Из формулы (1) при $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) следует формула $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Задача 1 С помощью микрокалькулятора вычислить $\log_3 80$ с точностью до 0,01.

▶ 1) С помощью десятичных логарифмов по формуле (2) находим: $\log_3 80 = \dfrac{\lg 80}{\lg 3} \approx \underline{3{,}9886927}$.

2) С помощью натуральных логарифмов:

$$\log_3 80 = \frac{\ln 80}{\ln 3} \approx \underline{3{,}9886928}.$$

Ответ $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ◁

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача 2 Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \dfrac{3}{2}$.

▶ По формуле перехода $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 x}{2}$.

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2 x = \dfrac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ◁

Задача 3* Двухпроцентный вклад в сбербанк, равный a рублям, через n лет становится равным $a\,(1{,}02)^n$, а трёхпроцентный вклад становится равным $a\,(1{,}03)^n$. Через сколько лет каждый из вкладов удвоится?

▶ 1) Для первого вклада $2a = a\,(1{,}02)^n$, откуда $(1{,}02)^n = 2$, $n = \log_{1,02} 2$. Вычисления проведём на микрокалькуляторе:

$$\log_{1,02} 2 \approx \underline{35{,}002788}.$$

2) Для второго вклада $n = \log_{1,03} 2$ и вычисления на микрокалькуляторе показывают:

$$\log_{1,03} 2 \approx \underline{23{,}449772}.$$

Ответ По первому вкладу примерно через 35 лет, а по второму — через 23,5 года. ◁

Упражнения

Вычислить с помощью микрокалькулятора (**301—302**).

301 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0{,}37$; 4) $\lg \frac{2}{3}$.

302 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0{,}17$; 4) $\ln \frac{6}{7}$.

303 Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0{,}75} 1{,}13$.

304 Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0{,}7} 9$; 4) $\log_{1{,}1} 0{,}23$.

305 Выразить данный логарифм через логарифм с основанием 7:

1) $\log_5 3$; 2) $\lg 6$; 3) $\log_2 7$; 4) $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\lg 7$; 6) $\log_3 7$.

306 Вычислить: 1) $5^{\frac{\lg 625}{\lg 25}}$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

307 Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;

3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

308 Дано: $\log_7 2 = m$. Найти: $\log_{49} 28$.

309 Дано: $\lg 3 = m$, $\lg 5 = n$. Найти: $\log_{15} 30$.

310 Дано: $\log_6 2 = m$. Найти: $\log_{24} 72$.

311 Дано: $\log_{36} 8 = m$. Найти: $\log_{36} 9$.

312 Вычислить: 1) $\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$; 2) $\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$.

313 Решить уравнение:

1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$;

2) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$;

3) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1{,}5 = 0$;

4) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$.

314 Вычислить (не используя микрокалькулятор):

1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$; 3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$.

315 Число жителей города-новостройки увеличивается ежегодно на 8%. Через сколько лет число жителей удвоится?

316 При одном качании поршневого насоса из сосуда удаляется 1,2% имеющегося в нём воздуха. Через сколько качаний насоса в сосуде останется $\frac{1}{10^{16}}$ часть первоначальной массы воздуха?

317 Вычислить на микрокалькуляторе приближённое значение числа e по формуле $e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}$ при: 1) $n = 7$; 2) $n = 8$; 3) $n = 9$; 4) $n = 10$.

§ 18 Логарифмическая функция, её свойства и график

В математике и её приложениях часто встречается *логарифмическая функция*

$$y = \log_a x,$$

где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

● Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x > 0$. ○

2) Множество значений логарифмической функции — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

● Это следует из того, что для любого действительного числа b есть такое положительное число x, что $\log_a x = b$, т. е. уравнение $\log_a x = b$ имеет корень. Такой корень существует и равен $x = a^b$, так как $\log_a a^b = b$. ○

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

● Это следует из свойства (2). ○

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

● Пусть $a > 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $y(x_1) < y(x_2)$, т. е. $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Пользуясь основным логарифмическим тождеством, условие $x_1 < x_2$ можно записать так: $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Из этого неравенства по свойству степени с основанием $a > 1$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Пусть $0 < a < 1$. Докажем, что если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Записав условие $x_1 < x_2$ в виде $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$, получим $\log_a x_1 > \log_a x_2$, так как $0 < a < 1$. ○

Отметим, что справедливы и следующие два утверждения: если $a > 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 < x_2$; если $0 < a < 1$ и $\log_a x_1 < \log_a x_2$, где $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 > x_2$.

5) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

● Это следует из того, что функция $y = \log_a x$ принимает значение, равное нулю, при $x = 1$ и является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$. ○

Из рассмотренных свойств логарифмической функции $y = \log_a x$ следует, что её график расположен правее оси Oy и имеет вид, указанный на рисунке 39, *а*, если $a > 1$, и на рисунке 39, *б*, если $0 < a < 1$. На рисунке 40 изображён график функции $y = \log_3 x$, а на рисунке 41 — график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$.

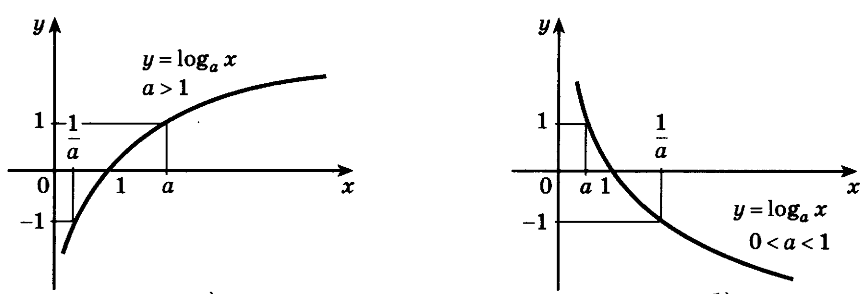


Рис. 39

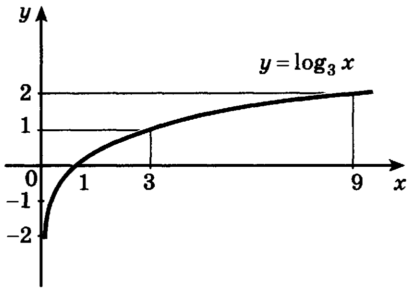


Рис. 40

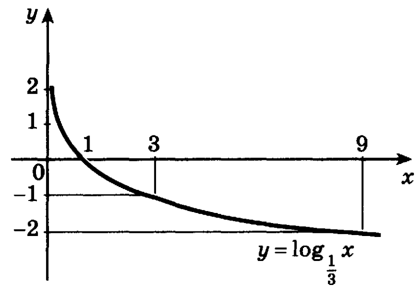


Рис. 41

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0). При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. **Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.**

● Предположим, что $x_1 \neq x_2$, например $x_1 < x_2$. Если $a > 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 < \log_a x_2$; если $0 < a < 1$, то из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$. В обоих случаях получилось противоречие с условием $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Следовательно, $x_1 = x_2$. ○

Задача 1 Решить уравнение $\log_5 (3x - 2) = \log_5 7$.

▶ Используя доказанную теорему, получаем $3x - 2 = 7$, откуда $3x = 9$, $x = 3$. ◁

Задача 2 Решить неравенство $\log_2 x < 3$.

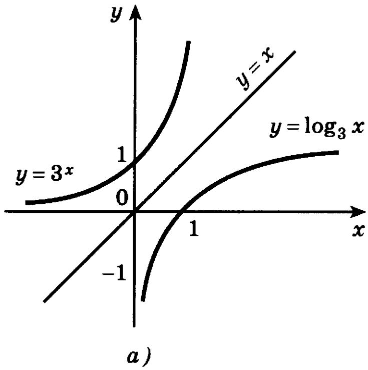
▶ Пользуясь тем, что $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, запишем данное неравенство так: $\log_2 x < \log_2 8$. Так как функция $y = \log_2 x$ определена при $x > 0$ и возрастает, то неравенство $\log_2 x < \log_2 8$ выполняется при $x > 0$ и $x < 8$.

Ответ $0 < x < 8$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant -2$.

▶ Запишем данное неравенство так: $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ определена при $x > 0$ и убы-



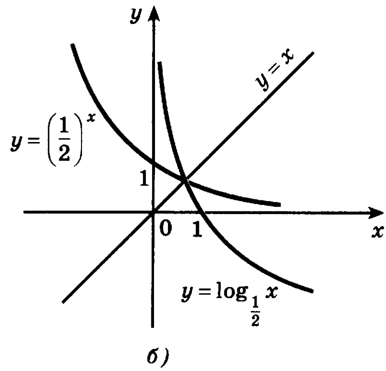


Рис. 42

вает, поэтому неравенство выполняется при $x > 0$ и $x \geqslant 9$.

Ответ $x \geqslant 9$. $\triangleleft$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.

● Решая уравнение $y = \log_a x$ относительно x, получаем $x = a^y$; меняя местами x и y, имеем $y = a^x$. ○ Графики этих функций при $a = 3$ и $a = \frac{1}{2}$ показаны на рисунке 42.

Упражнения

318 Сравнить числа:

1) $\log_3 \frac{6}{5}$ и $\log_3 \frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$ и $\log_{\frac{1}{3}} 17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} e$ и $\log_{\frac{1}{2}} \pi$; 4) $\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

319 Выяснить, является ли положительным или отрицательным число:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0{,}5} 9{,}6$.

320 Сравнить с единицей число x, если:

1) $\log_3 x = -0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 1{,}7$; 3) $\log_2 x = 1{,}3$.

321 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0{,}075} x$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$; 3) $y = \lg x$; 4) $y = \ln x$.

322 Построить график функции:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

323 По графику функции $y = \log_2 x$ найти приближённо

$$\log_2 3,\ \log_2 0{,}3,\ \log_2 5,\ \log_2 0{,}7.$$

324 Изобразить схематически график функции:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \log_{0,4} x$; 4) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Решить неравенство **(325—326)**.

325 1) $\log_5 x > \log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$;

3) $\lg x < \lg 4$; 4) $\ln x > \ln 0{,}5$.

326 1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_{0,4} x > 2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant 16$; 4) $\log_{0,4} x \leqslant 2$.

327 Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2$; 2) $\log_5 (3x + 1) = 2$;

3) $\log_4 (2x - 3) = 1$; 4) $\log_7 (x + 3) = 2$;

5) $\lg (3x - 1) = 0$; 6) $\lg (2 - 5x) = 1$.

328 Найти область определения функции:

1) $y = \log_4 (x - 1)$; 2) $y = \log_{0,3} (1 + x)$;

3) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$; 4) $y = \log_{\sqrt{2}} (4 - x^2)$.

329 Доказать, что функция $y = \log_2 (x^2 - 1)$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

330 Сравнить значения выражений:

1) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$; 2) $\frac{\lg 5 + \lg\sqrt{7}}{2}$ и $\lg\frac{5 + \sqrt{7}}{2}$;

3) $3 (\lg 7 - \lg 5)$ и $\lg 9 - \frac{2}{3}\lg 8$; 4) $\lg \lg \lg 50$ и $\lg^3 50$.

331 Найти область определения функции:

1) $y = \log_8 (x^2 - 3x - 4)$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}} (-x^2 + 5x + 6)$;

3) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$; 4) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x - 4}{x^2 + 4}$;

5) $y = \log_\pi (2^x - 2)$; 6) $y = \log_3 (3^{x-1} - 9)$.

332 Построить график функции, найти её область определения и множество значений:

1) $y = \log_3 (x - 1)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$; 3) $y = 1 + \log_3 x$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$; 5) $y = 1 + \log_3 (x - 1)$.

333 Решить графически уравнение:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$;

3) $\lg x = \sqrt{x}$; 4) $\lg x = 2^{-x}$.

334 Построить график функции, найти её область определения и множество значений, указать промежутки монотонности:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

335 Найти область определения функции:

1) $y = \log_2 |3 - x| - \log_2 |x^3 - 8|$;

2) $y = \log_{0,3} \sqrt{x+1} + \log_{0,4} (1 - 8x^3)$.

§ 19 Логарифмические уравнения

Задача 1 Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \qquad (1)$$

▶ Предположим, что x — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. x — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1)(x + 3)) = 3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1)(x + 3) = 8, \qquad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$, т. е. $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и -5 корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения $x = 1$, получаем $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$, т. е. $x = 1$ — корень уравнения (1).

При $x=-5$ числа $x+1$ и $x+3$ отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е. $x=-5$ не является корнем этого уравнения.

Ответ $x=1$. ◁

Замечание. Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \\ \log_2((x+1)(x+3))=3. \end{cases}$$

Задача 2 Решить уравнение $\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x)$.

▶ Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)=3,$$

откуда

$$\log_2((1-x)(3-x))=3,$$
$$(1-x)(3-x)=8.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1=5$, $x_2=-1$. Число $x_1=5$ не является корнем исходного уравнения, так как при $x=5$ левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число $x=-1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ $x=-1$. ◁

Задача 3 Решить уравнение

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg x+\lg(x+3).$$

▶ По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg(x^2+3x),$$

откуда (по теореме § 18) $2x^2-4x+12=x^2+3x$, $x^2-7x+12=0$, $x_1=3$, $x_2=4$. Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1=3$, $x_2=4$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\log_7(3x+4)=\log_7(5x+8)$.

▶ Приравнивая выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем $3x+4=5x+8$, откуда $x=-2$. Выполняя проверку, убеждаемся, что при $x=-2$ левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

Ответ Корней нет. ◁

Задача 5 Решить уравнение

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x = 2 \log_4 (2x - 1).$$

▶ Преобразуем данное уравнение:

$$\log_4 (2x - 1) \cdot \log_4 x - 2 \log_4 (2x - 1) = 0,$$
$$\log_4 (2x - 1) \cdot (\log_4 x - 2) = 0.$$

Приравнивая каждый из множителей левой части уравнения к нулю, получаем:
1) $\log_4 (2x - 1) = 0$, откуда $2x - 1 = 1$, $x_1 = 1$;
2) $\log_4 x - 2 = 0$, откуда $\log_4 x = 2$, $x_2 = 16$.
Проверка показывает, что оба значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = 16$. ◁

Задача 6 Решить уравнение $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2}$.

▶ Уравнение имеет смысл, если

$$x > 0,\ x \neq 1. \qquad (4)$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда $\log_x 3 = \frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, или $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Если $t = 2$, то $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Если $t = \frac{1}{2}$, то $\log_3 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$.

Найденные значения x удовлетворяют условиям (4) и являются корнями данного уравнения.

Ответ $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt{3}$. ◁

Задача 7 Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ 4y^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$

▶ Из первого уравнения выразим x через y: $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2$, $\frac{x}{y} = 2$, $x = 2y$. Подставив $x = 2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2 + 2y - 12 = 0$, откуда $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -2$. Найдём значения x: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Проверкой убеждаемся, что $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ — решение системы, а $(-4; -2)$ не является её решением.

Ответ $\left(3; \frac{3}{2}\right)$. ◁

Упражнения

336 Установить, какое из данных двух уравнений является следствием другого уравнения:

1) $x-3=0$ и $x^2-5x+6=0$; 2) $|x|=5$ и $\sqrt{x^2}=5$;

3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ и $x^2-3x+2=0$;

4) $\log_8 x+\log_8(x-2)=1$ и $\log_8(x(x-2))=1$.

Решить уравнение (**337—341**).

337 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;
2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;
3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;
4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

338 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;
2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;
3) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$.

339 1) $\dfrac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg(5x)+\lg\dfrac{1}{5x}$;
2) $\dfrac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg(8x)-\lg(4x)$.

340 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

341 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$;
3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$;
4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$.

342 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2,\\ x^2y-2y+9=0.\end{cases}$

Решить уравнение (**343—345**).

343 1) $\log_5 x^2=0$; 2) $\log_4 x^2=3$; 3) $\log_3 x^3=0$; 4) $\log_4 x^3=6$;
5) $\lg x^4+\lg(4x)=2+\lg x^3$; 6) $\lg x+\lg x^2=\lg(9x)$.

344 1) $\log_4((x+2)(x+3))+\log_4\dfrac{x-2}{x+3}=2$;
2) $\log_2\dfrac{x-1}{x+4}+\log_2((x-1)(x+4))=2$;
3) $\log_3 x^2-\log_3\dfrac{x}{x+6}=3$; 4) $\log_2\dfrac{x+4}{x}+\log_2 x^2=5$.

345 1) $2^{3\lg x} \cdot 5^{\lg x} = 1600$; 2) $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400$;

3) $\dfrac{1}{4+\lg x} + \dfrac{2}{2-\lg x} = 1$; 4) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$.

346 Не решая уравнений, выяснить, равносильны ли они:

1) $2^{3x+1} = 2^{-3}$ и $3x + 1 = -3$;

2) $\log_3(x-1) = 2$ и $x - 1 = 9$.

347 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{y} = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решить уравнение **(348—352)**.

348 1) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1$; 2) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5$;

3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$; 4) $\log_3 x - 6\log_x 3 = 1$.

349 1) $\log_{x^2} 9 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$; 2) $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = 2$.

350 1) $\lg(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) - \lg 25 = x$;

2) $\lg(2^x + x + 4) = x - x\lg 5$.

351 1) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$;

2) $2\log_5(4-x) \cdot \log_{2x}(4-x) = 3\log_5(4-x) - \log_5(2x)$.

352 1) $\sqrt{\log_x 25 + 3} = \dfrac{1}{\log_5 x}$;

2) $\sqrt{2\log_2^2 x + 3\log_2 x - 5} = \log_2(2x)$.

353 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $5\log_5 x + \log_a x - 4\log_{25} x = a$ имеет корни.

§ 20 Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида $\log_a x < b$ и $\log_a x \geqslant b$. Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ решения таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

Задача 1 Решить неравенство

$$\lg (x + 1) \leqslant 2. \qquad (1)$$

▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях x, а левая часть — при $x + 1 > 0$, откуда $x > -1$, т. е. $x > -1$ — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg (x + 1) \leqslant \lg 100. \qquad (2)$$

Так как $10 > 1$, то $x + 1 \leqslant 100$, откуда $x \leqslant 99$. Учитывая область определения исходного неравенства, получаем $-1 < x \leqslant 99$. ◁

Задача 2 Решить неравенство

$$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leqslant 1. \qquad (3)$$

▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при $x - 3 > 0$ и $x - 2 > 0$.

Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$. По свойствам логарифма неравенство (3) при $x > 3$ равносильно неравенству

$$\log_2 (x - 3)(x - 2) \leqslant \log_2 2. \qquad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при $x > 3$ неравенство (4) выполняется, если $(x - 3)(x - 2) \leqslant 2$.

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

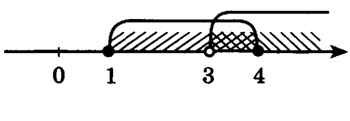


Рис. 43

Решая первое неравенство этой системы, получаем $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 4$. Совмещая отрезок $[1; 4]$ с промежутком $(3; +\infty)$, получаем $3 < x \leqslant 4$ (рис. 43). ◁

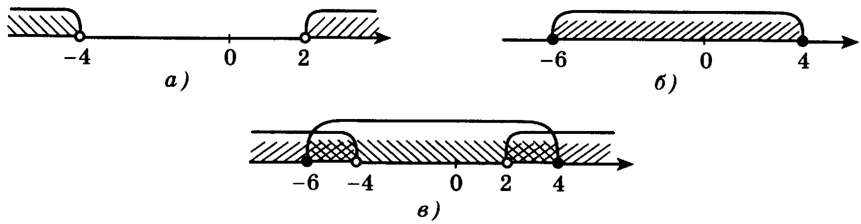


Рис. 44

Задача 3* Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4. \qquad (5)$$

▶ Область определения неравенства находится из условия $x^2 + 2x - 8 > 0$. Неравенство (5) можно записать в следующем виде:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

Так как логарифмическая функция с основанием $\frac{1}{2}$ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем $x^2 + 2x - 8 \leqslant 16$. Таким образом, исходное неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое квадратное неравенство, получаем $x < -4$, $x > 2$ (рис. 44, *а*). Решая второе квадратное неравенство, получаем $-6 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 44, *б*). Следовательно, оба неравенства системы выполняются одновременно при $-6 \leqslant x < -4$ и при $2 < x \leqslant 4$ (рис. 44, *в*).

Ответ $-6 \leqslant x < -4$, $2 < x \leqslant 4$. ◁

Упражнения

354 Найти область определения функции:

1) $y = \lg(3x-2)$; 2) $y = \log_2(7-5x)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$; 4) $y = \log_7(4-x^2)$.

Решить неравенство **(355—357)**.

355 1) $\log_3(x+2) < 3$; 2) $\log_8(4-2x) \geqslant 2$;

3) $\log_3(x+1) < -2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geqslant -2$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x) \geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x) < -2$.

356 1) $\lg x > \lg 8 + 1$; 2) $\lg x > 2 - \lg 4$;

3) $\log_2(x-4) < 1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

357 1) $\log_{15}(x-3) + \log_{15}(x-5) < 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geqslant -2$.

358 Найти область определения функции:

1) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3)$; 2) $y = \log_6 \dfrac{3x+2}{1-x}$;

3) $y = \sqrt{\lg x + \lg(x+2)}$; 4) $y = \sqrt{\lg(x-1) + \lg(x+1)}$.

Решить неравенство (359—367).

359 1) $\log_5 \dfrac{3x-2}{x^2+1} > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+3}{x-7} < 0$;

3) $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

360 1) $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$; 2) $\log_6(x^2 - 3x + 2) \geqslant 1$;

3) $\log_3(x^2 + 2x) > 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2 - 2{,}5x) < -1$.

361 1) $\lg(x^2 - 8x + 13) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 5x + 7) < 0$;

3) $\log_2(x^2 + 2x) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x - 6) \geqslant -3$.

362 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 x^2 > 0$; 2) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) < 1$.

363 1) $\log_{0,2} x - \log_5(x-2) < \log_{0,2} 3$;

2) $\lg x - \log_{0,1}(x-1) > \log_{0,1} 0{,}5$.

364 1) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$; 2) $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x > 4$.

365 1) $\dfrac{1}{5 - \lg x} + \dfrac{2}{1 + \lg x} < 1$; 2) $\log_3(2 - 3^{-x}) < x + 1 - \log_3 4$;

3) $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$; 4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6} - 2x) < 0$.

366 $\dfrac{2}{3^x - 1} \leqslant \dfrac{7}{9^x - 2}$.

367 $4^x\left(\sqrt{16^{1-x} - 1} + 2\right) < 4\left|4^x - 1\right|$.

Упражнения к главе IV

Вычислить (368—372).

368 1) $\log_{15} 225$; 2) $\log_4 256$; 3) $\log_3 \frac{1}{243}$; 4) $\log_7 \frac{1}{343}$.

369 1) $\log_{\frac{1}{4}} 64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

370 1) $\log_{11} 1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16} 64$; 4) $\log_{27} 9$.

371 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3}$; 2) $10^{-\lg 4}$; 3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

372 1) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$.

373 Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3} 0{,}17$; 4) $\log_{0,3} 8{,}1$.

374 Построить график функции:

1) $y = \log_4 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Какая из данных функций является возрастающей? убывающей? При каких значениях x каждая функция принимает положительные значения? отрицательные значения? значения, равные нулю?

375 Выяснить, является ли возрастающей или убывающей функция:

1) $y = \log_{0,2} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

376 Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 3x$.

377 Найти область определения функции:

1) $y = \log_7 (5 - 2x)$; 2) $y = \log_2 (x^2 - 2x)$.

Решить уравнение (378—380).

378 1) $\log_{\frac{1}{2}}(7 - 8x) = -2$; 2) $\lg (x^2 - 2) = \lg x$.

379 1) $\lg(x^2-2x)=\lg 30-1$;

2) $\log_3(2x^2+x)=\log_3 6-\log_3 2$;

3) $\lg^2 x-3\lg x=4$; 4) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$.

380 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$;

2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$;

3) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 3$;

4) $\log_{\sqrt{6}}(x-1)+\log_{\sqrt{6}}(x+4)=\log_{\sqrt{6}} 6$.

Решить неравенство (381—383).

381 1) $\log_2(x-5)\leqslant 2$; 2) $\log_3(7-x)>1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x)<-3$.

382 1) $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$;

2) $\log_{0,3}(2x+5)\geqslant\log_{0,3}(x+1)$.

383 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$; 2) $\log_3(x^2+7x-5)>1$.

Проверь себя!

1 **Вычислить:**

1) $\log_5 125$; 2) $\lg 0{,}01$; 3) $2^{\log_2 3}$; 4) $3^{2\log_3 7}$;

5) $\log_2 68-\log_2 17$.

2 **Построить схематически график функции:**

1) $y=\log_{0,2} x$; 2) $y=\log_2 x$.

3 **Сравнить числа:**

1) $\log_{0,2} 3$ и $\log_{0,2} 2{,}5$; 2) $\log_2 0{,}7$ и $\log_2 1{,}2$.

4 **Решить уравнение:**

1) $\log_5(3x+1)=2$; 2) $\log_3(x+2)+\log_3 x=1$;

3) $\ln(x^2-6x+9)=\ln 3+\ln(x+3)$.

5 **Решить систему уравнений** $\begin{cases}\ln x-\ln y=\ln 3,\\ x-2y=5.\end{cases}$

6 **Решить неравенство:**

1) $\log_3(x-1)\leqslant 2$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(2-x)>-1$.

384 **Вычислить:**

1) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{25\sqrt[4]{5}}$;

3) $2^{2-\log_2 5}$; 4) $3{,}6^{\log_{3,6} 10+1}$;

5) $2\log_5\sqrt{5}+3\log_2 8$; 6) $\log_2\log_2\log_2 2^{16}$.

385 Сравнить числа:

1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 2) $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{9}} 9}$ и $\sqrt{8}$.

386 Вычислить $\log_{30} 64$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

387 Вычислить $\log_{36} 15$ с точностью до 0,001, зная, что $\lg 3 \approx 0{,}4771$, $\lg 5 \approx 0{,}6990$.

388 При каких значениях x справедливо неравенство:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$?

389 Решить графически уравнение:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Решить уравнение (**390—395**).

390 1) $3^{4x} = 10$; 2) $2^{3x} = 3$; 3) $1{,}3^{3x-2} = 3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x} = 1{,}5$;

5) $16^x - 4^{x+1} - 14 = 0$; 6) $25^x + 2 \cdot 5^x - 15 = 0$.

391 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$;

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;

3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4 \log_3 2$;

4) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9 \log_5 3$.

392 1) $\log_3 (2 - x^2) - \log_3 (-x) = 0$;

2) $\log_5 (x^2 - 12) - \log_5 (-x) = 0$;

3) $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{3x-7} = 2$;

4) $\lg (x+6) - \lg \sqrt{2x-3} = \lg 4$.

393 1) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$;

2) $\log_{0,5} (x + 2) - \log_2 (x - 3) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-4x - 8)$.

394 1) $\log_{\frac{1}{x}} 5 + \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2} \log_x 3 = 1$;

2) $\frac{1}{2} \log_x 7 - \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} 3 - \log_{x^2} 28 = 1$.

395 1) $\log_2 \frac{2}{x-1} = \log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{10}{7-x} = \log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\lg \frac{x+8}{x-1} = \lg x$; 4) $\lg \frac{x-4}{x-2} = \lg x$.

Решить неравенство (396—397).

396 1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant -1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

397 1) $4\log_4 x-33\log_x 4\leqslant 1$; 2) $\log_x 3\leqslant 4(1+\log_{\frac{1}{3}} x)$.

398 Доказать, что если последовательность положительных чисел является геометрической прогрессией, то их логарифмы по одному и тому же основанию образуют арифметическую прогрессию.

399 Найти три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.

400 Построить график функции:

1) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

Решить уравнение (401—403).

401 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

402 1) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

403 1) $\log_2(2^x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$;

3) $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$;

4) $\log_{3x+7}(5x+3)=2-\log_{5x+3}(3x+7)$.

404 Решить неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$.

405 Решить уравнение

$$\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x).$$

406 Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_a x-1}+\frac{1}{\log_a x^2+1}<-\frac{3}{2}.$$

V
глава

Тригонометрические формулы

Математика есть такая наука, которая показывает, как из знаемых количеств находить другие, нам ещё неизвестные.

Д. С. Аничков

§ 21 Радианная мера угла

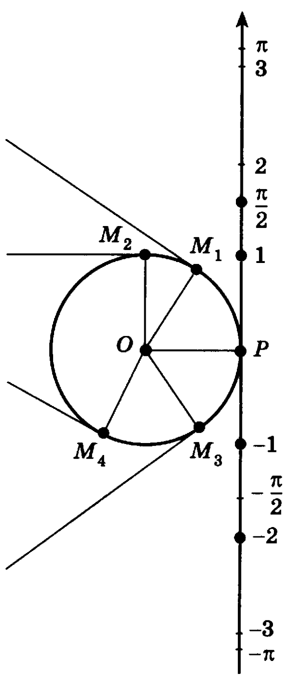


Рис. 45

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности радиуса 1 с центром O (рис. 45). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмём радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ± 1, $\pm \frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm \pi$, где $\pi \approx 3{,}14$ — иррациональное число. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закреплённой на окружности в точке P, будем мысленно наматывать её на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4, такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.*

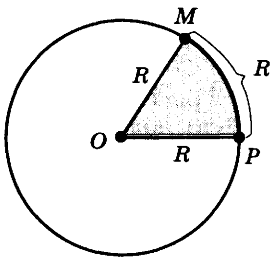


Рис. 46

Так как точке прямой с координатой 1 ставится в соответствие точка M_1, то естественно считать угол POM_1 единичным и мерой этого угла измерять другие углы. Например, угол POM_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$. Такой способ измерения углов широко используется в математике и физике. В этом случае говорят, что углы измеряются в радианной мере, а угол POM_1 называют углом в один радиан (1 рад). Длина дуги окружности PM_1 равна радиусу.

Рассмотрим окружность радиуса R и отметим на ней дугу PM длины R и угол POM (рис. 46).

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

Найдём градусную меру угла в 1 рад. Из курса геометрии известно, что дуге длиной πR (полуокружность) соответствует центральный угол в 180°, тогда дуге длиной R соответствует угол, в π раз меньший, т. е.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}.$$

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то 1 рад $\approx 57{,}3°$.

Если угол содержит α рад, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{\circ}. \qquad (1)$$

Задача 1 Найти градусную меру угла, равного:

1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад.

▶ По формуле (1) находим:

1) π рад $= 180°$; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90°$;

3) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right)^{\circ} = 135°$. ◁

Найдём радианную меру угла в 1°. Так как угол 180° равен π рад, то

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha \text{ рад}. \qquad (2)$$

Задача 2 Найти радианную меру угла, равного:
1) $45°$; 2) $15°$.

▶ По формуле (2) находим:

1) $45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45$ рад $= \frac{\pi}{4}$ рад;

2) $15° = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад. ◁

Приведём таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. Так как угол в 1 рад стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R. \qquad (3)$$

Задача 3 Конец минутной стрелки кремлёвских курантов движется по окружности радиуса $R \approx 3{,}06$ м. Какой путь l проходит конец стрелки за 15 мин?

▶ За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (3) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ находим

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 3{,}06 \text{ м} \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

Ответ $l \approx 4{,}8$ м. ◁

Особенно простой вид формула (3) имеет в случае, когда радиус окружности $R = 1$. Тогда длина дуги равна величине центрального угла, стягиваемого этой дугой, в радианах, т. е. $l = \alpha$. Этим объясняется удобство применения радианной меры в математике, физике, механике и т. д.

Задача 4 Доказать, что площадь кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2}\alpha, \text{ где } 0 < \alpha < \pi.$$

▶ Площадь кругового сектора в π рад (полукруга) равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь сектора в 1 рад в π раз меньше, т. е. равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Следовательно, площадь сектора в α рад равна $\frac{R^2}{2}\alpha$. $\triangleleft$

Упражнения

407 Найти радианную меру угла, выраженного в градусах: 1) 40°; 2) 120°; 3) 150°; 4) 75°; 5) 32°; 6) 140°.

408 Найти градусную меру угла, выраженного в радианах: 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36.

409 (Устно.) Определить градусную и радианную меру углов: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) квадрата; г) правильного шестиугольника.

410 Вычислить радиус окружности, если дуге длиной 0,36 м соответствует центральный угол в 0,9 рад.

411 Найти радианную меру угла, который соответствует дуге окружности длиной 3 см, если радиус окружности равен 1,5 см.

412 Дуге кругового сектора соответствует угол в $\frac{3\pi}{4}$ рад. Найти площадь сектора, если радиус круга равен 1 см.

413 Радиус круга равен 2,5 см, а площадь кругового сектора равна 6,25 см^2. Найти угол, который соответствует дуге этого кругового сектора.

Заполнить таблицу (**414—415**).

414

Градусы	0,5	36	159	108				
Радианы					$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{10}\pi$	2,5	1,8

415

Угол, °	30					
Угол, рад		$\frac{\pi}{5}$			2	
Радиус, см	2		10	5		
Длина дуги, см		2	5			10
Площадь сектора, см^2				50	25	50

§ 22 Поворот точки вокруг начала координат

В предыдущем параграфе использовался наглядный способ установления соответствия между точками числовой прямой и точками окружности. Покажем теперь, как можно установить соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Её называют *единичной окружностью*. Введём понятие поворота точки единичной окружности вокруг начала координат на угол α рад, где α — любое действительное число.

1. Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что точка, двигаясь по единичной окружности от точки $P\ (1;\ 0)$ против часовой стрелки, прошла путь длиной α (рис. 47). Конечную точку пути обозначим M.

В этом случае будем говорить, что точка M получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол α рад.

2. Пусть $\alpha < 0$. В этом случае поворот на угол α рад означает, что движение совершалось по часовой стрелке и точка прошла путь длиной $|\alpha|$ (рис. 48).

Поворот на 0 рад означает, что точка остаётся на месте.

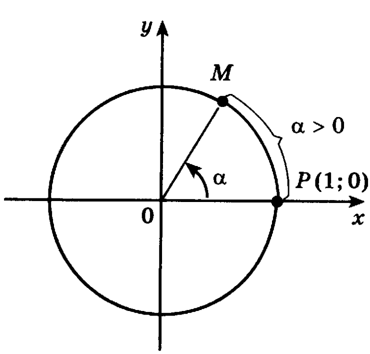


Рис. 47

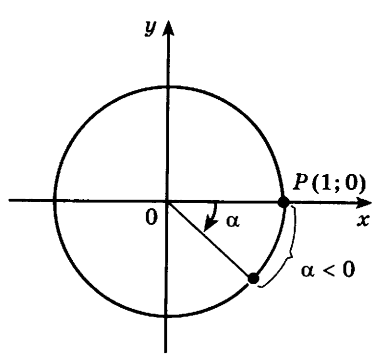


Рис. 48

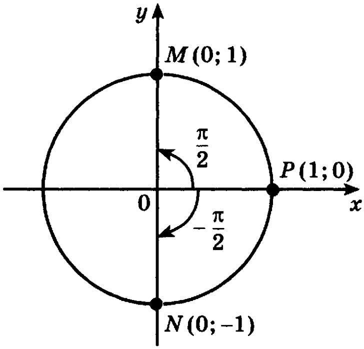


Рис. 49

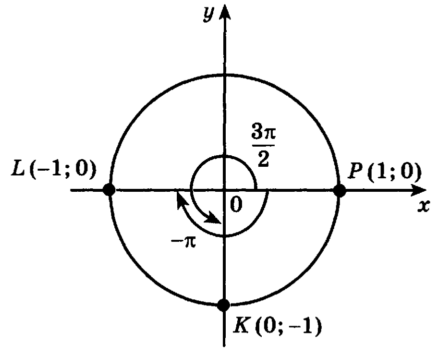


Рис. 50

Примеры.

1) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка M (0; 1).

2) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\frac{\pi}{2}$ рад (рис. 49) получается точка N (0; –1).

3) При повороте точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ рад (рис. 50) получается точка K (0; –1).

4) При повороте точки P (1; 0) на угол $-\pi$ рад (рис. 50) получается точка L (–1; 0).

В курсе геометрии рассматривались углы от 0° до 180°. Используя поворот точки единичной окружности вокруг начала координат, можно рассматривать углы, большие 180°, а также отрицательные углы. Угол поворота можно задавать как в градусах, так и в радианах. Например, поворот точки P (1; 0) на угол $\frac{3\pi}{2}$ означает то же самое, что и поворот на 270°; поворот на $-\frac{\pi}{2}$ — это поворот на –90°.

Приведём таблицу поворотов на некоторые углы, выраженные в радианной и градусной мере (рис. 51)

Отметим, что при повороте точки P (1; 0) на 2π, т. е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение (см. рис. 51). При повороте этой точки на -2π, т. е. на –360°, она также возвращается в первоначальное положение.

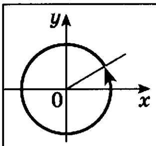
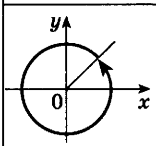
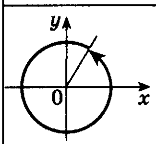
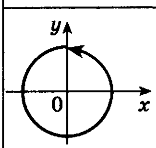
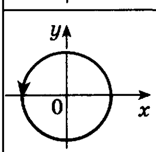
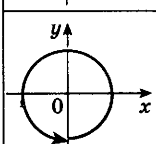
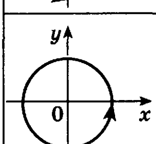
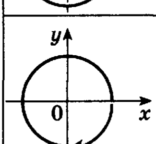
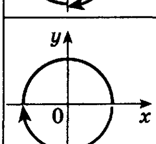
	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	–90°
	$-\pi$	–180°

Рис. 51

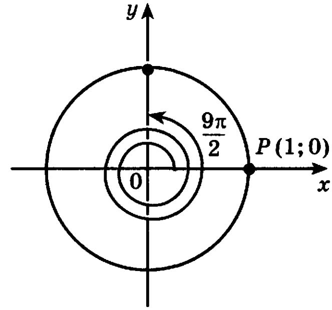


Рис. 52

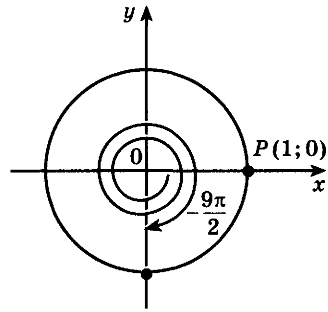
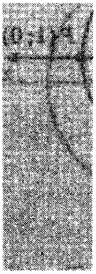


Рис. 53

Теперь рассмотрим примеры поворотов точки на угол, больший 2π, и на угол, меньший -2π. Так, при повороте на угол $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и ещё проходит путь $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и ещё проходит путь $\frac{\pi}{2}$ в том же направлении (рис. 53).

Заметим, что при повороте точки $P\ (1;\ 0)$ на угол $\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ (рис. 52). При повороте на угол $-\frac{9\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$ (рис. 53).

Вообще, если $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.



Итак, каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол α рад.

Однако одной и той же точке M единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi k$, где k — целое число, задающих поворот точки $P\ (1;\ 0)$ в точку M (рис. 54).

Задача 1 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$.

▶ 1) Так как $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$, то при повороте на 7π получается та же самая точка, что и при повороте на π, т.е. получается точка с координатами $(-1;\ 0)$.

2) Так как $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, то при повороте на $-\frac{5\pi}{2}$ получается та же самая точка, что и при повороте на $-\frac{\pi}{2}$, т. е. получается точка с координатами $(0;\ -1)$. ◁

Задача 2 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $(1;\ 0)$, чтобы получить точку $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

▶ Из прямоугольного треугольника AOM (рис. 55) следует, что угол AOM равен $\frac{\pi}{6}$, т. е. один из возможных углов поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Следовательно,

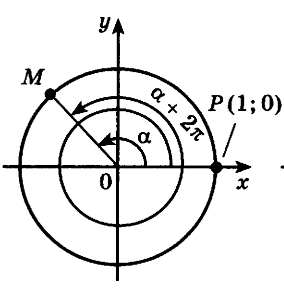


Рис. 54

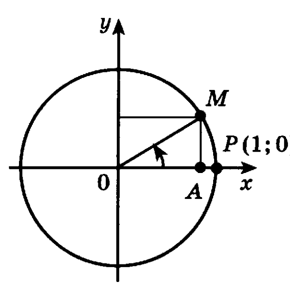


Рис. 55

все углы, на которые нужно повернуть точку (1; 0), чтобы получить точку $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, выражаются так: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k — любое целое число. ◁

Упражнения

416 Найти координаты точки единичной окружности, полученной поворотом точки (1; 0) на угол:

1) 4π; 2) $-\frac{3}{2}\pi$; 3) $-6{,}5\pi$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{3}$; 6) $-45°$.

На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки (1; 0) на заданный угол (**417—419**).

417 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{3}{4}\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{5}{4}\pi$; 6) $-225°$.

418 1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$.

419 1) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число; 2) $-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, k — целое число; 3) $-\pi + 2\pi k$, k — целое число; 4) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k — целое число.

420 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π; 5) $540°$; 6) $810°$.

421 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

422 Найти координаты точки, полученной поворотом точки P (1; 0) на угол (k — целое число):

1) $\frac{\pi}{2} \pm \pi$; 2) $\frac{\pi}{4} \pm \pi$; 3) $-\frac{3\pi}{2} + \pi k$; 4) $-\pi + \pi k$.

423 Найти все углы, на которые нужно повернуть точку P (1; 0), чтобы получить точку с координатами:

1) (1; 0); 2) (–1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1).

424 Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95.

425 Найти число x, где $0 \leqslant x < 2\pi$, и натуральное число k, такие, чтобы выполнялось равенство $a = x + 2\pi k$, если:

1) $a = 9{,}8\pi$; 2) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 3) $a = \frac{11}{2}\pi$; 4) $a = \frac{17}{3}\pi$.

426 На единичной окружности построить точку, полученную поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол:

1) $4{,}5\pi$; 2) $5{,}5\pi$; 3) -6π; 4) -7π.

427 Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P\ (1;\ 0)$ на угол (k — целое число):

1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$.

428 Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P\ (1;\ 0)$, чтобы получить точку с координатами:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

§ 23 Определение синуса, косинуса и тангенса угла

В курсе геометрии были введены синус, косинус и тангенс угла, выраженного в градусах. Этот угол рассматривался в промежутке от 0° до 180°. Синус и косинус произвольного угла определяются следующим образом (рис. 56):

Определение 1. ***Синусом угла*** **α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\sin \alpha$).**

Определение 2. ***Косинусом угла*** **α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α (обозначается $\cos \alpha$).**

В этих определениях угол α может выражаться как в градусах, так и в радианах.

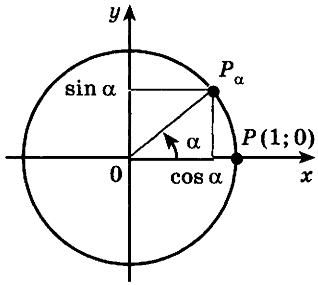


Рис. 56

Например, при повороте точки (1; 0) на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол 90°, получается точка (0; 1). Ордината точки (0; 1) равна 1, поэтому $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$; абсцисса этой точки равна 0, поэтому $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$.

Заметим, что приведённые определения синуса и косинуса в случае, когда угол заключён в промежутке от 0° до 180°, совпадают с определениями синуса и косинуса, известными из курса геометрии. Например,

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos\pi = \cos 180° = -1.$$

Задача 1 Найти $\sin(-\pi)$ и $\cos(-\pi)$.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол $-\pi$ перейдёт в точку (−1; 0) (рис. 57). Следовательно, $\sin(-\pi) = 0$, $\cos(-\pi) = -1$. ◁

Задача 2 Найти sin 270° и cos 270°.

▶ Точка (1; 0) при повороте на угол 270° перейдёт в точку (0; −1) (рис. 58). Следовательно, $\cos 270° = 0$, $\sin 270° = -1$. ◁

Напомним, что меру угла α (в радианах) можно рассматривать как действительное число. Поэтому sin α и cos α можно рассматривать как числовое выражение. Например, в уравнении $\sin x = a$, где a — заданное число, считается, что x — неизвестное число.

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = 0$.

▶ Решить уравнение $\sin x = 0$ — это значит найти все углы, синус которых равен нулю. Ординату,

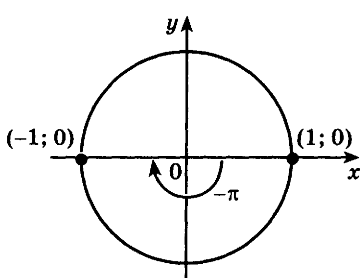


Рис. 57

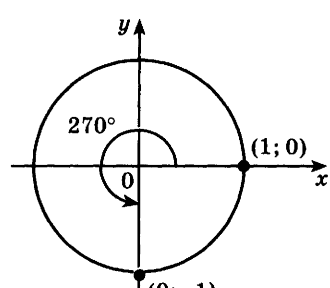


Рис. 58

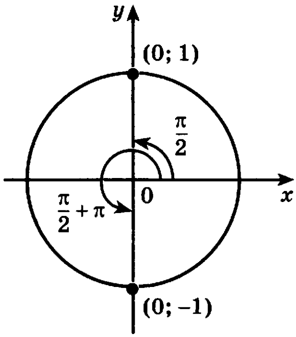


Рис. 59

равную нулю, имеют две точки единичной окружности (1; 0) и (–1; 0) (рис. 57). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы 0, π, 2π, 3π и т. д., а также на углы $-\pi$, -2π, -3π и т. д. Следовательно, $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где k — любое целое число. ◁

Множество целых чисел обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$. Для обозначения того, что число k принадлежит $\boldsymbol{Z}$, используют запись $k \in \boldsymbol{Z}$ (читается: «k принадлежит $\boldsymbol{Z}$»). Ответ к задаче 3 можно записать так:

$$x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Задача 4 Решить уравнение $\cos x = 0$.

▶ Абсциссу, равную нулю, имеют две точки единичной окружности (0; 1) и (0; –1) (рис. 59). Эти точки получаются из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ и т. д., а также на углы $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ и т. д., т. е. на углы $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 5 Решить уравнение: 1) $\sin x = 1$; 2) $\cos x = 1$.

▶ 1) Ординату, равную единице, имеет точка (0; 1) единичной окружности. Эта точка получается из точки (1; 0) поворотом на углы $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную единице, имеет точка, полученная из точки (1; 0) поворотом на углы $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ 1) $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Определение 3. ***Тангенсом угла*** **α называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $\operatorname{tg} \alpha$).**

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Например,

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Иногда используется котангенс угла α (обозначается $\mathrm{ctg}\,\alpha$), который определяется формулой

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Например,

$$\mathrm{ctg}\,270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0, \quad \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отметим, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого угла, а их значения заключены от -1 до 1; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ определён лишь для тех углов, для которых $\cos\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ определён лишь для тех углов, для которых $\sin\alpha \neq 0$, т. е. для любых углов, кроме $\alpha = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приведём таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

Задача 6 Вычислить $4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$.

▶ Используя таблицу, получаем

$$4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2{,}5. \quad \triangleleft$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов, не вошедших в эту таблицу, можно найти по четырёхзначным математическим таблицам В. М. Брадиса, а также с помощью инженерного микрокалькулятора.

Задача 7 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sin 25°$; 2) $\cos \frac{\pi}{5}$; 3) $\operatorname{tg} 5$.

▶ На любом микрокалькуляторе вычисления проводятся с помощью клавиш $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\operatorname{tg}}$, но перед их нажатием нужно нажимать клавишу $\boxed{\mathrm{F}}$. Перед вычислением нужно установить переключатель Р — Г (радиан — градус) в нужном положении. Требуемое приближённое значение можно прочитать на табло микрокалькулятора.

1) $\sin 25° \approx \underline{0{,}42261825}$;

2) $\cos \frac{\pi}{5} \approx \underline{0{,}80901703}$;

3) $\operatorname{tg} 5 \approx \underline{-3{,}380514}$.

Ответ 1) 0,42; 2) 0,81; 3) –3,38. ◁

Упражнения

429 Отметить на единичной окружности точки, соответствующие числу α, если:

1) $\sin \alpha = 1$; 2) $\sin \alpha = 0$; 3) $\cos \alpha = -1$; 4) $\cos \alpha = 0$;

5) $\sin \alpha = -0{,}6$; 6) $\sin \alpha = 0{,}5$; 7) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

430 Вычислить:

1) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$;

3) $\sin \pi - \cos \pi$; 4) $\sin 0 - \cos 2\pi$;

5) $\sin \pi + \sin 1{,}5\pi$; 6) $\sin 0 + \cos 2\pi$.

431 Найти значения синуса и косинуса числа β, если:

1) $\beta = 3\pi$; 2) $\beta = 4\pi$; 3) $\beta = 3{,}5\pi$;

4) $\beta = \frac{5}{2}\pi$; 5) $\beta = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\beta = (2k + 1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вычислить (432—433).

432 1) $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin \pi k + \cos 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

4) $\cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \dfrac{(4k+1)\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

433 1) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; 2) $\operatorname{tg} 0° - \operatorname{tg} 180°$;
3) $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$; 4) $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$.

434 Найти значение выражения:

1) $3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

2) $5 \sin \frac{\pi}{4} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 5 \cos \frac{\pi}{4} - 10 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$;

4) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

435 Решить уравнение:

1) $2 \sin x = 0$; 2) $\frac{1}{2} \cos x = 0$;

3) $\cos x - 1 = 0$; 4) $1 - \sin x = 0$.

436 Может ли $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$ быть равным:
1) 0,049; 2) $-0{,}875$; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2 + \sqrt{2}$?

437 Найти значение выражения:

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0{,}5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$ при $\alpha = 60°$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

438 Найти значение выражения:

1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}$;

2) $2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$;

3) $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.

439 Решить уравнение:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$;

3) $\sin 3x = 0$; 4) $\cos 0{,}5x = 0$;

5) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$; 6) $\cos\left(5x + \frac{4\pi}{5}\right) = 1$.

440 Используя микрокалькулятор, проверить равенство:

1) $\sin 60° \approx 0{,}866$; 2) $\cos 45° \approx 0{,}707$;

3) $\cos \frac{\pi}{5} \approx 0{,}996$; 4) $\sin \frac{\pi}{13} \approx 0{,}225$.

441 Вычислить с точностью до 0,01, используя микрокалькулятор:

1) $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 4{,}81$; 3) $\sin 38°$; 4) $\cos 45°12'$;

5) $\sin \frac{\pi}{5}$; 6) $\cos \frac{10}{7}\pi$; 7) $\operatorname{tg} 12°$; 8) $\sin \frac{19}{9}\pi$.

§ 24 Знаки синуса, косинуса и тангенса

1. Знаки синуса и косинуса.

Пусть точка (1; 0) совершает поворот против часовой стрелки. Для точек, находящихся в первой четверти (квадранте), ординаты и абсциссы положительны. Поэтому $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 60, 61).

Для точек, расположенных во второй четверти, ординаты положительны, а абсциссы отрицательны. Следовательно, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (рис. 60, 61). Аналогично в третьей четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, а в четвёртой четверти $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 60, 61).

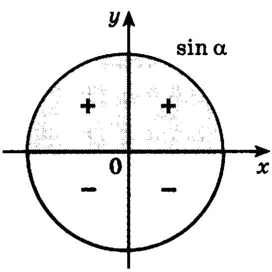


Рис. 60

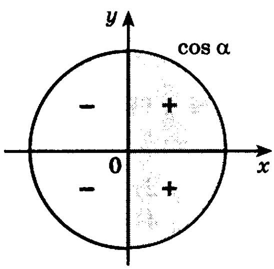


Рис. 61

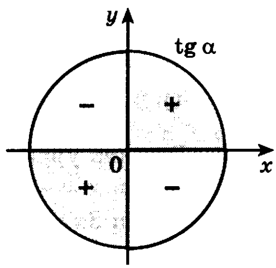


Рис. 62

При повороте точки по часовой стрелке на угол, больший 2π, а также при повороте точки на любой угол по часовой стрелке знаки синуса и косинуса определяются тем, в какой четверти окажется точка. Это показано на рисунках 60, 61.

Задача 1 Выяснить знаки синуса и косинуса угла:
1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $745°$; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

▶ 1) Углу $\frac{3\pi}{4}$ соответствует точка единичной окружности, расположенная во второй четверти. Поэтому $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Так как $745° = 2 \cdot 360° + 25°$, то повороту точки $(1; 0)$ на угол $745°$ соответствует точка, расположенная в первой четверти. Поэтому $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

3) Так как $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то при повороте точки $(1; 0)$ на угол $-\frac{5\pi}{7}$ получается точка третьей четверти. Поэтому $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ◁

2. Знаки тангенса.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha > 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, и $\operatorname{tg}\alpha < 0$, если $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют противоположные знаки. Знаки тангенса в различных четвертях показаны на рисунке 62.

Задача 2 Выяснить знак тангенса угла: 1) $260°$; 2) 3.

▶ 1) Так как $180° < 260° < 270°$, то $\operatorname{tg} 260° > 0$.

2) Так как $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 3 < 0$. ◁

Упражнения

442 В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки P $(1; 0)$ на угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$;
6) $\alpha = 4{,}8$; 7) $\alpha = -1{,}31$; 8) $\alpha = -2{,}7$?

443 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. В какой четверти находится точка, полученная поворотом точки P (1; 0) на угол:

1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; 2) $\alpha - \pi$; 3) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$;

4) $\frac{\pi}{2} + \alpha$; 5) $\alpha - \frac{\pi}{2}$; 6) $\pi - \alpha$?

444 Определить знак числа $\sin \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$; 3) $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$;

4) $\alpha = -0{,}1\pi$; 5) $\alpha = 5{,}1$; 6) $\alpha = -470°$.

445 Определить знак числа $\cos \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$;

4) $\alpha = 4{,}6$; 5) $\alpha = -5{,}3$; 6) $\alpha = -150°$.

446 Определить знак числа $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha = \frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$;

4) $\alpha = 3{,}7$; 5) $\alpha = -1{,}3$; 6) $\alpha = 283°$.

447 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4}$;

3) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$; 4) $2\pi < \alpha < 2{,}5\pi$.

448 Определить знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если:

1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = -3{,}4$; 4) $\alpha = -1{,}3$.

449 Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Определить знак числа:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(\alpha - \pi)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; 6) $\sin(\pi - \alpha)$.

450 Каковы знаки чисел $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

1) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; 2) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$?

451 Найти значения углов α, заключённых в промежутке от 0 до 2π, знаки синуса и косинуса которых совпадают; различны.

452 Определить знак числа:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

453 Сравнить значения выражений:

1) $\sin 0{,}7$ и $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ и $\cos 2{,}3$.

454 Решить уравнение:

1) $\sin(5\pi + x) = 1$; 2) $\cos(x + 3\pi) = 0$;

3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1$.

455 В какой четверти находится точка, соответствующая числу α, если:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = -1{,}4$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1{,}4$?

§ 25 Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

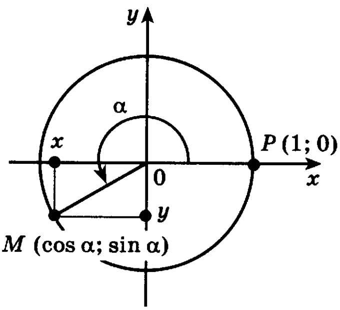


Рис. 63

Выясним *зависимость между синусом и косинусом.*

Пусть точка $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α (рис. 63). Тогда по определению синуса и косинуса

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому её координаты $(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется *основным тригонометрическим тождеством.*

Из равенства (1) можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Задача 1 Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Воспользуемся формулой (2). Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, т. е. в формуле (2) перед корнем нужно поставить знак «–»:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \ \triangleleft$$

Задача 2 Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

▶ Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\cos\alpha > 0$, поэтому в формуле (3) перед корнем нужно поставить знак «+»:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \ \triangleleft$$

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.* По определению тангенса и котангенса $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Перемножая почленно эти равенства, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$ и наоборот:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

Равенства (4) — (6) справедливы при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 3 Вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 13$.

▶ По формуле (6) находим $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{13}$. $\triangleleft$

Задача 4 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ По формуле (3) находим $\cos\alpha$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3}$. $\triangleleft$

Используя основное тригонометрическое тождество и определение тангенса, найдём *зависимость между тангенсом и косинусом.*

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, предполагая, что $\cos\alpha \neq 0$. Получим равенство $\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

Эта формула верна, если $\cos\alpha \neq 0$, т. е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из неё можно выразить тангенс через косинус и косинус через тангенс.

Задача 5 Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

▶ Из формулы (7) получаем

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Тангенс во второй четверти отрицателен, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$. ◁

Задача 6 Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

▶ Из формулы (7) находим

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{10}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$. ◁

Упражнения

456 Может ли синус (косинус) принимать значения:

$$0{,}03, \quad \frac{2}{3}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{11}{13}, \ -\frac{13}{11}, \ \sqrt{2}?$$

457 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$;

4) $\sin\alpha = 0{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}8$?

458 Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\mathrm{tg}\,\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
8) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

460 Какие значения может принимать:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

461 Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$;
2) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

462 Пусть α — один из углов прямоугольного треугольника. Найти $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

463 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. Найти значение выражения:

1) $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}$;
2) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$;
4) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

464 Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Найти:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;
2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

§ 26 Тригонометрические тождества

Задача 1 Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, справедливо равенство

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad (1)$$

▶ По определению $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и поэтому

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти преобразования верны, так как $\sin \alpha \neq 0$ при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Равенство (1), справедливое при всех допустимых значениях входящих в него букв (т. е. таких, при которых его левая и правая части имеют смысл), называют *тождеством*, а задачи на доказательство таких равенств называют задачами на доказательство тождеств.

Обычно при доказательстве тригонометрических тождеств или при упрощении выражений допустимые значения углов не устанавливают, если это не требуется в условии задачи.

Задача 2 Доказать тождество

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha).$$

▶ $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$. ◁

Задача 3 Доказать тождество $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

▶ Чтобы доказать это тождество, покажем, что разность между его левой и правой частями равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - (1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)} = 0. \;◁$$

При решении задач 1—3 использовались следующие *способы доказательства тождеств*: преобразование левой части к правой; преобразование правой части к левой; установление того, что разность между левой и правой частями равна нулю. Иногда удобно доказательство тождества провести преобразованием его левой и правой частей к одному и тому же выражению.

Задача 4 Доказать тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

▶ $$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Тождество доказано, так как его левая и правая части равны $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. ◁

Задача 5 Упростить выражение $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

▶ $$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$=\sin\alpha\cos\alpha$. ◁

Упражнения

465 Доказать тождество:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;
2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\cos^2\alpha$;
3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha$;
5) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;
6) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-2\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

467 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1-\cos^2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

3) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\,\alpha\ \mathrm{ctg}^2\,\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

468 Доказать тождество:

1) $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) = 1$;

2) $\sin^2\alpha\,(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

469 Упростить выражение:

1) $(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)\cos^2\alpha - 1$;

2) $1 - \sin^2\alpha\,(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha)$;

3) $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

4) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$.

470 Доказать тождество:

1) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} + \dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha} = 1$;

8) $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha$.

471 Найти значение выражения $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}6$.

472 Найти значение выражения $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$, если $\cos\alpha - \sin\alpha = 0{,}2$.

473 Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 3$. Найти $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha$.

474 Решить уравнение:

1) $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2 = 0$;

3) $3\cos^2 x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2 x$;

4) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2 x$.

§ 27 Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 64). Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$. Следовательно,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{2}$$

Используя определение тангенса, получаем

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Формулы (1) — (2) справедливы при любых α, а формула (3) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Можно показать, что если $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Формулы (1) — (3) позволяют сводить вычисление значений синуса, косинуса и тангенса отрицательных углов к вычислению их значений для положительных углов. Например,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

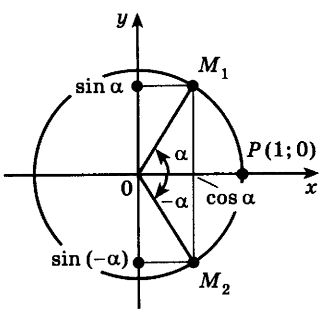


Рис. 64

Упражнения

475 Вычислить:

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;   2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\cos(-\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

6) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3+7{,}5\operatorname{tg}(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\frac{3}{2}\pi$.

476 Упростить выражение:

1) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$;   2) $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

477 Вычислить:

1) $\dfrac{2-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

2) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

478 Упростить выражение:

1) $\dfrac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$;   2) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

479 Доказать тождество:

1) $\cos\alpha\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha))=\operatorname{ctg}(-\alpha)$;

2) $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

480 Решить уравнение:

1) $\sin(-x)=1$;   2) $\cos(-2x)=0$;

3) $\cos(-2x)=1$;   4) $\sin(-2x)=0$;

5) $\cos^2(-x)+\sin(-x)=2-\sin^2 x$;

6) $1-\sin^2(-x)+\cos(4\pi-x)=\cos(x-2\pi)$.

§ 28 Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$ и $\sin(\alpha \pm \beta)$ через синусы и косинусы углов α и β.

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

● Пусть точки M_α, $M_{-\beta}$ и $M_{\alpha+\beta}$ получены поворотом точки $M_0\,(1;\,0)$ на углы α, $-\beta$ и $\alpha + \beta$ рад соответственно (рис. 65).

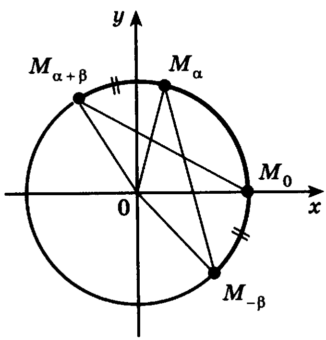


Рис. 65

По определению синуса и косинуса эти точки имеют следующие координаты:

$$M_\alpha\,(\cos\alpha;\ \sin\alpha),$$
$$M_{-\beta}\,(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}\,(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$, то равнобедренные треугольники $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_\alpha$ равны и, значит, равны их основания $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_\alpha$. Следовательно, $(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2$.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получаем

$$(1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (-\sin(\alpha+\beta))^2 =$$
$$= (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2.$$

Преобразуем это равенство, используя формулы (1) и (2) из § 27:

$$1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) =$$
$$= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta +$$
$$+ 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, получаем

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$,

откуда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. ○

Задача 1 Вычислить $\cos 75°$.

▶ По формуле (1) находим

$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° -$
$- \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ◁

Заменив в формуле (1) β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

откуда

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.} \qquad (2)$$

Задача 2 Вычислить $\cos 15°$.

▶ По формуле (2) получаем

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° +$
$+ \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Доказать формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (3)$$

▶ При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ по формуле (2) получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta, \text{ т. е.}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta. \qquad (4)$$

Заменив в этой формуле β на α, получим $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$. Полагая в формуле (4) $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$. ◁

Используя формулы (1) — (4), выведем формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (5)$$

Заменяя в формуле (5) β на $-\beta$, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta).$$

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (6)$$

Задача 4 Вычислить $\sin 210°$.

▶ $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \sin 30° = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. ◁

Задача 5 Вычислить $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$.

▶ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0$. ◁

Задача 6* Доказать равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

▶ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу (7). ◁

Формула (7) может быть полезна при вычислениях. Например, по этой формуле находим

$$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \frac{\operatorname{tg}180° + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}180°\operatorname{tg}45°} = 1.$$

Упражнения

481 С помощью формул сложения вычислить:

1) $\cos 135°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\cos 150°$; 4) $\cos 240°$.

482 Вычислить, не пользуясь таблицами:

1) $\cos 57°30' \cos 27°30' + \sin 57°30' \sin 27°30'$;
2) $\cos 19°30' \cos 25°30' - \sin 19°30' \sin 25°30'$;
3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9} - \sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;
4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

483 Вычислить:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

484 Упростить выражение:

1) $\cos 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin 3\alpha$;
2) $\cos 5\beta\cos 2\beta + \sin 5\beta\sin 2\beta$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

485 Найти значение выражения:

1) $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$;

2) $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

486 Вычислить:

1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

487 Упростить выражение:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$;

2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

488 Вычислить $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, и $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

489 Вычислить $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

490 Вычислить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, и $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

491 Упростить выражение:

1) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$;

3) $\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$;

4) $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$.