значений — все действительные числа, не равные 2. График этой функции изображён на рисунке 16.

Возрастающие и убывающие функции иногда называют одним словом — *монотонные*.

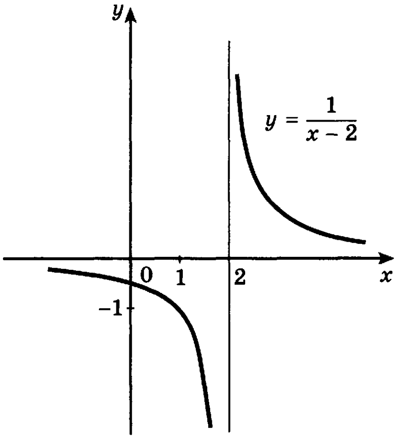


Рис. 15

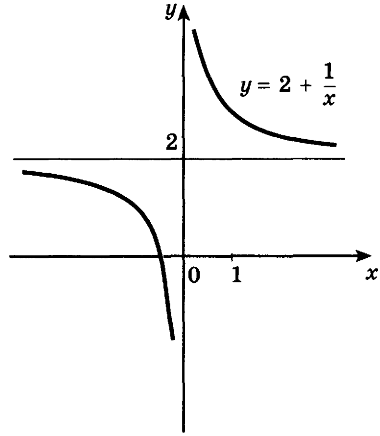


Рис. 16

Теорема 1. **Монотонная функция является обратимой.**

● Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и пусть y_0 — её значение в некоторой точке x_0, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Тогда если x принадлежит области определения функции, то при $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = y_0$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = y_0$.

Следовательно, значение y_0 функция $f(x)$ принимает только в одной точке x_0 и поэтому является обратимой. Для убывающей функции доказательство проводится аналогично. ○

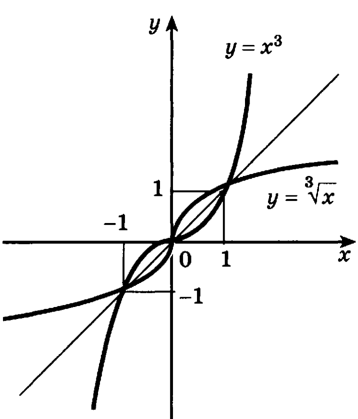
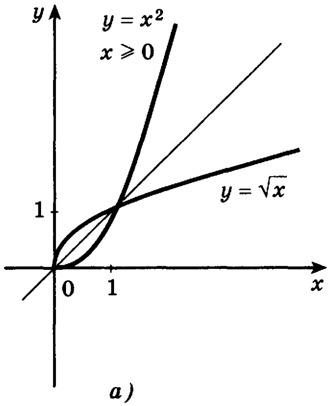


Рис. 17

Например, функция $y = x^3$ возрастает и поэтому является обратимой; обратной к ней является функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 17).

Если функция $y = f(x)$ возрастает, то с увеличением x значения y увеличиваются и, наоборот, с увеличением y увеличиваются x. Это означает, что обратная функция также возрастает. Аналогично если функция $y = f(x)$ убывает, то обратная к ней функция также убывает. Например, функция $f(x) = 1 - 2x$ убы-



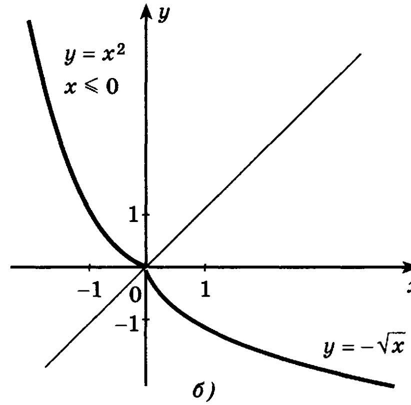


Рис. 18

вает и обратная к ней функция $g(x) = \frac{1-x}{2}$ также убывает.

Функция, не являющаяся монотонной, обратной может не иметь. Например, функция $y = x^2$, рассматриваемая на всей числовой оси, не имеет обратной.

Однако если функцию $y = x^2$ рассматривать только при $x \geqslant 0$, то на этом промежутке она возрастает и, следовательно, имеет обратную $y = \sqrt{x}$ (рис. 18, *а*).

Функция $y = x^2$, рассматриваемая при $x \leqslant 0$, убывает и также имеет обратную $y = -\sqrt{x}$ (рис. 18, *б*).

Т е о р е м а 2. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.

● Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y_0; x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$ (рис. 19), а точки $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 20). ○

Рисунок 18 иллюстрирует эту теорему.

Отметим, что степенная функция $y = x^p$ с областью определения $x > 0$ и $p \neq 0$ обратима, так как она монотонна.

Обратной к степенной функции $y = x^p$ при $x > 0$ и $p \neq 0$ является функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

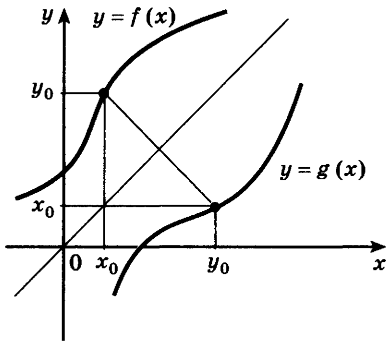


Рис. 19

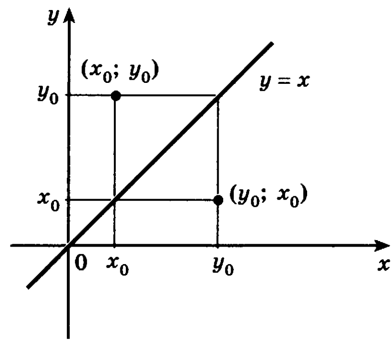


Рис. 20

Упражнения

131 (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 + 7$; 3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \sqrt{x}$; 5) $y = x^4$; 6) $y = x^4,\ x < 0$.

132 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x + 4$;

3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$; 4) $y = \frac{3x-1}{2}$;

5) $y = x^3 + 1$; 6) $y = x^3 - 3$.

133 Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = \frac{1}{4}x - 7$;

3) $y = x^3 - 1$; 4) $y = (x-1)^3$;

5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{3}{x-4}$.

134 Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 21). Построить график функции, обратной к данной.

135 Являются ли взаимно обратными функции:

1) $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$;

2) $y = -x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$;

3) $y = x^{-3}$ и $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

4) $y = \sqrt[5]{x^3}$ и $y = x\sqrt[3]{x^2}$?

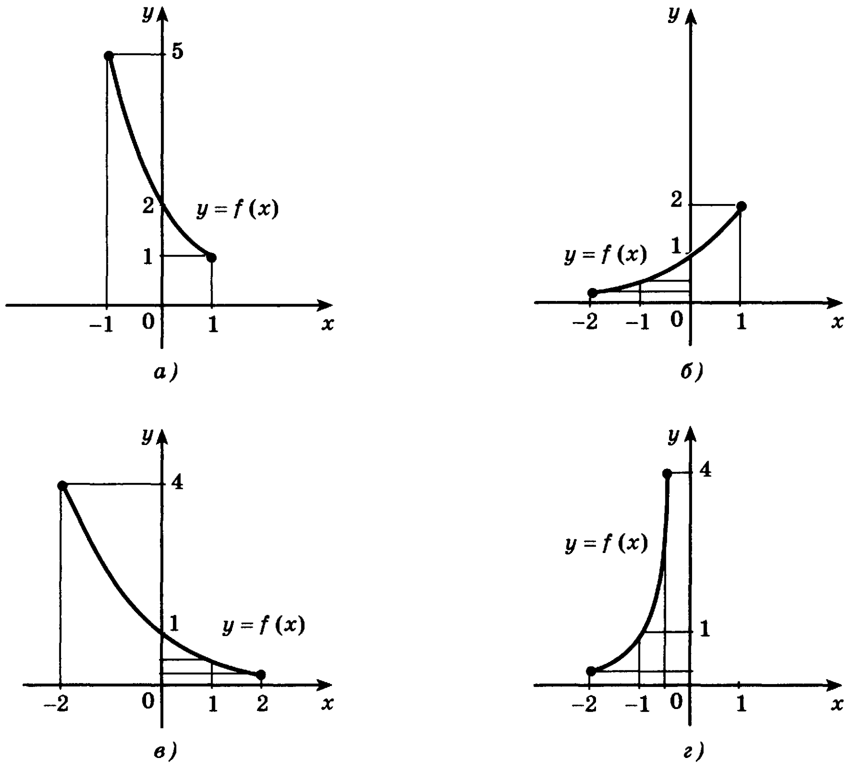


Рис. 21

136 Найти функцию, обратную к данной:

1) $y = -x^{\frac{1}{2}}$; 2) $y = -x^{\frac{3}{5}}$; 3) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y = -x^{\frac{1}{3}}$.

137 На одном рисунке построить график данной функции и функции, обратной к данной; найти область определения и множество значений каждой из них:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{2x-1}{3}$;

3) $y = x^2 - 1$ при $x \geqslant 0$;

4) $y = (x-1)^2$ при $x \geqslant 1$;

5) $y = x^3 - 2$; 6) $y = (x-1)^3$;

7) $y = \sqrt{x-1}$; 8) $y = \sqrt{x} + 1$.

§ 8 Равносильные уравнения и неравенства

1. Равносильные уравнения.

Задача 1 Найти точки пересечения графиков функций $y = 3\sqrt{x}$ и $y = x + 2$.

▶ Если $(x;\ y)$ — точка пересечения данных графиков, то $3\sqrt{x} = x + 2$. Следовательно, для нахождения абсцисс точек пересечения нужно решить уравнение

$$3\sqrt{x} = x + 2. \qquad (1)$$

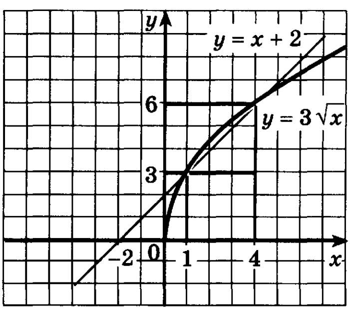


Рис. 22

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получаем $9x = x^2 + 4x + 4$, откуда $x^2 - 5x + 4 = 0$. Корни полученного квадратного уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Проверка показывает, что оба корня являются также и корнями уравнения (1).

Теперь находим ординаты точек пересечения данных графиков $y_1 = 3\sqrt{x_1} = 3$, $y_2 = 3\sqrt{x_2} = 6$. Итак, данные графики пересекаются в двух точках (1; 3) и (4; 6) (рис. 22).

Ответ (1; 3), (4; 6). ◁

При решении задачи 1 исходное уравнение $3\sqrt{x} = x + 2$ заменялось уравнениями

$$9x = x^2 + 4x + 4,\ \ x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Все эти три уравнения имеют одни и те же корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Такие уравнения называют равносильными.

Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.
Уравнения, не имеющие корней, также являются равносильными.

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x = 3$. Уравнения $(x - 2)(x + 5) = 0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1 = 2$, $x_2 = -5$. Уравнения $2x = 4$ и $3x^2 = 12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x = 2$, а второе — корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Из определения равносильности уравнений следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Из курса 7 класса вы знаете, что можно сделать следующие преобразования уравнений:

Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение.

Заметим, что если некоторое выражение в левой или правой части уравнения заменить тождественно равным ему выражением, то получится уравнение, равносильное исходному. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное.

Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x} = x - 2$ получается уравнение $x = (x-2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x = 4$, а второе — два корня $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$. В этом случае второе уравнение называют *следствием* первого уравнения.

Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то второе уравнение называют следствием первого уравнения. Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого;
2) если каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны.

При решении уравнений главное — не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Задача 2 Решить уравнение

$$\frac{2x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{(x-1)(x-2)}. \qquad (2)$$

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трёх дробей, т. е. на $(x-1)(x-2)$, получим

$$2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4, \qquad (3)$$

откуда $x^2-x-2=0$, $x_1=2$, $x_2=-1$.

Проверка. 1) При $x=2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=2$ не является корнем данного уравнения.

2) При $x=-1$ левая часть уравнения равна

$$\frac{2\cdot(-1)}{-1-2}-\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{2}{3},$$

правая часть равна

$$\frac{4}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{2}{3}.$$

Ответ $x=-1$. ◁

Заметим, что для проверки корня $x=-1$ достаточно было убедиться в том, что знаменатели дробей уравнения при $x=-1$ не равны нулю (если, конечно, при решении уравнения не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

При решении задачи 2 из уравнения (2) получено уравнение (3), которое является следствием уравнения (2). Корень $x_1=2$ уравнения (3) не является корнем уравнения (2). Его называют *посторонним корнем*.

Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Задача 3 Решить уравнение $x^2-4=7x-14$.

▶ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x+2)(x-2)=7(x-2), \qquad (4)$$

откуда $(x + 2 - 7)(x - 2) = 0$, т. е. $(x - 5)(x - 2) = 0$, следовательно, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Если обе части уравнения (4) разделить на $x - 2$, то получится уравнение $x + 2 = 7$, которое имеет только один корень $x = 5$, т. е. произойдёт потеря корня $x = 2$, и решение задачи будет неверным.

Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.

Итак, при решении уравнения можно делать только такие его преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения — следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

2. Равносильные неравенства.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Например, неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x - 3 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x < 3$. Неравенства $x^2 - 4x < x - 6$ и $x^2 - 5x + 6 < 0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $2 < x < 3$. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и $2x > x - 1$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x < -1$ и $x > 1$, а решениями второго — числа $x > -1$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

Задача 4 Решить неравенство $\frac{5x-3}{x^2+1} > 1$.

▶ Так как $x^2 + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, то, умножая неравенство на $x^2 + 1$, получаем неравенство $5x - 3 > x^2 + 1$, равносильное данному. Решая это неравенство, получаем

$$x^2 - 5x + 4 < 0, \ (x - 1)(x - 4) < 0,$$

откуда $1 < x < 4$. ◁

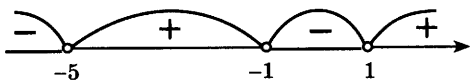


Рис. 23

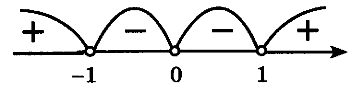


Рис. 24

Задача 5 Решить неравенство $\frac{3}{x-1} > \frac{2}{x+1}$.

▶ $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0$, $\frac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)} > 0$, $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 23), получаем $-5 < x < -1$, $x > 1$.

Ответ $-5 < x < -1$, $x > 1$. ◁

Задача 6 Решить неравенство $x^6 < x^2$.

▶ $x^6 - x^2 < 0$, $x^2(x^4 - 1) < 0$,
$x^2(x-1)(x+1)(x^2+1) < 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (рис. 24), получаем $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Ответ $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. ◁

Упражнения

138 Решить уравнение:

1) $(x+7)\cdot 3 = 2x + 14$;
2) $x^2 + \frac{1}{x^2-4} = 4 + \frac{1}{x^2-4}$;
3) $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{1-2x}{x^2-1}$;
4) $\frac{5x-15}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$.

139 Равносильны ли следующие уравнения:

1) $3x - 7 = 5x + 5$ и $2x + 12 = 0$;
2) $\frac{1}{5}(2x-1) = 1$ и $\frac{3x-1}{8} = 1$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x^2 + 3x + 2 = 0$;
4) $(x-5)^2 = 3(x-5)$ и $x - 5 = 3$;
5) $x^2 - 1 = 0$ и $2^{x-1} = 0$;
6) $|x-2| = -3$ и $3^x = (-1)^3$?

140 Равносильны ли следующие неравенства:

1) $2x - 1 \geqslant 2$ и $2(x-1) \geqslant 1$;
2) $(x-1)(x+2) < 0$ и $x^2 + x < 2$;
3) $(x-2)(x+1) < 3x + 3$ и $x - 2 < 3$;
4) $x(x+3) \geqslant 2x$ и $x^2(x+3) \geqslant 2x^2$?

141 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$;

2) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$.

142 Решить уравнение:

1) $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{4x}{x^2-1}$; 2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$;

3) $(x-3)(x-5)=3(x-5)$; 4) $(x-2)(x^2+1)=2(x^2+1)$.

143 Решить неравенство:

1) $\frac{x+3}{2+x^2}<3$; 2) $\frac{x-2}{5-x}>1$.

Выяснить, равносильны ли уравнения **(144—145)**.

144 1) $|2x-1|=3$ и $2x-1=3$;

2) $\frac{3x-2}{3}-\frac{4-x}{2}-\frac{3x-5}{6}=2x-2$ и $2x+3=\frac{10}{3}$.

145 1) $2x-1=4-1{,}5x$ и $3{,}5x-5=0$;

2) $x(x-1)=2x+5$ и $x^2-3x-5=0$;

3) $2^{3x+1}=2^{-3}$ и $3x+1=-3$; 4) $\sqrt{x+2}=3$ и $x+2=9$.

146 Установить, какое из двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $|x|=\sqrt{5}$ и $\sqrt{x^2}=5$;

2) $\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-3}{x+2}$ и $(x-2)(x+2)=(x-3)(x+3)$.

147 Решить уравнение $\frac{1}{3x+1}-\frac{2}{3x-1}-\frac{5x}{9x^2-1}=\frac{3x^2}{1-9x^2}$.

148 Найти корни уравнения:

1) $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$;

2) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x(x-4)}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{4(3+x)}{4-x^2}$.

149 Решить неравенство:

1) $x^3-3x^2+2x-6>2x^3-x^2+4x-2$;

2) $x^3-3x^2-4x+12>-3x^3+x^2+12x-4$.

150 Доказать, что если каждая из функций $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определена на множестве X и $\varphi(x)\neq 0$ для всех $x\in X$, то уравнения

$$f(x)=g(x) \text{ и } f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$$

равносильны.

§ 9 Иррациональные уравнения

В уравнениях $\sqrt{x+1} = x - 1$, $\sqrt{5x-4} = 2 + \sqrt{x}$ неизвестное x находится под знаком корня. Такие уравнения называют *иррациональными*. Приведём ещё примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt[4]{x+15} = x + 1, \quad \sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}.$$

Иррациональные уравнения часто получаются при решении различных задач. Решение иррациональных уравнений основано на следующем свойстве:

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень получается уравнение — следствие данного.

● Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. $f(x_0) = g(x_0)$ — верное числовое равенство. Тогда по свойствам верных числовых равенств $f^n(x_0) = g^n(x_0)$, где n — натуральное число, также верное числовое равенство, т. е. x_0 — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$. ○

При возведении обеих частей уравнения в чётную натуральную степень может получиться уравнение, не равносильное данному. Например, уравнение $\sqrt{6-x} = x$ имеет один корень $x = 2$, а уравнение $6 - x = x^2$ имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Аналогично при возведении обеих частей уравнения $\sqrt{x^2+x-1} = \sqrt{x}$ в квадрат получается уравнение $x^2 + x - 1 = x$, т. е. $x^2 = 1$.

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Второй корень является посторонним для исходного уравнения, так как подкоренные выражения при $x = -1$ отрицательны.

При возведении уравнения в натуральную степень могут появиться посторонние корни, поэтому проверка необходима.

Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны на множестве X, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $(f(x))^n = (g(x))^n$ при $n \in N$.

Задача 1 Решить уравнение $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$.

▶ Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x+6-2\sqrt{(x+6)(x+1)}+x+1=2x-5,$$

откуда $\sqrt{(x+6)(x+1)}=6$.

Возведём последнее уравнение в квадрат:

$$x^2+7x+6=36, \text{ или } x^2+7x-30=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-10$.
Проверка показывает, что $x_2=-10$ — посторонний корень.

Ответ $x=3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^2+12}=x. \quad (1)$$

▶ Возведём уравнение в четвёртую степень:

$$x^2+12=x^4,$$

откуда $x^4-x^2-12=0$. Решим это биквадратное уравнение

$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$, т. е. $x^2=4$ или $x^2=-3$.

Уравнение $x^2=4$ имеет два корня $x=\pm 2$. Уравнение $x^2=-3$ не имеет действительных корней. Так как при возведении обеих частей уравнения (1) в четвёртую степень могли появиться посторонние корни, то нужно сделать проверку. При $x=2$ обе части уравнения (1) равны 2, т. е. $x=2$ — корень уравнения (1). При $x=-2$ левая часть уравнения (1) равна 2, а правая равна -2, т. е. -2 не является корнем уравнения.

Ответ $x=2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3-19}=x-1. \quad (2)$$

▶ Возводя обе части уравнения в куб, получаем

$$x^3-19=(x-1)^3,$$

откуда

$$x^3-19=x^3-3x^2+3x-1,$$
$$3x^2-3x-18=0, \; x^2-x-6=0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями уравнения (2).

Ответ $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. ◁

Иногда при решении иррационального уравнения полезно использовать графики функций.

Задача 4 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = 1 - x^2$. Найти приближённые значения этих корней.

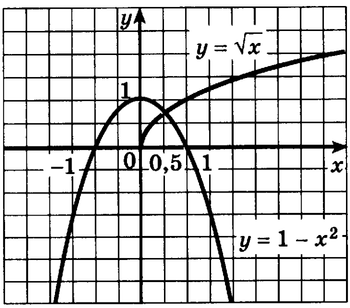


Рис. 25

▶ Построим на одном рисунке графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 1 - x^2$ (рис. 25). Графики пересекаются в одной точке при $x \approx 0{,}5$.

Ответ $x \approx 0{,}5$. ◁

Упражнения

151 (Устно.) Решить уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 7$; 3) $\sqrt[3]{x} = 2$; 4) $\sqrt[3]{x} = -3$;

5) $\sqrt[3]{1-3x} = 0$; 6) $\sqrt[4]{x} = 1$; 7) $\sqrt[4]{2-x} = 0$.

Решить уравнение (**152—161**).

152 1) $\sqrt{x+1} = 3$; 2) $\sqrt{x-2} = 5$; 3) $\sqrt{4+x} = \sqrt{2x-1}$.

153 1) $\sqrt[3]{2x+3} = 1$; 2) $\sqrt[3]{1-x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{3x^2-3} = \sqrt[3]{8x}$.

154 1) $x+1 = \sqrt{1-x}$; 2) $x = 1 + \sqrt{x+11}$;

3) $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$; 4) $\sqrt{x^2-x-3} = 3$.

155 1) $\sqrt{x} - x = -12$; 2) $x + \sqrt{x} = 2(x-1)$;

3) $\sqrt{x-1} = x-3$; 4) $\sqrt{6+x-x^2} = 1-x$.

156 1) $\sqrt{2x-34} = 1 + \sqrt{x}$; 2) $\sqrt{5x} + \sqrt{14-x} = 8$;

3) $\sqrt{15+x} + \sqrt{3+x} = 6$; 4) $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 1$.

157 1) $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^3+x^2} = 0$; 2) $\sqrt[3]{1+x^4} = \sqrt[3]{1+x^2}$.

158 1) $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$; 2) $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$; 4) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

159 1) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$;

2) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$.

160 1) $\sqrt[3]{x-2}=2$; 2) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3(x-1)}$;

3) $\sqrt[4]{25x^2-144}=x$; 4) $x^2=\sqrt{19x^2-34}$.

161 1) $\sqrt[3]{x^3-2}=x-2$; 2) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

162 Выяснить с помощью графиков, сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x-6}=-x^2$; 2) $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$;

3) $\sqrt{x+1}=x^2-7$; 4) $x^3-1=\sqrt{x+1}$.

163 Решить уравнение:

1) $\sqrt{4x+2\sqrt{3x^2+4}}=x+2$;

2) $3-x=\sqrt{9-\sqrt{36x^2-5x^4}}$;

3) $\sqrt{x^2+3x+12}-\sqrt{x^2+3x}=2$;

4) $\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+5x+3}=1$.

164 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

§ 10* Иррациональные неравенства

Задача 1 Стрельба из спортивного пистолета по круглой мишени диаметром 1 м ведётся из точки прямой, перпендикулярной плоскости мишени и проходящей через её центр. На каком расстоянии от мишени должна быть точка выстрела, чтобы разность расстояний от неё до края мишени и до центра была не больше 2 см?

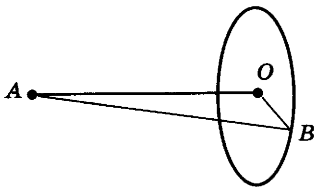


Рис. 26

▶ Пусть A — точка выстрела, O — центр мишени, B — точка на окружности мишени (рис. 26). По условию $BO = 50$ см. Обозначим $AO = x$, тогда $AB = \sqrt{x^2 + 2500}$. По условию задачи $AB - AO \leqslant 2$, т. е. $\sqrt{x^2 + 2500} - x \leqslant 2$, или

$$\sqrt{x^2 + 2500} \leqslant x + 2. \qquad (1)$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то левая и правая части неравенства (1) положительны. Следовательно, обе части неравенства (1) можно возвести в квадрат; при этом знак неравенства не изменится и получится неравенство, равносильное неравенству (1), т. е. $x^2 + 2500 \leqslant x^2 + 4x + 4$, откуда $4x \geqslant 2496$, $x \geqslant 624$ (см).

Ответ Не меньше 6,24 м. ◁

В этой задаче пришлось решать неравенство (1), содержащее неизвестное под знаком корня. Такие неравенства называют ***иррациональными***.

Задача 2 Решить неравенство $\sqrt{5 - x} < 4$. (2)

▶ Найдём область определения неравенства (2), т. е. множество таких значений x, при которых имеют смысл обе части неравенства. Правая часть неравенства определена при всех значениях x, а левая — при $5 - x \geqslant 0$, т. е. при $x \leqslant 5$. Следовательно, область определения неравенства (2) — луч $(-\infty; 5]$.
При $x \leqslant 5$ обе части неравенства (2) неотрицательны, и поэтому при возведении в квадрат обеих частей получается равносильное (на промежутке $(-\infty; 5]$) неравенство $5 - x < 16$.
Таким образом, неравенство (2) равносильно системе неравенств $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$

Решая эту систему, получаем $-11 < x \leqslant 5$.

Ответ $-11 < x \leqslant 5$. ◁

Рассуждения, приведённые при решении задачи 2, можно провести устно и сразу записать, что неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5 - x \geqslant 0, \\ 5 - x < 16. \end{cases}$$

Задача 3 Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x} < 2. \qquad (3)$$

▶ Неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x \geqslant 0, \\ x^2-3x < 4. \end{cases} \qquad (4)$$

Рис. 27

Решая первое неравенство системы (4), получаем $x \leqslant 0$, $x \geqslant 3$. Решая второе неравенство системы (4), получаем $-1 < x < 4$. Оба неравенства системы (4) выполняются при $-1 < x \leqslant 0$, а также при $3 \leqslant x < 4$ (рис. 27).

Ответ $-1 < x \leqslant 0$, $3 \leqslant x < 4$. ◁

Задача 4 Решить неравенство

$$\sqrt{10+x-x^2} \geqslant 2. \qquad (5)$$

▶ Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 10+x-x^2 \geqslant 0, \\ 10+x-x^2 \geqslant 4. \end{cases} \qquad (6)$$

Так как каждое решение второго неравенства системы (6) является решением первого неравенства системы (6), то эта система равносильна одному второму неравенству

$$10 + x - x^2 \geqslant 4. \qquad (7)$$

Следовательно, неравенство (5) равносильно неравенству (7). Решая неравенство (7), получаем $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ $-2 \leqslant x \leqslant 3$. ◁

Задача 5 Решить неравенство:

1) $\sqrt{3x-4} < -5$; 2) $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$.

▶ 1) При всех допустимых значениях x, т. е. при $x \geqslant \frac{4}{3}$, значения $\sqrt{3x-4}$ неотрицательны. Поэтому неравенство $\sqrt{3x-4} < -5$ решений не имеет.

2) Неравенство $\sqrt{2x^2+5x-3} \leqslant 0$ выполняется только тогда, когда $\sqrt{2x^2+5x-3} = 0$, т. е. когда $2x^2 + 5x - 3 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$. ◁

Задача 6 Решить неравенство

$$\sqrt{3x+1} \leqslant x+1. \qquad (8)$$

▶ Неравенство определено при $x \geqslant -\frac{1}{3}$. При этих значениях x обе части неравенства (8) неотрицательны. Следовательно, неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ 3x+1 \leqslant (x+1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$.

Ответ $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$, $x \geqslant 1$. ◁

Задача 7 Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1. \qquad (9)$$

▶ Область определения этого неравенства — промежуток $[-3; +\infty)$. При всех $x \geqslant -3$ левая часть этого неравенства неотрицательна. Правая часть этого неравенства отрицательна при $x < -1$. Поэтому все значения x из промежутка $[-3; -1)$ являются решениями неравенства (9).
Рассмотрим случай, когда $x \geqslant -1$. Тогда обе части неравенства (9) неотрицательны, и поэтому обе части этого неравенства можно возводить в квадрат: $x + 3 > (x + 1)^2$. Решением этого неравенства являются значения x из промежутка $(-2; 1)$. Отсюда, учитывая, что $x \geqslant -1$, получаем $-1 \leqslant x < 1$.
Итак, решениями неравенства (9) являются все значения x из промежутка $[-3; -1)$, а также из промежутка $[-1; 1)$, т. е. из промежутка $[-3; 1)$.

Ответ $-3 \leqslant x < 1$. ◁

Неравенство (9) проще решать с помощью графиков. На рисунке 28 построены графики функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = x + 1$. Из этого рисунка видно, что решениями неравенства (9) являются значения x из промежутка $-3 \leqslant x < 1$.

Задача 8 С помощью графиков решить неравенство $\sqrt{x} < 2 - x$.

▶ На одном рисунке построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ (рис. 29) и выясним, при каких

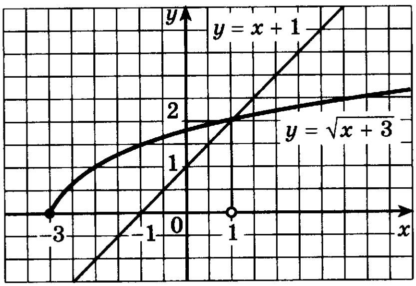


Рис. 28

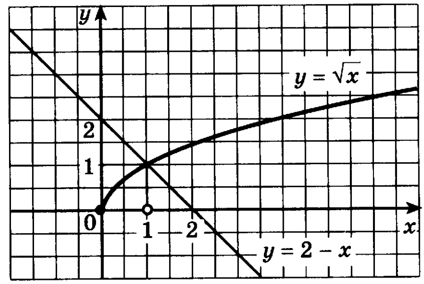


Рис. 29

значениях x точки графика функции $y = \sqrt{x}$ лежат ниже точек графика функции $y = 2 - x$.

Из рисунка видно, что эти графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой является корнем уравнения $\sqrt{x} = 2 - x$. Этот корень $x = 1$. График функции $y = \sqrt{x}$ лежит ниже графика функции $y = 2 - x$ при $0 \leqslant x < 1$.

Ответ $0 \leqslant x < 1$. ◁

Задача 9* Решить неравенство

$$\sqrt{2x^2 - 5x - 3} > x - 1. \qquad (10)$$

▶ Найдём область определения этого неравенства, т. е. решим неравенство $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$. Так как корнями уравнения $2x^2 - 5x - 3 = 0$ являются числа $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, то неравенство выполняется при $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и при $x \geqslant 3$ (рис. 30).

Таким образом, для решения неравенства (10) нужно выбирать только такие значения x, которые принадлежат его области определения.

1) Если $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$, то из этого промежутка области определения неравенства (10) удовлетворяют только числа $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (рис. 31).

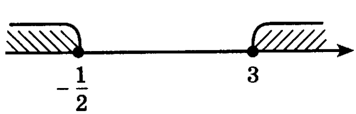


Рис. 30

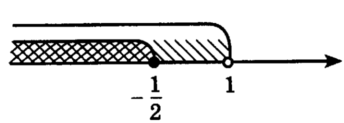


Рис. 31

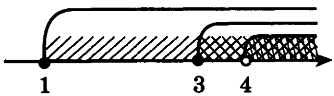


Рис. 32

2) Если $x-1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$, то, возводя обе части неравенства (10) в квадрат, получаем

$$2x^2-5x-3 > x^2-2x+1,$$

откуда $x^2-3x-4>0$.

Так как корнями уравнения $x^2-3x-4=0$ являются числа $x_1=-1$, $x_2=4$, то неравенство $x^2-3x-4>0$ выполняется при $x<-1$ и $x>4$. Из этих двух промежутков области определения неравенства условию $x \geqslant 1$ удовлетворяют только числа $x>4$ (рис. 32).

Ответ $x \leqslant -\frac{1}{2}$, $x>4$. $\triangleleft$

Упражнения

165 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 3-x \leqslant 2, \\ 2x+1 \leqslant 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0, \\ x>2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9-x^2 \leqslant 0, \\ x+5<0. \end{cases}$

Решить неравенство (**166—171**).

166 1) $\sqrt{x}>2$; 2) $\sqrt{x}<3$; 3) $\sqrt[3]{x} \geqslant 1$;
4) $\sqrt[3]{2x}<3$; 5) $\sqrt{3x}>1$; 6) $\sqrt{2x} \leqslant 2$.

167 1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}<1$;
3) $\sqrt{3-x}<5$; 4) $\sqrt{4-x}>3$;
5) $\sqrt{2x-3}>4$; 6) $\sqrt{x+1} \geqslant \frac{2}{3}$;
7) $\sqrt{3x-5}<5$; 8) $\sqrt{4x+5} \leqslant \frac{1}{2}$.

168 1) $\sqrt{x^2-1}>1$; 2) $\sqrt{1-x^2}<1$;
3) $\sqrt{25-x^2}>4$; 4) $\sqrt{25-x^2}<4$.

169 1) $\sqrt{2x^2+3x-2}>0$; 2) $\sqrt{2+x-x^2}>-1$;
3) $\sqrt{6x-x^2}<\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{x^2-x}>\sqrt{2}$;
5) $\sqrt{x^2+2x}>-3-x^2$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>-2-3x^2$.

170 1) $\sqrt{x+2}>\sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{3+2x} \geqslant \sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{2x-5}<\sqrt{5x+4}$; 4) $\sqrt{3x-2}>x-2$;
5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{3-x}<\sqrt{3x-5}$.

171 1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{x+3}<\sqrt{7-x}+\sqrt{10-x}$.

Решить графически неравенство (172—173).

172 1) $\sqrt{x} \geqslant x$; 2) $\sqrt{x} < x$; 3) $\sqrt{x} > x-2$; 4) $\sqrt{x} \leqslant x-2$.

173 1) $\sqrt{x} \leqslant 2x$; 2) $\sqrt{x} > 0{,}5x$;
3) $\sqrt{x} \geqslant 2x-1$; 4) $\sqrt{x} \geqslant x^2$.

174 Решить неравенство:
1) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; 2) $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x-\frac{1}{4}$.

Упражнения к главе II

175 Изобразить схематически график функции, указать её область определения и множество значений:
1) $y = x^9$; 2) $y = 7x^4$; 3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$; 5) $y = x^{-2}$; 6) $y = x^{-3}$.

176 На одном рисунке построить графики функций $y = x^2$ и $y = x^{\sqrt{x}}$. Сравнить значения этих функций при x, равном 0; 0,5; 1; $\frac{3}{2}$; 2; 3; 4; 5.

177 Расположить числа в порядке возрастания:
1) $0{,}3^{\pi}$, $0{,}3^{0{,}5}$, $0{,}3^{\frac{2}{3}}$, $0{,}3^{3{,}1415}$; 2) $\sqrt{2^{\pi}}$, $1{,}9^{\pi}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\pi}$, π^{π};
3) 5^{-2}, $5^{-0{,}7}$, $5^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2{,}1}$; 4) $0{,}5^{-\frac{2}{3}}$, $1{,}3^{-\frac{2}{3}}$, $\pi^{-\frac{2}{3}}$, $(\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$.

178 Решить уравнение с помощью графиков:
1) $\sqrt[3]{x} = x^2 + x - 1$; 2) $x^{-2} = 2 - x^2$.

179 Найти область определения функции:
1) $y = \sqrt[3]{1-x}$; 2) $y = \sqrt[6]{2-x^2}$;
3) $y = (3x^2+1)^{-2}$; 4) $y = \sqrt{x^2-x-2}$.

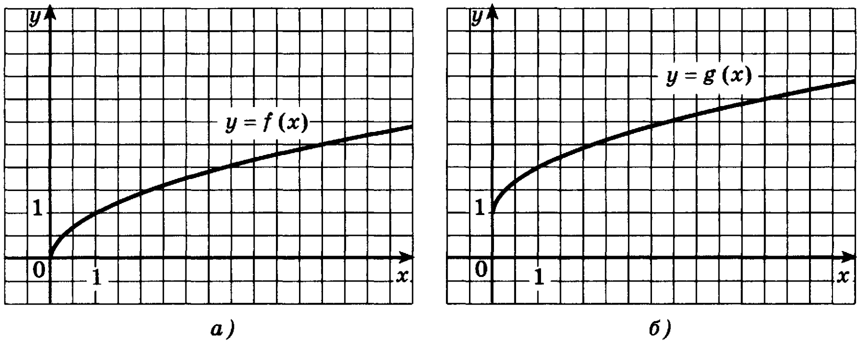


Рис. 33

180 Найти функцию, обратную данной, её область определения и множество значений:

1) $y = 0{,}5x + 3$; 2) $y = \dfrac{2}{x-3}$;

3) $y = (x + 2)^3$; 4) $y = x^3 - 1$.

181 Изобразить график функции, обратной к функции, график которой представлен на рисунке 33.

182 Являются ли равносильными уравнения:

1) $2^{x^2+3x} = 2^2$ и $x^2 + 3x = 2$;

2) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2}$ и $x^2 + 3x = 2$;

3) $\sqrt[3]{x+18} = \sqrt[3]{2-x}$ и $x + 18 = 2 - x$?

183 Решить уравнение:

1) $\sqrt{3-x} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} = 8$; 3) $\sqrt{3-4x} = 2x$;

4) $\sqrt{5x-1+3x^2} = 3x$; 5) $\sqrt[3]{x^2-17} = 2$; 6) $\sqrt[4]{x^2+17} = 3$.

Проверь себя!

1 Найти область определения функции:

1) $y = 3\,(x - 1)^{-3}$; 2) $y = \sqrt[4]{x^2-3x-4}$.

2 Построить график функции:

1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 2) $y = 2x^{-2}$; 3) $y = \dfrac{x^4}{2}$.

Для каждой функции указать область определения и значения x, при которых $y > 0$.

3 Решить уравнение:

1) $\sqrt[3]{x-3} = 5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2} = x$.

184 Изобразить схематически на одном рисунке графики функций:

1) $y=\sqrt{x^5}$, $y=x\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt[5]{x}$, $y=x^{-5}$.

185 Являются ли заданные функции взаимно обратными:

1) $y=\frac{10-3x}{x-4}$ и $y=\frac{4x+10}{x+3}$;

2) $y=\frac{3x-6}{3x-1}$ и $y=\frac{6-x}{3-3x}$;

3) $y=5\,(1-x)^{-1}$ и $y=(5-x)\cdot x^{-1}$;

4) $y=\frac{2-x}{2+x}$ и $y=\frac{2(x-1)}{1+x}$?

186 Найти функцию, обратную к данной, её область определения и множество значений:

1) $y=2+\sqrt{x+2}$; 2) $y=2-\sqrt{x+4}$;

3) $y=\sqrt{3-x}-1$; 4) $y=\sqrt{1-x}+3$.

Решить уравнение (**187—188**).

187 1) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$;

2) $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$;

3) $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$;

4) $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}$.

188 1) $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$; 2) $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$;

3) $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$; 4) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$;

5) $\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=2$;

6) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.

Решить неравенство (**189—190**).

189 1) $\sqrt{x+1}<x-1$; 2) $\sqrt{1-x}>x+1$;

3) $\sqrt{3x-2}>x-2$; 4) $\sqrt{2x+1}\leqslant x+1$.

190 1) $\frac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}}\leqslant 0$; 2) $\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4}<\frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{3+x}>|x-3|$; 4) $\sqrt{3-x}<\sqrt{7+x}+\sqrt{10+x}$.

191 При различных значениях a решить неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}<a$; 2) $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.

III
глава

Показательная функция

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

Л. Эйлер

§ 11 Показательная функция, её свойства и график

В главе I рассматривалась степень с действительным показателем. Напомним основные *свойства степени*. Пусть $a > 0$, $b > 0$, x, x_1 и x_2 — любые действительные числа. Тогда

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \quad (1) \qquad (ab)^x = a^x b^x, \quad (4)$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}, \quad (2) \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad (5)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad (3) \qquad a^x > 0, \quad (6)$$

$$a^x > 1, \text{ если } a > 1, \ x > 0, \quad (7)$$

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ если } a > 1, \ x_1 < x_2, \quad (8)$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ если } 0 < a < 1, \ x_1 < x_2. \quad (9)$$

В практике часто используются функции $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 0{,}1^x$ и т. д., т. е. функции вида $y = a^x$, где a — заданное положительное число, x — переменная. Такие функции называют *показательными*. Это название объясняется тем, что аргументом показательной функции является показатель степени, а основанием степени — заданное число.

Показательной функцией **называется функция вида $y = a^x$, где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.**

Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) Область определения показательной функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

● Это свойство следует из того, что степень a^x, где $a > 0$, определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. ○

2) Множество значений показательной функции — множество всех положительных чисел.

● Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, не имеет корней, если $b \leqslant 0$, и имеет корень при любом $b > 0$. По свойству степени (6) это уравнение не имеет корней, если $b \leqslant 0$. То, что это уравнение имеет корень при любом $b > 0$, доказывается в курсе высшей математики. Это означает, что любая прямая $y = b$, где $b > 0$, пересекается с графиком показательной функции. ○

3) Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

● Это следует из свойств степени (8) и (9). ○

Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, использовав рассмотренные свойства и построив несколько точек, принадлежащих графикам (рис. 34). Отметим, что график функции $y = 2^x$ проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x < 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро приближается к оси Ox (но не пересекает её). Таким образом, ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции $y = 2^x$. Если $x > 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $a > 1$ (рис. 35, а).

График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ также проходит через точку (0; 1) и расположен выше оси Ox. Если $x > 0$ и увеличивается, то график быстро приближается к оси Ox (не пересекая её). Таким образом, ось Ox

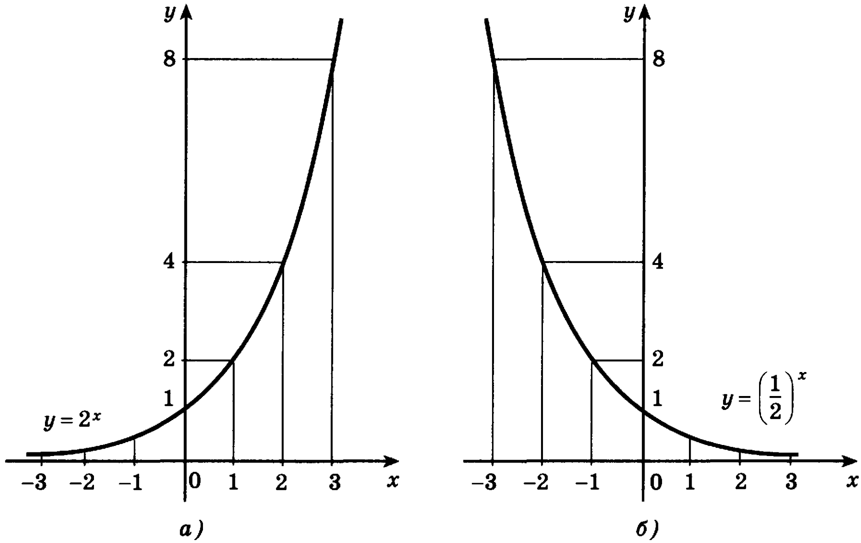


Рис. 34

является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Если $x < 0$ и $|x|$ увеличивается, то график быстро поднимается вверх. Такой же вид имеет график любой функции $y = a^x$, если $0 < a < 1$ (рис. 35, *б*).

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов. Так, радиоактивный распад описывается формулой

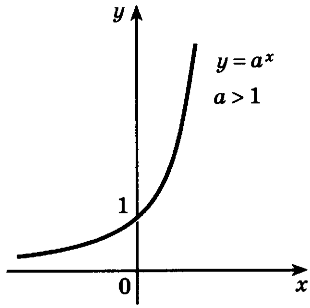
$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \tag{10}$$

где $m(t)$ и m_0 — масса радиоактивного вещества соответственно в момент времени t и в начальный момент времени $t = 0$, T — период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

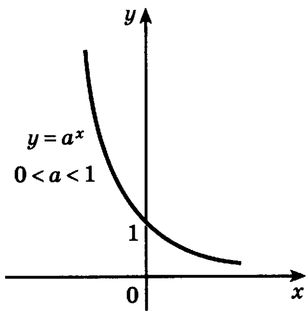
С помощью показательной функции выражается зависимость давления воздуха от высоты подъёма, ток самоиндукции в катушке после включения постоянного напряжения и т. д.

Задача 1 Решить уравнение $3^x = 27$.

▶ По свойству (2) показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27 > 0$. Одним из корней является число $x = 3$, так как $3^3 = 27$.



а)



б)

Рис. 35

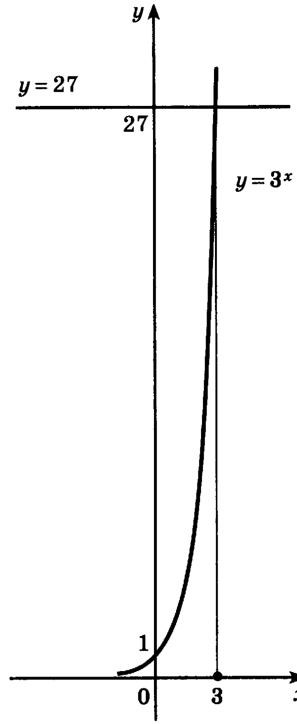


Рис. 36

Других корней нет, так как функция $y = 3^x$ возрастает на всей числовой прямой, и поэтому $3^x > 27$ при $x > 3$ и $3^x < 27$ при $x < 3$ (рис. 36).

Ответ $x = 3$. ◁

Задача 2* Период полураспада плутония равен 140 суткам. Сколько плутония останется через 10 лет, если его начальная масса равна 8 г?

▶ Воспользуемся формулой (10). В данной задаче $t = 10 \cdot 365$ (считаем, что в году 365 дней), $T = 140$, $\frac{t}{T} = \frac{365}{14}$. Вычисления на микрокалькуляторе, имеющем ячейку памяти и клавишу $\boxed{y^x}$, показывают, что $m = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{365}{14}} \approx 1{,}1345 \cdot 10^{-7}$.

Ответ Через 10 лет плутония останется примерно $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г. ◁

Упражнения

192 Построить график функции:

1) $y = 3^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

193 С помощью графика функции $y = 3^x$ найти приближённое значение:

1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

194 Изобразить схематически график функции:

1) $y = 0,4^x$; 2) $y = (\sqrt{2})^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y = (\sqrt{3})^x$.

195 (Устно.) Используя свойство возрастания или убывания показательной функции, сравнить числа:

1) $1,7^3$ и 1; 2) $0,3^2$ и 1; 3) $3,2^{1,5}$ и $3,2^{1,6}$;

4) $0,2^{-3}$ и $0,2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$.

196 Сравнить с единицей число:

1) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; 2) $(3,5)^{0,1}$; 3) $\pi^{-2,7}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

197 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y = 2^x$ и $y = 8$; 2) $y = 3^x$ и $y = \frac{1}{3}$;

3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и $y = \frac{1}{16}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 9$.

198 (Устно.) Решить уравнение:

1) $5^x = \frac{1}{5}$; 2) $7^x = 49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \sqrt[3]{7}$.

199 (Устно.) Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = 0,3^{-x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y = 1,3^{-2x}$; 4) $y = 0,7^{-3x}$.

200 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; 3) $5^x > 5$; 4) $5^x < \frac{1}{5}$.

201 Построить график функции:

1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$; 3) $y = 2^{x+1}$; 4) $y = 3^{x-2}$.

202 Доказать, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

203 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x$ на отрезке $[-1; 2]$.

204 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^{|x|}$ на отрезке $[-1; 1]$.

205 Построить график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y = |3^x - 2|$; 4) $y = 2 - 3^x$.

206 При радиоактивном распаде количество некоторого вещества уменьшается вдвое за сутки. Сколько вещества останется от 250 г через 1,5 суток? через 3,5 суток? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

207 На некотором лесном участке можно заготовить $4 \cdot 10^5$ м^3 древесины. Ежегодный прирост деревьев равен 4%. Сколько можно заготовить древесины на этом участке через 5 лет? Вычисления провести на микрокалькуляторе.

§ 12 Показательные уравнения

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1 Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

▶ Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

▶ Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

▶ Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2}, получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $3^x = 7^x$.

▶ Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ $x = 0$. ◁

Задача 5 Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

▶ Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

▶ Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ $x = 2$. ◁

Задача 7 Решить уравнение

$$5^{2x^2-5x} = 5^{x^2+2x-10}. \qquad (1)$$

▶ Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \qquad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◁

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

Задача 8 Решить уравнение $3^{|x-1|} = 3^{|x+3|}$.

▶ Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|x - 1| = |x + 3|$.

Возводя это уравнение в квадрат, получаем его следствие $(x-1)^2=(x+3)^2$, откуда

$$x^2-2x+1=x^2+6x+9,\ \ 8x=-8,\ \ x=-1.$$

Проверка показывает, что $x=-1$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x=-1$. ◁

Задача 9 Решить уравнение $\sqrt[x]{3}\cdot\sqrt[x]{5}=225$.

▶ Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(3\cdot 5)^{\frac{1}{x}}=225,\\ x\in N,\ \ x>1.\end{cases}$$

Преобразовав уравнение системы к виду $15^{\frac{1}{x}}=15^2$, имеем $\frac{1}{x}=2$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Но $x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $x>1$, $x\in N$, т. е. уравнение не имеет корней. ◁

Упражнения

Решить уравнение **(208—223)**.

208 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$; 3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

210 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^x\cdot 0{,}6^3=\frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$; 6) $6^{3x}\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

212 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

214 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

215 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

216 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

217 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

218 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot2^{x-1}-5\cdot2^x+6=0$.

219 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

220 1) $(0{,}5)^{x^2-4x+3}=(0{,}5)^{2x^2+x+3}$; 2) $(0{,}1)^{3+2x}=(0{,}1)^{2-x^2}$;

3) $3^{\sqrt{x-6}}=3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.

221 1) $2^{|x-2|}=2^{|x+4|}$; 2) $1{,}5^{|5-x|}=1{,}5^{|x-1|}$;

3) $3^{|x+1|}=3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|}=3^{|2-x|-1}$.

222 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot3^{x-3}$.

223 1) $8\cdot4^x-6\cdot2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot2^x-6\cdot2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}-7\cdot5^x=0$.

224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1}, 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии 6,5; 3,25; 1,625; ...?

Решить уравнение **(225—226)**.

225 1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

226 1) $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$; 3) $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[2x]{3} = 12$;

2) $16 \cdot 9^x - 25 \cdot 12^x + 9 \cdot 16^x = 0$; 4) $\sqrt[x]{5} \cdot 5^x = 25$.

227 Доказать, что уравнение имеет только один корень $x = 1$:
1) $4^x + 25^x = 29$; 2) $7^x + 18^x = 25$.

§ 13 Показательные неравенства

Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенств

$$a^x > a^b \quad \text{или} \quad a^x < a^b.$$

Эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

Задача 1 Решить неравенство $3^x < 81$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^x < 3^4$. Так как $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ является возрастающей. Поэтому решениями неравенства $3^x < 81$ являются числа $x < 4$.

Ответ $x < 4$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

▶ Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}, \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Так как $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — убывающая функция, то $x < -\frac{3}{2}$.

Ответ $x < -\frac{3}{2}$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $3^{x^2-x} < 9$.

▶ Запишем неравенство в виде $3^{x^2-x} < 3^2$. Так как $3 > 1$, то $x^2 - x < 2$, откуда $x^2 - x - 2 < 0$, $-1 < x < 2$.

Ответ $-1 < x < 2$. ◁

Задача 4 Решить неравенство $16^x + 4^x - 2 > 0$.

▶ Обозначим $4^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 > 0$. Это неравенство выполняется при $t < -2$ и при $t > 1$. Так как $t = 4^x$, то получим два неравенства $4^x < -2$, $4^x > 1$. Первое неравенство не имеет решений, так как $4^x > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Второе неравенство можно записать в виде $4^x > 4^0$, откуда $x > 0$.

Ответ $x > 0$. ◁

Задача 5 Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$.

▶ В одной системе координат построим графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = x - \frac{2}{3}$ (рис. 37). Из рисунка видно, что графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 1$. Проверка показывает, что $x = 1$ — корень данного уравнения: $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ и $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

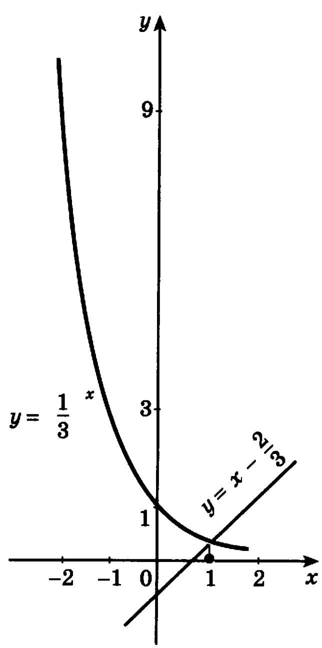


Рис. 37

Покажем, что других корней нет. Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывающая, а функция $y = x - \frac{2}{3}$ возрастающая. Следовательно, при $x > 1$ значения первой функции меньше $\frac{1}{3}$, а второй больше $\frac{1}{3}$; при $x < 1$, наоборот, значения первой функции больше $\frac{1}{3}$, а второй меньше $\frac{1}{3}$. Геометрически (см. рис. 37) это означает, что графики этих функций при $x > 1$ и $x < 1$ «расходятся» и потому не могут иметь точек пересечения при $x \neq 1$.

Ответ $x = 1$. ◁

Заметим, что из решения этой задачи, в частности, следует, что неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$ выполняется при $x < 1$, а неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$ — при $x > 1$.

Задача 6* Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2-x}} > \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

▶ Так как $0 < \frac{2}{5} < 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-x} < x$.

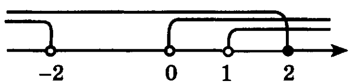


Рис. 38

Область определения этого неравенства $x \leqslant 2$. При $x \leqslant 0$ оно не имеет решений, так как $\sqrt{2-x} \geqslant 0$. Итак, решения неравенства содержатся в промежутке $(0; 2]$.

Возводя неравенство в квадрат, получаем $2 - x < x^2$, откуда $x^2 + x - 2 > 0$, $x < -2$ или $x > 1$ (рис. 38).

Ответ $1 < x \leqslant 2$. ◁

Упражнения

Решить неравенство (228—229).

228 1) $3^x > 9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$;

4) $4^x < \frac{1}{2}$; 5) $2^{3x} \geqslant \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{9}$.

229 1) $5^{x-1} \leqslant \sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}} > 9$; 3) $3^{x^2-4} \geqslant 1$; 4) $5^{2x^2-18} < 1$.

230 Решить графически уравнение:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x = -x - \frac{7}{4}$; 4) $3^x = 11 - x$.

Решить неравенство (231—232).

231 1) $2^{-x^2+3x} < 4$; 2) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geqslant \frac{9}{7}$;

3) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$; 4) $\left(2\frac{2}{3}\right)^{6x^2+x} \leqslant 7\frac{1}{9}$.

232 1) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 2) $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$;

3) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geqslant 448$; 4) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$.

233 Найти целые решения неравенства на отрезке [–3; 3]:

1) $9^x - 3^x - 6 > 0$; 2) $4^x - 2^x < 12$;

3) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$; 4) $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$.

234 Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{25^x - 5^x}$; 2) $y = \sqrt{4^x - 1}$.

235 При каких значениях x значения функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ больше значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 12$?

236 Решить графически неравенство:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant x + 1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x - \frac{1}{2}$;

3) $2^x \leqslant 9 - \frac{1}{3}x$; 4) $3^x > -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

237 Решить графически уравнение:

1) $2^x = 3 - 2x - x^2$; 2) $3^{-x} = \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^3 - 1$.

238 Решить неравенство:

1) $11^{\sqrt{x+6}} > 11^x$; 2) $0{,}3^{\sqrt{30-x}} > 0{,}3^x$.

239 Решить неравенство:

1) $0{,}4^x - 2{,}5^{x+1} > 1{,}5$; 2) $25 \cdot 0{,}04^{2x} > 0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1} < 0$.

§ 14 Системы показательных уравнений и неравенств

Рассмотрим несколько примеров решения систем показательных уравнений и неравенств.

Задача 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16. \end{cases}$

▶ Решим эту систему способом подстановки:

$$x = -2y - 1, \quad 4^{-2y-1+y^2} = 4^2,$$

откуда $-2y - 1 + y^2 = 2$, $y^2 - 2y - 3 = 0$, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Найдём значения x:

$$x_1 = -2 \cdot 3 - 1 = -7, \quad x_2 = -2 \cdot (-1) - 1 = 1.$$

Ответ $(-7; 3)$, $(1; -1)$. ◁

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0. \end{cases}$

▶ Обозначим $2^x = u$, $3^y = v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases} 3v - u = 5, \\ u^2 - 6v + 2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$u = 3v - 5, \ (3v - 5)^2 - 6v + 2 = 0,$$

$$9v^2 - 36v + 27 = 0, \ v^2 - 4v + 3 = 0, \ v_1 = 1, \ v_2 = 3.$$

Найдём значения u: $u_1 = -2$, $u_2 = 4$. Возвратимся к принятым обозначениям:

1) $2^x = -2$, $3^y = 1$. Так как первое из этих уравнений корней не имеет, то решений системы в этом случае нет.

2) $2^x = 4$, $3^y = 3$, откуда $x = 2$, $y = 1$.

Ответ $(2; 1)$. ◁

Задача 3* Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 162, \\ 3^x \cdot 4^y = 48. \end{cases}$

▶ Перемножив уравнения данной системы, получим

$$6^x \cdot 36^y = 3^4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2^3, \text{ или } 6^{x+2y} = 6^5,$$

откуда $x = 5 - 2y$.

Тогда второе уравнение системы примет вид $3^{5-2y} 4^y = 48$, или $\left(\frac{4}{9}\right)^y = \frac{48}{3^5}$, $\left(\frac{4}{9}\right)^y = \left(\frac{4}{9}\right)^2$, откуда $y = 2$, $x = 1$.

Ответ $(1; 2)$. ◁

Задача 4 Решить систему $\begin{cases} 3^{x-1} \leqslant \sqrt{3}, \\ 0{,}2^{3x^2-2} = 0{,}2^{2x^2+x+4}. \end{cases}$

▶ Решим неравенство $3^{x-1} \leqslant \sqrt{3}$, т. е. неравенство $3^{x-1} \leqslant 3^{\frac{1}{2}}$. Решая, получаем $x - 1 \leqslant \frac{1}{2}$, $x \leqslant 1{,}5$.

Теперь решим уравнение $0{,}2^{3x^2-2} = 0{,}2^{2x^2+x+4}$,

$$3x^2 - 2 = 2x^2 + x + 4,$$
$$x^2 - x - 6 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 3.$$

Так как $3 > 1{,}5$, $-2 < 1{,}5$, то $x = -2$.

Ответ $x = -2$. ◁

Задача 5* Решить систему $\begin{cases} 3^{xy} = 3^{10}, \\ 4^x = 4^{7-y}, \\ 2^x < 2^y. \end{cases}$

▶ Решим сначала систему уравнений $\begin{cases} 3^{xy} = 3^{10}, \\ 4^x = 4^{7-y}. \end{cases}$

Получаем $\begin{cases} xy = 10, \\ x = 7 - y, \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 10, \\ x + y = 7. \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, находим два решения (2; 5), (5; 2).

Теперь решим неравенство $2^x < 2^y$. Так как $2 > 1$, то $x < y$.

Решение системы уравнений (2; 5) удовлетворяет неравенству $x < y$, а решение (5; 2) ему не удовлетворяет.

Ответ (2; 5). ◁

Упражнения

Решить систему уравнений **(240—243)**.

240 1) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 5^{x+y} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^{x^2+y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2^{x-y} = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3^{x-y} = 81. \end{cases}$

241 1) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32, \\ 3^{8x+1} = 3^{3y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3x-2y} = 81, \\ 3^{6x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$

242 1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 2^x - 2^y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x + 5^y = 8, \\ 3^x - 5^y = -2. \end{cases}$

243 1) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x - 9 \cdot 3^y = 7, \\ 2^x \cdot 3^y = \dfrac{8}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 16^{y} - 16^{x} = 24, \\ 16^{x+y} = 256; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^{x} + 2^{x+y+1} = 5, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5^{x+1} \cdot 3^{y} = 75, \\ 3^{x} \cdot 5^{y-1} = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} = 4, \\ 3^{y} \cdot 2^{x} = 9. \end{cases}$

Решить систему (**244—245**).

244 1) $\begin{cases} 5^{2x+1} > 625, \\ 11^{6x^2 - 10x} = 11^{9x-15}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}3^{10x^2 - 47x} = 0{,}3^{-10x-7}, \\ 3{,}7^{x^2} = 3{,}7^{0{,}04}. \end{cases}$

245 1) $\begin{cases} (5^{x})^{y} = 5^{21}, \\ 5^{x} \cdot 5^{y} = 5^{10}, \\ 3^{x} > 3^{y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (0{,}2^{y})^{x} = 0{,}008, \\ 0{,}4^{y} = 0{,}4^{3{,}5-x}, \\ 2^{x} \cdot 0{,}5^{y} > 1. \end{cases}$

Упражнения к главе III

246 Сравнить числа:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ и $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ и $2^{1{,}7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}4}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ и $\left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$.

247 Сравнить с единицей число:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

248 (Устно.) Является ли функция возрастающей или убывающей:

1) $y = 0{,}78^{x}$; 2) $y = 1{,}69^{x}$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y = 4^{-x}$?

249 В каком промежутке находятся значения функции при $x \in [-1; 2]$:

1) $y = 5^{x}$; 2) $y = 5^{-x}$?

Решить уравнение (250—252).

250 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

251 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;

3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;

4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

252 1) $5^{2x}-5^x-600=0$; 2) $9^x-3^x-6=0$;

3) $3^x+9^{x-1}-810=0$; 4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

253 Решить неравенство:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$; 3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

254 Решить графически уравнение:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

Проверь себя!

1 Построить схематически график функции:

1) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; 2) $y=5^x$.

2 Сравнить числа:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; 2) $5^{-0,2}$ и $5^{-1,2}$.

3 Решить уравнение:

1) $3^{x+1}=27^{x-1}$; 2) $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$;

3) $2^{x+3}-2^{x+1}=12$; 4) $4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0$.

4 Решить неравенство:

1) $7^{x-2}>49$; 2) $0{,}5^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}$.

255 Доказать, что последовательность значений функции $y=2^x$ при натуральных значениях $x=1, 2, 3, \dots$ является геометрической прогрессией.

256 За первый год работы предприятие имело a рублей прибыли. В дальнейшем каждый год прибыль увеличивалась на $p\%$. Какой станет прибыль предприятия за n-й год работы?

257 Построить график функции:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$; 3) $y=2^{2-x}+3$.

Решить уравнение (**258—260**).

258 1) $0{,}6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0{,}25^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

259 1) $2 \cdot 3^{3x-1} + 27^{x-\frac{2}{3}} = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22 \cdot 9^{x-1} - \frac{1}{3} \cdot 3^{x+3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2} = 4$;

4) $5 \cdot 4^{x-1} - 16^x + 0{,}25 \cdot 2^{2x+2} + 7 = 0$.

260 1) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$;

2) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + 7^x \cdot 17 = 0$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

261 Решить неравенство:

1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1$; 2) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3}(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$; 4) $\frac{1}{3^x + 5} \leqslant \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

262 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2^{x-y} = 128, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1} = \frac{1}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 10, \\ 5^y - 2^x = 3. \end{cases}$

263 Построить график функции:

1) $y = 2^{x+|x|}$; 2) $y = |3^{|x|} - 3|$.

264 Решить уравнение:

1) $\frac{0{,}2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^x$; 2) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 5 \cdot 25^x = 0$; 4) $4 \cdot 9^x + 12^x - 3 \cdot 16^x = 0$.

265 Решить неравенство:

1) $3^{|x-2|} < 9$; 2) $4^{|x+1|} > 16$;

3) $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$; 4) $5^{|x+4|} < 25^{|x|}$.

IV

глава

Логарифмическая функция

Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь.

П. С. Лаплас

§ 15 Логарифмы

Задача 1 Найти положительный корень уравнения $x^4 = 81$.

▶ По определению арифметического корня имеем $x = \sqrt[4]{81} = 3$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $3^x = 81$.

▶ Запишем данное уравнение так: $3^x = 3^4$, откуда $x = 4$. ◁

В задаче 1 неизвестным является основание степени, а в задаче 2 — показатель степени.

Способ решения задачи 2 состоял в том, что левую и правую части уравнения удалось представить в виде степени с одним и тем же основанием 3. Но уже, например, уравнение $3^x = 80$ таким способом решить не удаётся. Однако это уравнение имеет корень. Чтобы уметь решать такие уравнения, вводится понятие логарифма числа. В § 11 было сказано, что уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, имеет единственный корень. Этот корень называют *логарифмом числа b по основанию a* и обозначают $\log_a b$. Например, корнем уравнения $3^x = 81$ является число 4, т. е. $\log_3 81 = 4$.

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например, $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$; $\log_4 1 = 0$, так как $4^0 = 1$.

Определение логарифма можно записать так:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют *основным логарифмическим тождеством*.

Например, $4^{\log_4 5} = 5$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = 3$, $13^{\log_{13} \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

С помощью основного логарифмического тождества можно показать, например, что $x = \log_3 80$ является корнем уравнения $3^x = 80$. В самом деле, $3^{\log_3 80} = 80$.

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*. Действие нахождения числа по его логарифму называют *потенцированием*.

Задача 3 Вычислить $\log_{64} 128$.

▶ Обозначим $\log_{64} 128 = x$. По определению логарифма $64^x = 128$. Так как $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, то $2^{6x} = 2^7$, откуда $6x = 7$, $x = \frac{7}{6}$.

Ответ $\log_{64} 128 = \frac{7}{6}$. ◁

Задача 4 Вычислить $3^{-2\log_3 5}$.

▶ Используя свойства степени и основное логарифмическое тождество, находим

$$3^{-2\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{25}. \ \triangleleft$$

Задача 5 Решить уравнение $\log_3 (1 - x) = 2$.

▶ По определению логарифма $3^2 = 1 - x$, откуда $x = -8$. ◁

Задача 6 При каких значениях x существует $\log_5 \frac{x-1}{2-x}$?

▶ Так как основание логарифма $5>0$ и $5 \neq 1$, то данный логарифм существует только тогда, когда $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Решая это неравенство, находим $1 < x < 2$. ◁

Упражнения

266 Найти логарифмы чисел по основанию 3:

$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{243},\ \sqrt[3]{3},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ 9\sqrt[4]{3}$.

Вычислить (267—276).

267 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$; 4) $\log_2 1$.

268 1) $\log_2 \frac{1}{2}$; 2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_2 \sqrt{2}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

269 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$; 4) $\log_3 1$.

270 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3}$; 3) $\log_3 \sqrt[4]{3}$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

271 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0{,}125$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0,5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

272 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

273 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

274 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

275 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0{,}3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

276 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0{,}125^{\log_{0,5} 1}$.

277 Решить уравнение:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5-x) = 3$;

4) $\log_3 (x+2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} (0{,}5 + x) = -1$.

278 Выяснить, при каких значениях x существует логарифм:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2) $\log_{0,2}(7-x)$; 3) $\log_6 \frac{1}{1-2x}$;

4) $\log_8 \frac{5}{2x-1}$; 5) $\log_{\frac{1}{4}}(-x^2)$; 6) $\log_{0,7}(-2x^3)$.

Вычислить (279—281).

279 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \frac{\sqrt[3]{7}}{49}$.

280 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3-\log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

281 1) $\log_2 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$; 3) $2\log_{27} \log_{10} 1000$;

4) $\frac{1}{3}\log_9 \log_2 8$; 5) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

282 Решить уравнение:

1) $\log_x 27 = 3$; 2) $\log_x \frac{1}{7} = -1$; 3) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение (283—284).

283 1) $\log_6(49-x^2)$; 2) $\log_7(x^2+x-6)$; 3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x+7)$.

284 1) $\log_3(1-x^3)$; 2) $\log_2(x^3+8)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+x^2-6x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^3+x^2-2x)$.

Решить уравнение (285—287).

285 1) $2^x = 5$; 2) $1{,}2^x = 4$; 3) $4^{2x+3} = 5$; 4) $7^{1-2x} = 2$.

286 1) $7^{2x} + 7^x - 12 = 0$; 2) $9^x - 3^x - 12 = 0$;

3) $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 5\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 = 0$.

287 1) $(3^x + 2^x)(3^x + 3\cdot 2^x) = 8\cdot 6^x$;

2) $(3\cdot 5^x + 2{,}5\cdot 3^x)(2\cdot 3^x - 2\cdot 5^x) = 8\cdot 15^x$.

288 При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\log_x(2x-1)$; 2) $\log_{x-1}(x+1)$?

289 Решить относительно x уравнение

$$9^x + 9a(1-a)\cdot 3^{x-2} - a^3 = 0.$$

§ 16 Свойства логарифмов

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \tag{2}$$

$$\log_a b^r = r \log_a b. \tag{3}$$

● По основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a b} = b, \tag{4}$$

$$a^{\log_a c} = c. \tag{5}$$

1) Перемножая равенства (4) и (5), получаем

$$a^{\log_a b + \log_a c} = bc,$$

откуда по определению логарифма $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$. Формула (1) доказана.

2) Разделив равенства (4) и (5), получим

$$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c},$$

откуда по определению логарифма следует формула (2).

3) Возводя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ в степень с показателем r, получаем $a^{r \log_a b} = b^r$, откуда по определению логарифма следует формула (3). ○

Приведём примеры применения формул (1) — (3):

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 36 = 2$;
2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$;
3) $\log_3 3^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log_3 3 = \frac{1}{7}$.

Задача Вычислить $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$.

▶ Применяя формулы (1) — (3), находим

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50 = \log_5 \frac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}} =$$
$$= \log_5 25 = 2. \ \triangleleft$$

Упражнения

Вычислить (290—294).

290 1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$; 2) $\log_{10} 8 + \log_{10} 125$;
3) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$; 4) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

291 1) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$; 2) $\log_5 75 - \log_5 3$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$; 4) $\log_8 \frac{1}{16} - \log_8 32$.

292 1) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; 2) $\log_{11} \sqrt[3]{121}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$; 4) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[6]{128}}$.

293 1) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;
2) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$;
3) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$;
4) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

294 1) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$; 2) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$; 3) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$; 4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.

295 Вычислить $\log_a x$, если $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$:
1) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$; 2) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

296 Вычислить:
1) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$;
3) $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$; 4) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$.

297 Найти x по данному его логарифму ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$;
2) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{2}} b$;
4) $\log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b$.

298 Вычислить:

1) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3}$;
2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$;
3) $16^{1+\log_4 5} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_8 5}$;
4) $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

299 Доказать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$. Используя эту формулу, вычислить:

1) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$; 2) $2\log_{25} 30 + \log_{0,2} 6$.

300 Выразить через a и b:

1) $\log_{\sqrt{3}} 50$, если $\log_3 15 = a$, $\log_3 10 = b$;
2) $\log_4 1250$, если $\log_2 5 = a$.

§ 17 Десятичные и натуральные логарифмы

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Иррациональное число e играет важную роль в математике и её приложениях. Число e можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Приближённое значение числа e можно прочитать на табло микрокалькулятора после использования клавиши $\boxed{e^x}$:

$$e^x \approx \underline{2{,}7182818}.$$

Вычисления $\lg b$ и $\ln b$ проводятся на микрокалькуляторе с помощью клавиш $\boxed{\lg}$ и $\boxed{\ln}$.
Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

$$\lg 13 \approx \underline{1{,}1139433};$$

вычисляя $\ln 13$, получаем

$$\ln 13 \approx \underline{2{,}5649493}.$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.
Докажем справедливость формулы (1).

●* Запишем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. Возьмём от обеих его частей логарифмы по основанию c:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Используя свойство логарифма степени, получаем $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$; откуда $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ○