663 1) $2 \sin 2x = 3 \cos 2x$; 2) $4 \sin 3x + 5 \cos 3x = 0$.

664 1) $5 \sin x + \cos x = 5$; 2) $4 \sin x + 3 \cos x = 6$.

665 1) $\sin 3x = \sin 5x$; 2) $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$;
3) $\cos x = \cos 3x$; 4) $\sin x \sin 5x - \sin^2 5x = 0$.

Проверь себя!

1 **Найти значение выражения:**

1) $\arccos 1 + \arcsin 0$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 **Решить уравнение:**

1) $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = 1$;
2) $2 \cos^2 x + 5 \cos x = 3$; 3) $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 0$;
4) $\sin 3x - \sin x = 0$; 5) $2 \sin x + \sin 2x = 0$.

Вычислить (666—667).

666 1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

667 1) $\sin(4 \arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3 \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
3) $\cos(6 \arcsin 1)$; 4) $\operatorname{tg}\left(4 \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решить уравнение (668—675).

668 1) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1$;
2) $\cos 2x + 3 \sin 2x = 3$.

669 1) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;
2) $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

670 1) $1 + 2 \sin x = \sin 2x + 2 \cos x$;
2) $1 + 3 \cos x = \sin 2x + 3 \sin x$.

671 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$;
2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$.

672 1) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4}$;
2) $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$.

673 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$; 2) $\sin^2 x + \cos^2 2x = 1$;
3) $\sin 4x = 6 \cos^2 2x - 4$; 4) $2 \cos^2 3x + \sin 5x = 1$.

674 1) $\sin^2 x - \cos x \cos 3x = \frac{1}{4}$;

2) $\sin 3x = 3 \sin x$;

3) $3 \cos 2x - 7 \sin x = 4$;

4) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$;

5) $5 \sin 2x + 4 \cos^3 x - 8 \cos x = 0$.

675 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

2) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

Вычислить **(676—677)**.

676 1) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi - \arcsin \frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\pi + \arcsin \frac{2}{3}\right)$.

677 1) $\operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{5}{4}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

Решить уравнение **(678—684)**.

678 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$.

679 1) $\cos x \sin 5x = -1$; 2) $\sin x \cos 3x = -1$.

680 1) $2 \cos 3x = 3 \sin x + \cos x$; 2) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

681 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x + 1$; 2) $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

682 $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

683 $\sqrt{-4 \cos x \cos 2x} = \sqrt{7 \sin 2x}$.

684 $|\cos x| - \cos 3x = \sin 2x$.

Решить систему уравнений **(685—686)**.

685 1) $\begin{cases} \sin y \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

686 1) $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{5}{3}, \\ \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

687 При каких значениях a уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a$$

имеет корни? Найти эти корни.

688 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$$

имеет корни.

689 Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin 2x - 2a\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x) + 1 - 6a^2 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

690 Решить неравенство:

1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

VII
глава

Тригонометрические функции

Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

У. Томсон

§ 38 Область определения и множество значений тригонометрических функций

Известно, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки (1; 0) на угол x рад. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x.$$

Областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Чтобы найти множество значений функции $y = \sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений y существуют такие значения x, при которых $\sin x = y$. Известно, что уравнение $\sin x = a$ имеет корни, если $|a| \leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.

Множеством значений функции $y = \sin x$ является отрезок $[-1; 1]$.
Множеством значений функции $y = \cos x$ также является отрезок $[-1; 1]$.

Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются ограниченными.

Задача 1 Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

▶ Найдём значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т. е. значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x + \cos x = 0$, находим $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 2 Найти множество значений функции

$$y = 3 + \sin x \cos x.$$

▶ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3 + \sin x \cos x = a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3 + \frac{1}{2} \sin 2x = a$, откуда $\sin 2x = 2a - 6$. Это уравнение имеет корни, если $|2a - 6| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant 2a - 6 \leqslant 1$, откуда $5 \leqslant 2a \leqslant 7$, $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$. Следовательно, множеством значений данной функции является отрезок $[2{,}5; 3{,}5]$. ◁

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется формулой $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Эта функция определена при тех значениях x, для которых $\cos x \neq 0$.

Известно, что $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, так как уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ называются *тригонометрическими функциями*.

Задача 3 Найти область определения функции

$$y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

▶ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Задача 4* Найти множество значений функции

$$y = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

▶ Выясним, при каких значениях a уравнение $3 \sin x + 4 \cos x = a$ имеет корни. Поделим уравнение на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$$\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = \frac{a}{5}.$$

Так как $0 < \frac{3}{5} < 1$, то можно найти такой угол α первой четверти, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, что $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (этот угол $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$). Тогда $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, откуда $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Уравнение примет вид $\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{a}{5}$, т. е. $\sin (x + \alpha) = \frac{a}{5}$. Это уравнение имеет корни, если $-1 \leqslant \frac{a}{5} \leqslant 1$, т. е. $-5 \leqslant a \leqslant 5$.

Ответ $-5 \leqslant y \leqslant 5$. ◁

Упражнения

691 Найти область определения функции:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$; 3) $y = \cos \frac{1}{x}$;

4) $y = \sin \frac{2}{x}$; 5) $y = \sin \sqrt{x}$; 6) $y = \cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

692 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = 2 \sin x + 3$; 4) $y = 1 - 4 \cos 2x$;

5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$; 6) $y = \frac{1}{2} \sin x \cos x - 1$.

Найти область определения функции (693—695).

693 1) $y = \frac{1}{\cos x}$; 2) $y = \frac{2}{\sin x}$; 3) $y = \mathrm{tg}\, \frac{x}{3}$; 4) $y = \mathrm{tg}\, 5x$.

694 1) $y = \sqrt{\sin x + 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 3) $y = \lg \sin x$;

4) $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$; 5) $y = \sqrt{1 - 2 \sin x}$; 6) $y = \ln \cos x$.

695 1) $y = \frac{1}{2 \sin^2 x - \sin x}$; 2) $y = \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$;

3) $y = \frac{1}{\sin x - \sin 3x}$; 4) $y = \frac{1}{\cos^3 x + \cos x}$.

696 Найти множество значений функции:

1) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x$; 2) $y = 1 - 8 \cos^2 x \sin^2 x$;

3) $y = \frac{1 + 8 \cos^2 x}{4}$; 4) $y = 10 - 9 \sin^2 3x$;

5) $y = 1 - 2 |\cos x|$; 6) $y = \sin x + \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

697 Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3 \cos 2x - 4 \sin 2x.$$

698 Найти множество значений функции $y = \sin x - 5 \cos x$.

699 Найти множество значений функции

$$y = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x.$$

§ 39 Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций

Каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$, и для любого значения x верны равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. Следовательно, $y = \sin x$ — *нечётная* функция, а $y = \cos x$ — *чётная* функция. Так как для любого значения x из области определения функции $y = \mathrm{tg}\, x$ верно равенство $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, то $y = \mathrm{tg}\, x$ — *нечётная* функция.

Задача 1 Выяснить, является ли функция $y = 2 + \sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ чётной или нечётной.

▶ Функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$. По формуле приведения она примет вид $y = 2 + \sin^2 x$. Так как $\sin(-x) = -\sin x$, то $(\sin(-x))^2 = \sin^2 x$, т. е. $2 + \sin^2(-x) = 2 + \sin^2 x$ и $y(-x) = y(x)$, т. е. данная функция является чётной. ◁

Известно, что для любого значения x верны равенства $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются *периодическими* с периодом 2π.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x + T$, $x - T$ и вообще числа $x + Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$, также принадлежат области определения этой периодической функции и $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 2 Доказать, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y = \cos x$.

▶ Пусть $T > 0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x + T) = \cos x$. Положив $x = 0$, получим $\cos T = 1$. Отсюда $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как $T > 0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ..., и поэтому период не может быть меньше 2π. ◁

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции $y = \sin x$ также равен 2π.

Задача 3 Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

▶ Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то, для того чтобы убедиться в том, что она является периодической с периодом T, достаточно показать, что для любого x верно равенство

$f(x+T) = f(x) = f(x-T)$. Данная функция определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, и $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x+2\pi) = \sin 3x = f(x)$. Аналогично, $f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x-2\pi) = f(x)$. ◁

Задача 4 Доказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с наименьшим положительным периодом π.

▶ Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то по формулам приведения получаем

$$\operatorname{tg}(x-\pi) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = -(-\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x-\pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi)$. Следовательно, π — период функции $y = \operatorname{tg} x$.
Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x+T) = \operatorname{tg} x$, откуда при $x = 0$ получаем $\operatorname{tg} T = 0$, $T = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$. ◁

Задача 5 Доказать, что $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

▶ Так как $\operatorname{tg}\frac{x+3\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x-3\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, то $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ◁

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебания маятника, вращение планет, переменный ток и т. д.).

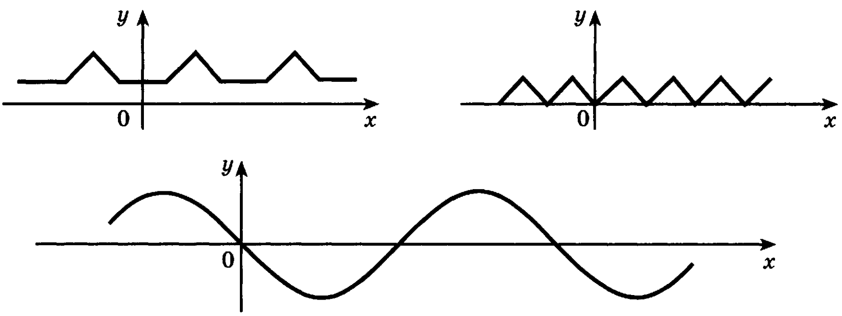


Рис. 84

На рисунке 84 изображены графики некоторых периодических функций. Отметим, что на всех последовательных отрезках числовой прямой, длина которых равна периоду, график периодической функции имеет один и тот же вид.

Упражнения

Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной (**700—701**).

700 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = 2 \sin 4x$; 3) $y = \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

4) $y = x \cos \frac{x}{2}$; 5) $y = x \sin x$; 6) $y = 2 \sin^2 x$.

701 1) $y = \sin x + x$; 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$;

3) $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi - x)$;

4) $y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 3$;

5) $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cos x$; 6) $y = x^2 + \frac{1 + \cos x}{2}$.

702 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 2π, если:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3 \sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

703 Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x$, $T = \pi$; 2) $y = \cos \frac{x}{2}$, $T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin \frac{4x}{5}$, $T = \frac{5}{2}\pi$.

704 Определить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x}$;

3) $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$; 4) $y = \frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$;

5) $y = 3^{\cos x}$; 6) $y = x\,|\sin x|\,\sin^3 x$.

Найти наименьший положительный период функции (705—706).

705 1) $y = \cos \frac{2}{5} x$; 2) $y = \sin \frac{3}{2} x$; 3) $y = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$; 4) $y = |\sin x|$.

706 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \mathrm{tg}\, x$.

707 Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что:

1) $f(x) + f(-x)$ — чётная функция;
2) $f(x) - f(-x)$ — нечётная функция.

§ 40 Свойства функции $y = \cos x$ и её график

Напомним, что функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством её значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, функция ограничена и график этой функции расположен *в полосе между прямыми* $y = -1$ и $y = 1$.

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, то *достаточно построить её график на* каком-нибудь *промежутке длиной* 2π, например на отрезке $[-\pi; \pi]$; тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, график будет таким же.

Функция $y = \cos x$ является чётной. Поэтому её график симметричен относительно оси Oy. Для построения графика на отрезке $[-\pi; \pi]$ достаточно построить его для $x \in [0; \pi]$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy.

Прежде чем перейти к построению графика, покажем, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$.

● В самом деле, при повороте точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол от 0 до π абсцисса точки, т. е. $\cos x$, уменьшается от 1 до -1. Поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$, то $\cos x_1 > \cos x_2$ (рис. 85). Это и означает, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. ○

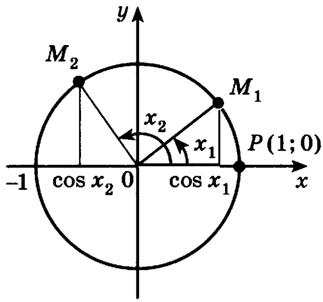


Рис. 85

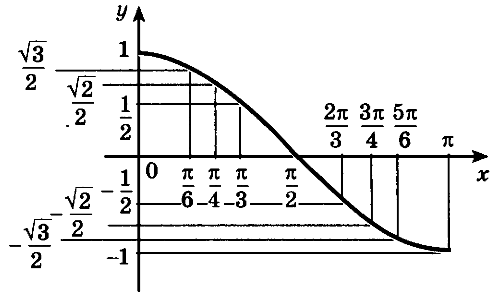


Рис. 86

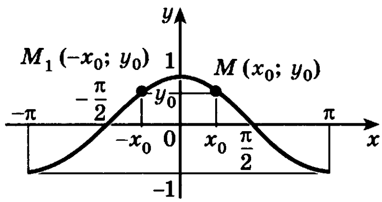


Рис. 87

Используя свойство убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом отрезке (рис. 86). Пользуясь свойством чётности функции $y = \cos x$, отразим построенный на отрезке $[0; \pi]$ график симметрично относительно оси Oy, получим график этой функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 87).

Так как $y = \cos x$ — периодическая функция с периодом 2π и её график построен на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной, равной периоду, распространим его по всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т. д. вправо, на -2π, -4π и т. д. влево, т. е. вообще на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 88).

Итак, график функции $y = \cos x$ построен геометрически на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0; \pi]$.

Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0; \pi]$. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, так как она убывает на отрезке $[0; \pi]$ и является чётной.

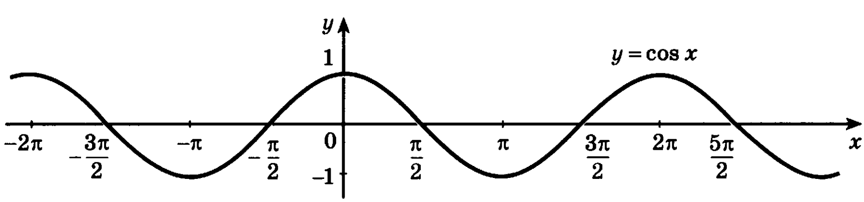


Рис. 88

Основные свойства функции $y = \cos x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Периодическая с периодом 2π.

4) Чётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6) Возрастающая на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7) Убывающая на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 89). Эти графики пересе-

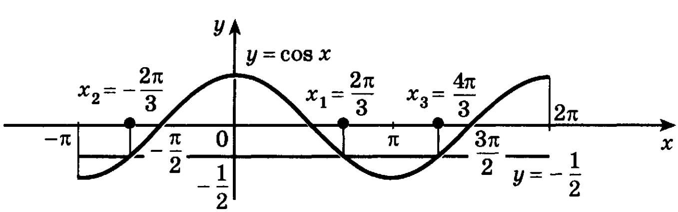


Рис. 89

каются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$.

На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Из рисунка видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относительно оси Oy, т. е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 + 2\pi = = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Из рисунка 89 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения **(708—713)**.

708 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:

1) значение, равное 0, 1, –1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;

4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

713 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$;

3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

714 Выразив синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$; 3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$;

4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$; 5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

715 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

716 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3\cos x$.

718 Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

719 Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = 3 - 2\cos(x - 1)$.

§ 41 Свойства функции $y = \sin x$ и её график

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой, является нечётной и периодической с периодом 2π. Её график можно построить таким же способом, как и график функции $y = \cos x$, начиная с построения, например, на отрезке $[0; \pi]$. Однако проще воспользоваться формулой

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Эта формула показывает, что график функции $y = \sin x$ можно получить сдвигом графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 90).

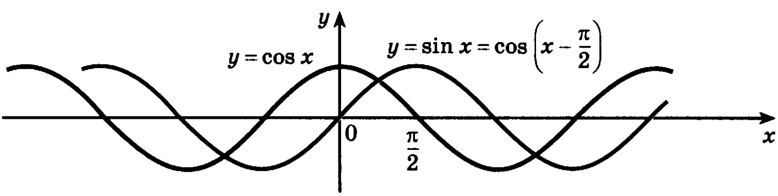


Рис. 90

График функции $y = \sin x$ изображен на рисунке 91. Кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, называется *синусоидой*.

Так как график функции $y = \sin x$ получается сдвигом графика функции $y = \cos x$, то свойства функции $y = \sin x$ можно получить из свойств функции $y = \cos x$.

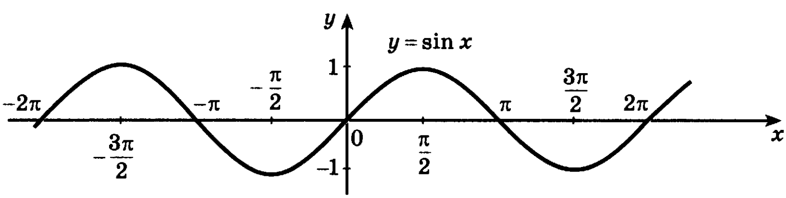


Рис. 91

Основные свойства функции $y = \sin x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Периодическая, $T = 2\pi$.

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервале $(0; \pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$;

— отрицательные значения на интервале $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6) Возрастающая на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7) Убывающая на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 92). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых являются кор-

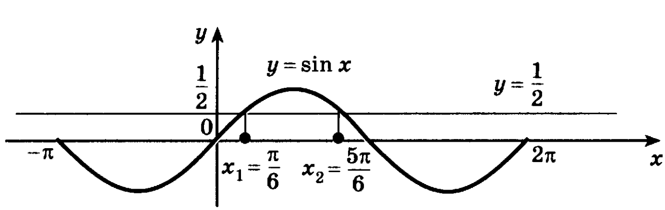


Рис. 92

ними уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Второй корень $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

▶ Из рисунка 92 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$. ◁

Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения (720—725).

720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, –1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:
1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:
1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

723 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:
1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;
3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

724 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

725 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

726 Выразив косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{9\pi}{8}$ и $\cos \frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin \frac{\pi}{5}$ и $\cos \frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{3\pi}{10}$.

727 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

728 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

729 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;

3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

730 Найти множество значений функции $y = \sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6};\ \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$.

731 Построить график функции:

1) $y = \sin |x|$; 2) $y = |\sin x|$.

732 Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой

$$I = A \sin (\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график этой функции, если:

1) $A = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$, $\omega = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

§ 42 Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и её график

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$, является нечётной и периодической с периодом π. Поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения.

Прежде чем строить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает.

● * Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Покажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$. ○

Зная, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, найдём несколько точек, принадлежащих графику, и построим его на этом промежутке (рис. 93).

Исходя из свойства нечётности функции $y = \operatorname{tg} x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат,

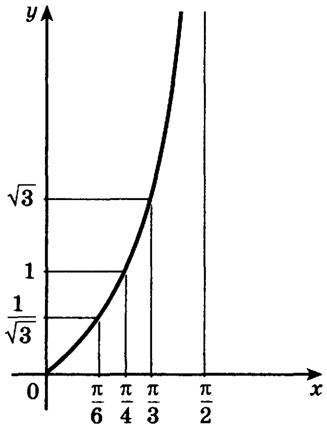


Рис. 93

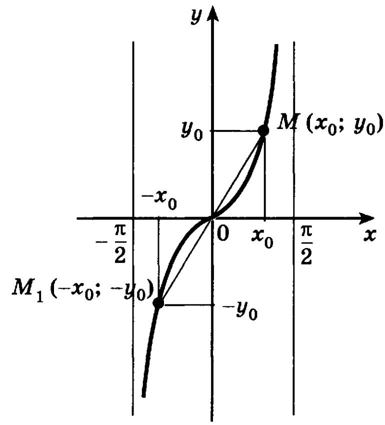


Рис. 94

получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94).

Напомним, что при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и поэтому график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Аналогично при отрицательных значениях x, больших $-\frac{\pi}{2}$ и приближающихся к $-\frac{\pi}{2}$, график функции $y = \operatorname{tg} x$ приближается к вертикальной прямой $x = -\frac{\pi}{2}$, т. е. прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Перейдём к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из её графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 94) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 95).

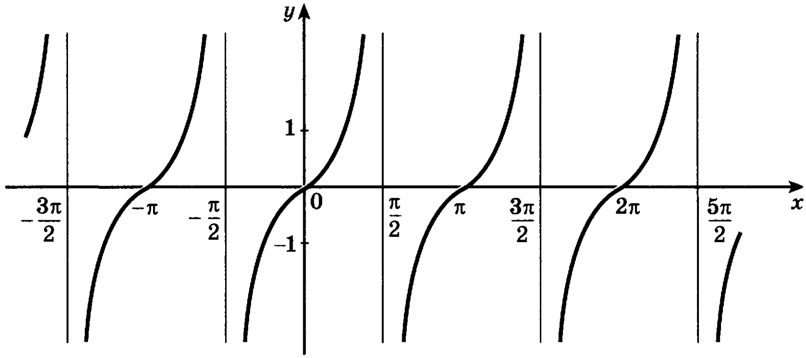


Рис. 95

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечётной.

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом π.

4) Нечётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— положительные значения на интервалах $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1 Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 96, *а*). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$.

Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◁

Задача 2 Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

▶ Из рисунка 96, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$.

Ответ $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$;

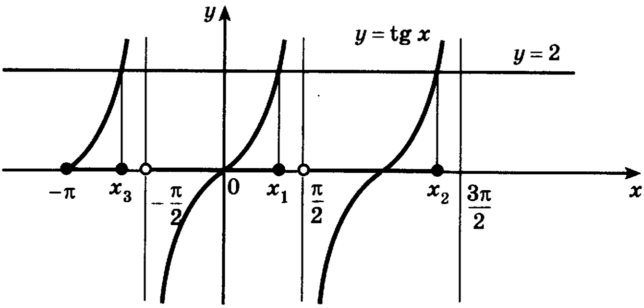
$\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

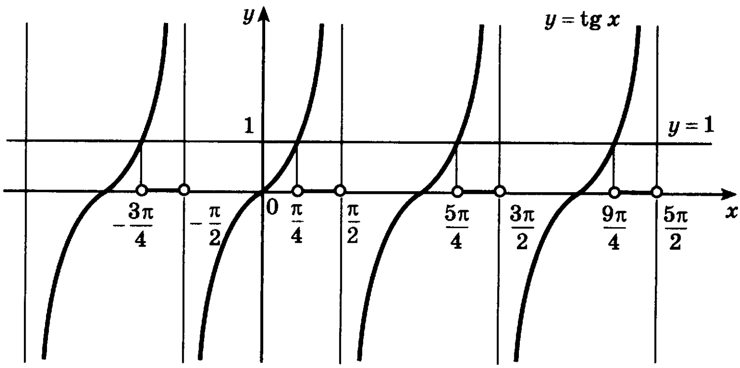
▶ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 96, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функцией, которая задаётся формулой $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такие процессы называют *гармоническими колебаниями*, а описывающие их функции — гармониками (от греч. harmonikos — соразмерный). График функции $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ получается из синусоиды $y = \sin x$ сжатием или растяжением её вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox.



а)



б)

Рис. ***96***

Обычно гармоническое колебание является функцией времени: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

733 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $[-\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает:
1) значение, равное 0; 2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

734 (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:
1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

735 С помощью свойства возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ сравнить числа:
1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 5) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

736 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

737 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $(-\pi,\ 2\pi)$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x < -1$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

738 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

739 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

740 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

741 Найти все решения неравенства, принадлежащие отрезку $[0;\ 3\pi]$:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

742 Найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

743 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

744 Построить график функции и выяснить её свойства:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

745 Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0;\ \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции (**746—748**).

746 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

747 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$.

748 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$.

749 Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

Обратные тригонометрические функции

§ 43*

1. Функция $y = \arcsin x$.

По определению арксинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arcsin x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ задана функция

$$y = \arcsin x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Покажем, что функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

● Рассмотрим уравнение $\sin x = y$, где y — заданное число из отрезка $[-1; 1]$, а x — неизвестное. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ это уравнение по определению арксинуса числа имеет единственный корень $x = \arcsin y$.

В этой формуле меняем местами x и y, получаем $y = \arcsin x$. ○

Таким образом, свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ относительно прямой $y = x$ (рис. 97, 98).

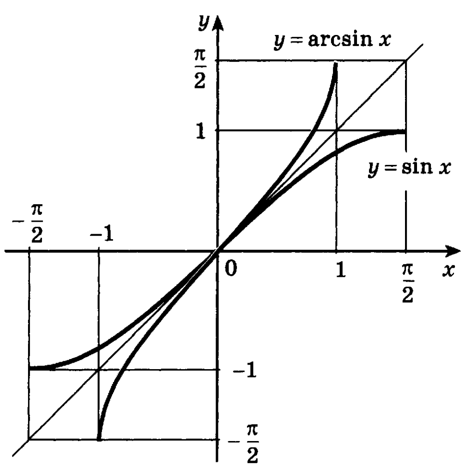


Рис. 97

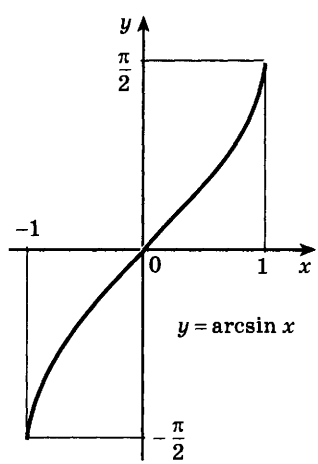


Рис. 98

Основные свойства функции $y = \arcsin x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Возрастающая.
4) Нечётная, так как

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

2. Функция $y = \arccos x$.

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ определена функция $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, относительно прямой $y = x$ (рис. 99, 100).

Основные свойства функции $y = \arccos x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $[0; \pi]$.
3) Убывающая.

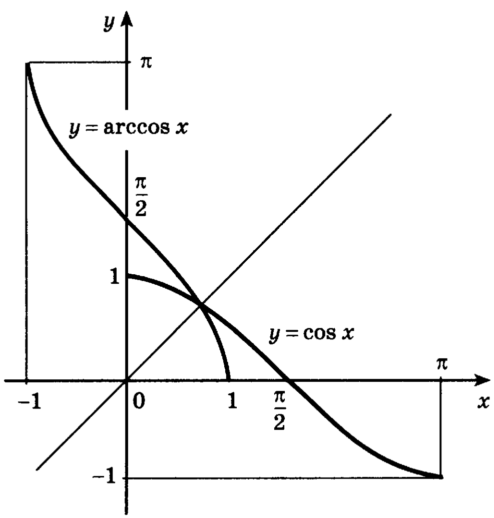


Рис. 99

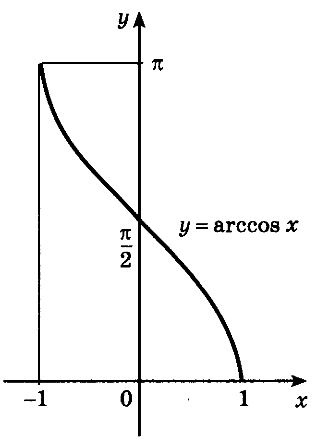


Рис. 100

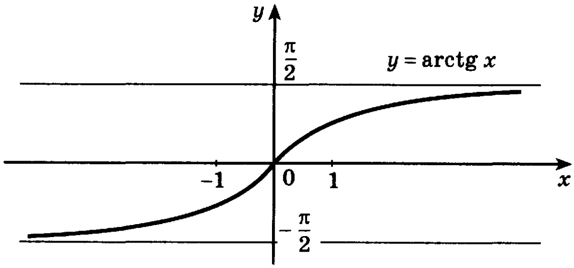


Рис. 101

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (рис. 94), симметрией относительно прямой $y = x$ (рис. 101).

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) Множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3) Возрастающая.
4) Нечётная, так как

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*.

Задача 1 Сравнить числа:

1) $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\arcsin \frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

▶ 1) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ и функция $y = \arcsin x$ возрастает, то $\arcsin \frac{1}{3} > \arcsin \frac{1}{4}$.

2) Так как $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ и функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает, то $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\arccos(2x+1)=\frac{3\pi}{4}$.

▶ Так как $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $2x+1=\cos\frac{3\pi}{4}$, откуда $2x+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. ◁

Задача 3 Найти область определения функции

$$y=\arcsin\frac{x-1}{3}.$$

▶ Так как функция $y=\arcsin x$ определена при $-1\leqslant x\leqslant 1$, то функция $y=\arcsin\frac{x-1}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняются неравенства $-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1$. Отсюда

$$-3\leqslant x-1\leqslant 3,\quad -2\leqslant x\leqslant 4.\ ◁$$

Упражнения

Сравнить числа (750—752).

750 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

751 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

752 1) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решить уравнение (753—755).

753 1) $\arcsin(2-3x)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin\frac{x-2}{4}=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{x+3}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

754 1) $\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(3x+1)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos\frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$; 4) $\arccos\frac{2x-1}{3}=\pi$.

755 1) $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{3}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg}(2x+1)=-\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$.

756 Найти область определения функции:

1) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$; 2) $y = \arccos (2 - 3x)$;

3) $y = \arccos (2\sqrt{x} - 3)$; 4) $y = \arcsin \frac{2x^2 - 5}{3}$.

757 Доказать, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Упражнения к главе VII

758 Найти область определения функции:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = \sqrt{\cos x}$;

5) $y = \frac{2x}{2 \sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x - \sin x}$.

759 Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2 \sin^2 x$; 2) $y = 2 \cos^2 x - 1$;

3) $y = 3 - 2 \sin^2 x$; 4) $y = 2 \cos^2 x + 5$;

5) $y = \cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4$;

6) $y = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3$.

760 Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = x^2 + \cos x$; 2) $y = x^3 - \sin x$;

3) $y = (1 - x^2) \cos x$; 4) $y = (1 + \sin x) \sin x$.

761 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = \cos 7x$; 2) $y = \sin \frac{x}{7}$.

762 Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$:

1) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;

3) $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\cos x + 1 = 0$.

763 Найти все решения неравенства, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$:

1) $1 + 2 \cos x \geqslant 0$; 2) $1 - 2 \sin x < 0$;

3) $2 + \operatorname{tg} x > 0$; 4) $1 - 2 \operatorname{tg} x \leqslant 0$.

764 Используя графики, найти число корней уравнения:

1) $\cos x = x^2$; 2) $\sin x = \frac{x}{2}$.

Проверь себя!

1 Найти область определения функции $y = \operatorname{tg} 4x$. Является ли эта функция чётной?

2 Построить графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; 2\pi]$. Для каждой из этих функций найти значения x из данного отрезка, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = 0$, $y(x) > 0$, $y(x) < 0$.

3 Построить схематически график функции $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти значения x, при которых $\operatorname{tg} x = 0$, $\operatorname{tg} x < 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ на данном отрезке.

765 Найти область определения функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

766 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 1 - 2|\sin 3x|$; 4) $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

767 Выяснить, является ли функция чётной или нечётной:

1) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sin x |\cos x|$.

768 Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin(2x + 1)$; 2) $y = 3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x + 1)$.

769 Решить графически уравнение:

1) $\cos x = |x|$; 2) $\sin x = -|x + 1|$.

770 Найти нули функции:

1) $y = \cos^2 x - \cos x$; 2) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

771 Найти все значения x, при которых функция $y = 1{,}5 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ принимает положительные значения.

772 Найти все значения x, при которых функция $y = \operatorname{tg} 2x - 1$ принимает отрицательные значения.

773 Построить график функции:

1) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; 2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

774 Найти множество значений функции:

1) $y = 12\sin x - 5\cos x$; 2) $y = \cos^2 x - \sin x$.

775 Решить неравенство:

1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\operatorname{tg} x > \sin x$.

VIII

глава

Производная и её геометрический смысл

У каждого человека есть определённый кругозор. Когда этот кругозор сужается до бесконечности малого, то он обращается в точку. Тогда человек и говорит, что это есть его точка зрения.

Д. Гильберт

§ 44 Производная

Задача 1 На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он двигается равнозамедленно с ускорением 1,6 м/с^2?

► Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле $s = \frac{at^2}{2}$, где a — ускорение, t — время торможения. В данном случае $s = 80$, $a = 1{,}6$, поэтому $80 = 0{,}8t^2$, откуда $t = 10$ с. По формуле $v = at$ находим мгновенную скорость $v = 1{,}6 \cdot 10 = 16$, т. е. $v = 16$ м/с. ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач.

Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения.

При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени.

Рассмотрим, *как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения.*

Пусть материальная точка M движется вдоль оси Os, где O — положение материальной точки в момент времени $t = 0$. Если в момент времени t координата материальной точки равна s, где $s = s(t)$, то функцию $s(t)$ называют законом движения точки M.

При неравномерном движении материальная точка за равные по длительности промежутки времени может совершать перемещения, разные не только по величине, но и по направлению. Средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от t до $t + h$ определяется формулой $v_{\text{ср}} = \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то $v_{\text{ср}}$ при фиксированном t будет меняться при изменении h, и чем меньше h, тем лучше $v_{\text{ср}}$ будет характеризовать движение точки в момент t. *Скоростью точки в момент t (мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h \to 0$, т. е. скорость v в момент t определяется равенством $v = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$.

Таким образом, скорость движения в момент t — предел отношения приращения координаты $\Delta s = s(t + h) - s(t)$ за промежуток времени от t до $t + h$ к приращению времени h, когда $h \to 0$, если этот предел существует. Например, если материальная точка движется по закону $s = \dfrac{gt^2}{2}$ (закон свободного падения), то

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{g}{2h}\left((t+h)^2 - t^2\right),$$

или

$$v_{\text{ср}} = gt + \frac{g}{2}h,$$

откуда $\lim\limits_{h \to 0} v_{\text{ср}} = gt$, т. е. $v = gt$.

Отношение $\dfrac{s(t+h) - s(t)}{h}$ называют *разностным отношением*, а его предел при $h \to 0$ называют *производной функции* $s(t)$ и обозначают $s'(t)$ (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще, пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x — точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x и обозначается $f'(x)$ (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Отметим, что в формуле (1) число h, где $h \neq 0$, может быть как положительным, так и отрицательным, при этом число $x + h$ должно принадлежать промежутку, на котором определена функция $f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то эта функция называется *дифференцируемой в этой точке.* Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что эта функция *дифференцируема на этом промежутке.* Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Задача 2 Найти производную функции $f(x) = x^2$.

▶ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$, поэтому

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◁

Задача 3 Найти производную функции $f(x) = x^3$.

▶ Найдём сначала разность $f(x + h) - f(x) =$
$= (x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 =$
$= h(3x^2 + 3xh + h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$. Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2, \text{ т. е. } (x^3)' = 3x^2. \ ◁$$

Задача 4 Найти производную функции $f(x) = C$, где C — заданное число.

▶ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{C-C}{h} = 0$. Так как разностное отношение равно нулю при любом $h \neq 0$, т. е. его значение не меняется при $h \to 0$, то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е. $(C)' = 0$. ◁

Задача 5 Найти производную линейной функции $f(x) = kx + b$.

▶ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h} = \dfrac{kh}{h} = k$.

Так как разностное отношение равно k при любом $h \neq 0$, то и предел этого отношения при $h \to 0$ также равен k. Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◁

Применяя формулу

$$(kx+b)' = k,$$

например, получаем

$$(3x + 7)' = 3,\ \ (-2x + 1)' = -2,\ \ (5x)' = 5,\ \ (x)' = 1.$$

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. По этой причине в школьном курсе математики некоторые формулы производных строго не доказываются или вообще принимаются без доказательства.

При нахождении производных простейших функций мы пользуемся наглядными представлениями. Например, мы считаем наглядно понятным, что если $h \to 0$, то $5h \to 0$, $h^2 \to 0$, $5 - 3h \to 5$ и т. п. Тем не менее приведём здесь строгое определение предела функции в точке и поясним его.

О п р е д е л е н и е. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Поясним это определение предела функции. Число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если значения $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0, становятся как угодно близкими к числу A, т. е. значения $|f(x) - A|$ становятся как угодно малыми.

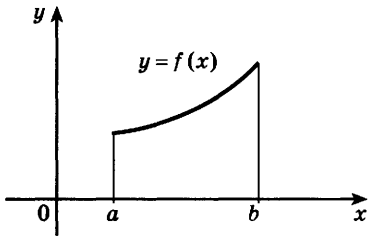


Рис. 102

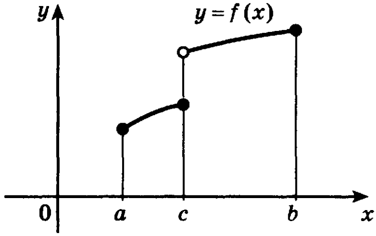


Рис. 103

Это означает, что можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε.

Например, если $f(x) = (x-2)^2 + 3$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

Действительно, $|f(x) - 3| = |x-2|^2$. Пусть задано $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$, т. е. неравенство $|x-2|^2 < \varepsilon$, равносильно неравенству $|x-2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x-2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 3| < \varepsilon$. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta = 0{,}1$, а если $\varepsilon = 0{,}0001$, то $\delta = 0{,}01$.

Производная функции является одним из особых пределов, имеющих большое практическое значение.

Понятие предела функции тесно связано с понятием непрерывности.

Если график функции на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаша от листа бумаги, то эту функцию называют *непрерывной на этом промежутке* (рис. 102).

Приведём примеры функций, которые не являются непрерывными. На рисунке 103 изображён график функции, которая непрерывна на промежутках $[a; c]$ и $(c; b]$, но разрывна в точке $x = c$ и потому не является непрерывной на всём отрезке $[a; b]$.

Все элементарные (линейная, квадратичная, тригонометрические и др.) функции, которые изучаются в школьном курсе математики, являются непрерывными на каждом промежутке, на котором они определены.

✻ Сформулируем теперь строгое определение *непрерывности функции.*

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого интервала, то её называют *непрерывной на этом интервале.* Например, функция $f(x)$, график которой изображён на рисунке 103, непрерывна на интервале $(a; c)$, но не является непрерывной на интервале $(a; b)$. Отметим, что если функция имеет производную на некотором интервале, то она непрерывна на этом интервале.

Обратное утверждение неверно. Функция, непрерывная на промежутке, может не иметь производную в некоторых точках этого промежутка. Например, функция $y = |x|$ непрерывна при всех значениях x, но не имеет производной в точке $x = 0$. Действительно,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ -1, \text{ если } x < 0, \end{cases}$$

и поэтому разностное отношение $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

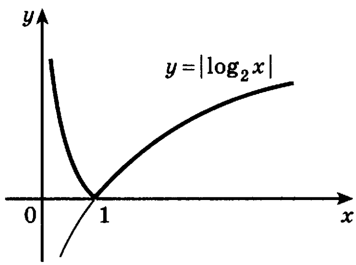


Рис. 104

Ещё пример: функция $y = |\log_2 x|$ непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$, но не имеет производной в точке $x = 1$ (рис. 104). ✻

Задача 6* Выяснить, в каких точках непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{при } x \neq 3, \\ 5 & \text{при } x = 3. \end{cases}$$

▶ Если $x \neq 3$, то $f(x) = x + 3$, поэтому данная функция непрерывна во всех точках $x \neq 3$, так как

$$\lim_{x \to x_0} (x + 3) = x_0 + 3, \text{ если } x_0 \neq 3.$$

Если $x_0 = 3$, то $x_0 + 3 = 6$, а по условию $f(3) = 5$, т. е. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$, и поэтому данная функция не является непрерывной в точке $x = 3$. ◁

Упражнения

776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.

777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке $[1; 1{,}2]$, если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.

778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.

779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.

780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.

781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.

782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

784 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 105). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$.

785 Закон движения точки задан графиком зависимости пути s от времени t (рис. 106). Найти среднюю скорость движения точки на отрезках $[0; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 3{,}5]$.

786 Используя определение предела функции в точке, выяснить, является ли верным равенство:
1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

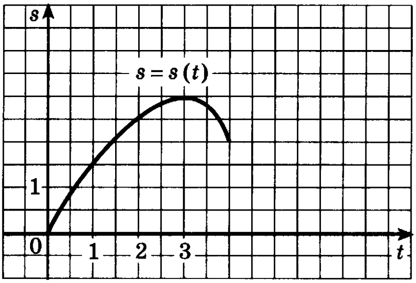


Рис. 105

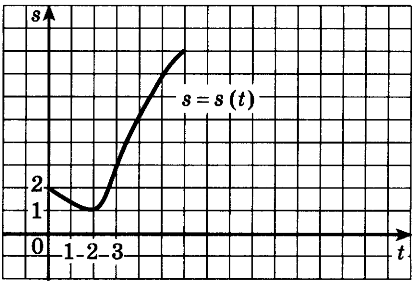


Рис. 106

§ 45 Производная степенной функции

Задача 1 Доказать, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

▶ Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Тогда

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

Если $h \to 0$, то $x + h \to x$, и поэтому знаменатель дроби стремится к x^2. Следовательно, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

При этом предполагалось, что если $x > 0$, то и $x + h > 0$, а если $x < 0$, то и $x + h < 0$. Таким образом, формула $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x \neq 0$. ◁

Задача 2 Доказать, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

▶ Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $x + h > 0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Получим

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Если $h \to 0$, то $\sqrt{x+h}$ стремится к $\sqrt{x}$, поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таким образом, формула $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x > 0$. ◁

Итак, в этом и предыдущем параграфах получены следующие формулы для производных:

$$C' = 0,\ (x)' = 1,\ (x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0),\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0).$$

Четыре последние формулы являются формулами производной степенной функции $f(x) = x^p$ для $p = 2,\ 3,\ -1,\ \frac{1}{2}$. Их можно записать так:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x,\quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2,$$

$$(x^{-1})' = (-1)\, x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2},\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \qquad (1)$$

Эта формула применима при тех значениях x, при которых её правая часть имеет смысл.

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$, $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}}$, $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}$.

Задача 3 Вычислить $f'(9)$, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}$, $f'(9) = -\frac{1}{2} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}$. ◁

Пользуясь формулами $(x^p)' = px^{p-1}$ и $(kx + b)' = k$, можно найти производные степенной и линейной функций, например $(x^7)' = 7x^6$, $(3x - 1)' = 3$. В более сложных случаях, например при нахождении производной функции $(3x - 1)^7$, можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk\, (kx + b)^{p-1}. \qquad (2)$$

По формуле (2) при $k = 3$, $b = -1$, $p = 7$ имеем

$$((3x - 1)^7)' = 21\, (3x - 1)^6.$$

Задача 4 Вычислить $f'(-3)$, если $f(x)=\sqrt{4-7x}$.

► Запишем данную функцию так: $f(x)=(-7x+4)^{\frac{1}{2}}$.

По формуле (2) находим $f'(x)=-\frac{7}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}$.

При $x=-3$ получаем $f'(-3)=-\frac{7}{2}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}=-0{,}7$. ◁

Задача 5* Доказать, что $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на промежутке:

1) $x>0$; 2) $x<0$.

► 1) Если $x>0$, то $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Если $x<0$, то $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{(-x)}=-(-x)^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (2) получаем

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=(-1)\cdot\frac{1}{3}(-1)(-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \ ◁$$

Упражнения

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

793 Найти $f'(x_0)$, если:

1) $f(x)=x^6$, $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=x^{-2}$, $x_0=3$;

3) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$;

5) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $x_0=1$; 6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0=1$.

794 Построить график функции $y = x^4$ и график функции, являющейся её производной.

795 На рисунке 107 изображён график функции, являющейся производной одной из функций $y = x^2$, $y = x^3$ или $y = x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

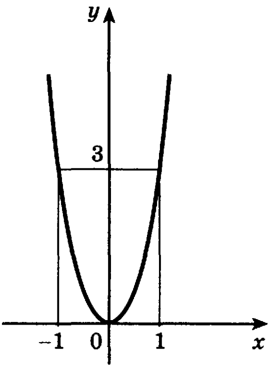


Рис. 107

796 Найти производную функции:

1) $\dfrac{1}{(2+3x)^2}$;   2) $\dfrac{1}{(3-2x)^3}$;

3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$;   4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$;   6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

1) $f(x) = x^3$;   2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t+1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

1) $f(x) = (2x-1)^2$;   2) $f(x) = (3x+2)^3$?

800 По данному на рисунке 108 графику квадратичной функции написать формулы, задающие саму функцию и её производную.

801 Найти значения x, при которых значения функции $y = \sqrt{3x-7}$ равны значениям функции, являющейся её производной.

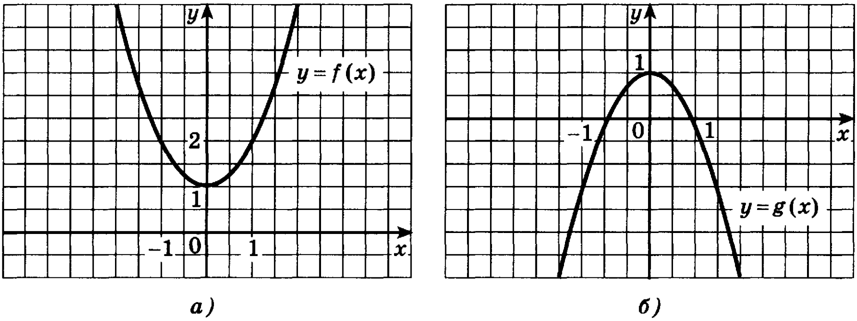


Рис. 108

§ 46 Правила дифференцирования

При вычислении производной используются следующие правила дифференцирования суммы, произведения и частного:

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

Подробно это свойство производной формулируется так: если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную, то их сумма также имеет производную и справедлива формула (1).

● Обозначим $f(x)+g(x)=F(x)$. Тогда $F(x+h)-F(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$. Поэтому разностное отношение равно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

При $h\to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$; вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому левая часть имеет предел, равный $F'(x)=f'(x)+g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1). ○

Аналогично доказывается, что производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций, производная разности равна разности производных.

Задача 1 Найти производную функции:

1) $f(x)=x^3-x^2+x-3$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

▶ 1) $f'(x)=(x^3)'-(x^2)'+(x)'-(3)'=3x^2-2x+1$;

2) $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. ◁

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))'=cf'(x). \qquad (2)$$

● Обозначим $cf(x) = F(x)$, тогда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

откуда при $h \to 0$ получаем $F'(x) = cf'(x)$. ○

Задача 2 Вычислить $f'(-2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 + 7x - 17$.

▶ $f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^5\right)' - (3x^3)' + (7x)' - (17)' = \frac{1}{4}(x^5)' -$

$- 3(x^3)' + 7(x)' = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 + 7,$

$f'(-2) = \frac{5}{4}(-2)^4 - 9(-2)^2 + 7 = -9.$ ◁

Приведем без доказательства формулы производной произведения и частного.

3. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (3)$$

Задача 3 Найти производную функции $f(x)g(x)$, если $f(x) = 3x^2 - 5$, $g(x) = 2x + 7$.

▶ По формуле (3) находим

$$(f(x)g(x))' =$$
$$= (3x^2 - 5)'(2x + 7) + (3x^2 - 5)(2x + 7)' =$$
$$= 6x(2x + 7) + (3x^2 - 5) \cdot 2 = 18x^2 + 42x - 10. \ ◁$$

Задача 4 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = (x - 1)^9(x + 2)^6$ равно нулю.

▶ По формуле (3) получаем $f'(x) = 9(x - 1)^8(x + 2)^6 + 6(x - 1)^9(x + 2)^5 = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(3x + 6 + 2x - 2) = 3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4)$.

Решая уравнение $3(x - 1)^8(x + 2)^5(5x + 4) = 0$, находим, что $f'(x) = 0$ при

$$x_1 = 1, \ x_2 = -2, \ x_3 = -0{,}8. \ ◁$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы при условии, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную в точке x, причём в равенстве (4) $g(x) \neq 0$.

Задача 5 Найти производную функции $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

▶ Обозначим $x^3 = f(x)$, $x^2 + 1 = g(x)$. По формуле (4) находим $F'(x) = \dfrac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$. ◁

Задача 6 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$: 1) положительно; 2) отрицательно.

▶ По формуле (4) получаем $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

1) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} > 0$, находим, что $f'(x) > 0$ при $x < 0$.

2) Решая неравенство $\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} < 0$, находим, что $f'(x) < 0$ при $x > 0$. ◁

5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2+1)$. Эту функцию можно рассматривать как *сложную функцию* $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, *сложная функция — это функция от функции* $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y)\,g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x). \qquad (5)$$

Рассмотрим примеры.

1) Пусть $F(x) = (2x+1)^2 + 5(2x+1)$.
Здесь $f(y) = y^2 + 5y$, $y = g(x) = 2x + 1$.
По формуле (5) находим $F'(x) = (2y+5) \cdot (2x+1)' =$
$= (2y+5) \cdot 2 = (2(2x+1)+5) \cdot 2 = 8x + 14$.

2) Пусть $F(x) = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Здесь $f(y) = y^{\frac{3}{2}}$, $y = g(x) =$
$= x^2 + 1$. По формуле (5) находим

$$F'(x) = \frac{3}{2}\,y^{\frac{1}{2}}(x^2+1)' = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+1}.$$

Упражнения

Найти производную функции (802—803).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$;
4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$;
7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3\,(x - 2)^2 + 1$ и график функции, являющейся её производной.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:
1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

808 Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x, если:

1) $y = \frac{2}{x-1}$, $x = 1$; 2) $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x = 3$;

3) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$; 4) $y = \sqrt{5-x}$, $x = 4$?

809 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:
1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:
1) $f(x) = (x - 1)^8 (2 - x)^7$; 2) $f(x) = (2x - 1)^5 (1 + x)^4$;
3) $f(x) = \sqrt{2-x}\,(3-2x)^8$; 4) $f(x) = (5x-4)^6 \sqrt{3x-2}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x - 3)^5 (2 + 5x)^6$ равно 0?

814 Найти производную функции:

1) $\dfrac{x^5 + x^3 + x}{x+1}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x-1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 - 7x}$.

816 Найти функцию $f(g(x))$, если:

1) $g(x) = 1 - x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$; 2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$.

817 Представить в виде сложной функции:

1) $F(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$; 2) $F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Найти производную функции (**818—821**).

818 1) $\dfrac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\dfrac{x\sqrt[3]{x} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}}$.

819 1) $\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

820 1) $(2x - 3)^5 (3x^2 + 2x + 1)$; 2) $(x - 1)^4 (x + 1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x+1} \cdot (2x-3)^3$.

821 1) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x+1}$; 2) $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x+1}$; 3) $\dfrac{2-x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2-x}$.

822 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0?

823 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ равно 3?

824 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равно 11?

825 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:

1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$;

3) $f(x) = (x+2)^2 \sqrt{x}$; 4) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

826 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:

1) $y = (5 - 3x)^4 (3x - 1)^3$;
2) $y = (2x - 3)^2 (3 - 2x)^3$;
3) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$;
4) $y = \dfrac{3x^3}{1 - 3x}$.

827 Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t = 20$ с.

828 Тело, масса которого $m = 5$ кг, движется прямолинейно по закону $s = 1 - t + t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\dfrac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

829 В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m = 2l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность:

1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см;
2) в конце стержня.

830 Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 47 Производные некоторых элементарных функций

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

1. Производная показательной функции. Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad (1)$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: её производная также равна e^x, т. е.

$$(e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \qquad (3)$$

Например, $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$, $(e^{-2x-4})' = -2e^{-2x-4}$.

Задача 1 Найти производную функции a^x, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$. ◁

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Например, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0{,}7^x)' = 0{,}7^x \ln 0{,}7$.

2*. Производная логарифмической функции. Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (5)$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \qquad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln (kx+b))' = \frac{k}{kx+b}. \qquad (7)$$

Например, $(\ln(4x-3))' = \dfrac{4}{4x-3}$, $(\ln(1-2x))' = \dfrac{-2}{1-2x} = \dfrac{2}{2x-1}$.

Задача 2 Найти производную функции $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (5) и (6), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \ \triangleleft$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (8)$$

3. Производные тригонометрических функций. Покажем, как можно вывести формулу производной синуса. Обозначим $f(x) = \sin x$, составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{2 \sin\frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right). \qquad (9)$$

Если $h \to 0$, то $x + \frac{h}{2} \to x$ и $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x$.

Воспользуемся тем, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Это утверждение называют *первым замечательным пределом* и обычно доказывают в курсе высшей математики. Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1,$$

и поэтому правая часть (9) имеет предел, равный $\cos x$. Следовательно, левая часть (9) также имеет предел, который по определению равен $f'(x)$.

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично можно убедиться в том, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Итак, справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \qquad (10)$$

Справедливы также формулы

$$(\sin(kx + b))' = k \cos(kx + b),$$
$$(\cos(kx + b))' = -k \sin(kx + b).$$

Например, $\left(\sin\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\right)' = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$,

$(\cos(3 - 4x))' = -(-4)\sin(3 - 4x) = 4\sin(3 - 4x)$.