Задача 3 Найти производную функции $\operatorname{tg} x$.

▶ Используя правило дифференцирования частного и формулы (10), находим $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. ◁

4. Применение правил дифференцирования и формул производных к решению задач.

Приведём сводную таблицу.

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (cf(x))' = cf'(x),$ $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x),$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)},$ $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$
$((x)^p)' = px^{p-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x},$ $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},$ $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$

Задача 4 Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin(2x+1) - 3\cos(1-x)$;

2) $f(x) = e^{-3x}\sin(5x-1)$; 3) $f(x) = \dfrac{\ln 3x}{x+1}$.

▶ 1) $f'(x) = 2\cos(2x+1) - 3\sin(1-x)$;

2) $f'(x) = -3e^{-3x}\sin(5x-1) + 5e^{-3x}\cos(5x-1)$;

3) $f'(x) = \dfrac{\frac{3}{3x}(x+1) - 1 \cdot \ln 3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x\ln 3x}{x(x+1)^2}$. ◁

Задача 5* Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x) = x^2 - 2\ln x$ равно нулю; положительно; отрицательно.

▶ Найдём производную $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$.

Заметим, что равенство $(x^2 - 2\ln x)' = 2x - \dfrac{2}{x}$ справедливо при тех значениях x, при которых обе части имеют смысл, т. е. при $x > 0$.

Выражение $\frac{2(x^2-1)}{x}$ равно нулю при $x_{1,2}=\pm1$, положительно на промежутках $-1<x<0$ и $x>1$; отрицательно на промежутках $x<-1$ и $0<x<1$. Так как $x>0$, то $f'(x)=0$ только при $x=1$; $f'(x)>0$ при $x>1$; $f'(x)<0$ при $0<x<1$. $\triangleleft$

Упражнения

Найти производную функции (**831—839**).

831 1) e^x+1; 2) e^x+x^2; 3) $e^{2x}+\frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x}+\sqrt{x}$.

832 1) $e^{2x+1}+2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1}-\sqrt{x-1}$; 3) $e^{0,3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $e^{1-x}+x^{-3}$; 5) e^{x^2}; 6) e^{2x^3}.

833 1) 2^x+e^x; 2) 3^x-x^{-2}; 3) $e^{2x}-x$; 4) $e^{3x}+2x^2$; 5) 3^{x^2+2}.

834 1) $0{,}5^x+e^{3x}$; 2) 3^x-e^{2x}; 3) $e^{2-x}+\sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x}+\frac{1}{x^4}$.

835 1) $2\ln x+3^x$; 2) $3\ln x-2^x$; 3) $\log_2 x+\frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3}-\log_3 x$; 5) $\ln(x^2-2x)$; 6) $(3x^2-2)\log_3 x$.

836 1) $\sin x+x^2$; 2) $\cos x-1$; 3) $\cos x+e^x$; 4) $\sin x-2^x$.

837 1) $\sin(2x-1)$; 2) $\cos(x+2)$; 3) $\sin(3-x)$; 4) $\cos(x^3)$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x$; 3) $3\cos 4x-\frac{1}{2x}$.

839 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x\cdot\cos 3x$; 4) $\log_3 x\cdot\sin 2x$.

840 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x,\ \ x_0=2$;

2) $f(x)=e^{3x-2}-\ln(3x-1),\ \ x_0=\frac{2}{3}$;

3) $f(x)=2^x-\log_2 x,\ \ x_0=1$;

4) $f(x)=\log_{0,5} x-3^x,\ \ x_0=1$.

841 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=x-\cos x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$;

3) $f(x)=2\ln(x+3)-x$; 4) $f(x)=\ln(x+1)-2x$;

5) $f(x)=x^2+2x-12\ln x$; 6) $f(x)=x^2-6x-8\ln x$.

842 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно:

1) $f(x) = e^x - x$;   2) $f(x) = x \ln 2 - 2^x$;

3) $f(x) = e^x x^2$;   4) $f(x) = e^x \sqrt{x}$.

Найти производную функции (**843—851**).

843 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}} + \ln\frac{2x+3}{5}$;   2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln\frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos\frac{1-x}{2}$;   4) $3e^{\frac{2-x}{3}} - 2\sin\frac{1+x}{4}$.

844 1) $\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}} - 3\cos\frac{x-2}{3}$;   2) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}} - 5e^{\frac{x-4}{5}}$.

845 1) $0{,}5^x \cdot \cos 2x$;   2) $5\sqrt{x}\cdot e^{-x}$;   3) $e^{3-2x} \cdot \cos(3-2x)$.

846 1) $\ln\sqrt{x-1}$;   2) $e^{\sqrt{3+x}}$;   3) $\ln(\cos x)$;   4) $\ln(\sin x)$.

847 1) $2^{\cos x + 1}$;   2) $0{,}5^{1+\sin x}$;   3) $\cos\sqrt[3]{x+2}$;   4) $\sin(\ln x)$.

848 1) $\sqrt{x^2+2x-1}$;   2) $\sqrt[3]{\sin x}$;   3) $\sqrt[4]{\cos x}$;   4) $\sqrt{\log_2 x}$.

849 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$;   2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$;   3) $\frac{e^{0{,}5x}}{\cos 2x - 5}$;   4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x + 7}$.

850 1) $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$;   2) $\frac{2^x - \log_2 x}{\ln 2 \cdot x}$.

851 1) $\frac{\sin x - \cos x}{x}$;   2) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x}$.

852 Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x) = 1 - 5\cos 2x + 2(\sin x - \cos x) - 2x$.

853 Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно 0:

1) $f(x) = e^{2x}\ln(2x-1)$;   2) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$.

854 Вычислить $f'(x) + f(x) + 2$, если $f(x) = x\sin 2x$, $x = \pi$.

855 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = x - \ln x$;   2) $f(x) = x\ln x$;

3) $f(x) = x^2\ln x$;   4) $f(x) = x^3 - 3\ln x$.

856 Найти производную функции $\ln(x^2 - 5x + 6)$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 48

Геометрический смысл производной

Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая (рис. 109). Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют *угловым коэффициентом* прямой, а угол α — *углом между этой прямой и осью Ox*.

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 109, *а*); в этом случае функция возрастает.
Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (рис. 109, *б*); в этом случае функция $y = kx + b$ убывает.

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y = f(x)$.
Пусть точки A и M принадлежат графику функции $y = f(x)$ (рис. 110).
Пусть x и $x + h$ — абсциссы точек A и M (рис. 111), тогда их ординаты равны $f(x)$ и $f(x + h)$. Из треугольника ACM (рис. 111), где $C(x + h; f(x))$, найдём угловой коэффициент k прямой AM, который зависит от h (его можно рассматривать как функцию от h и писать $k(h)$). Имеем

$$k(h) = \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

где $MC = f(x + h) - f(x)$, $AC = h$, т. е.

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \qquad (1)$$

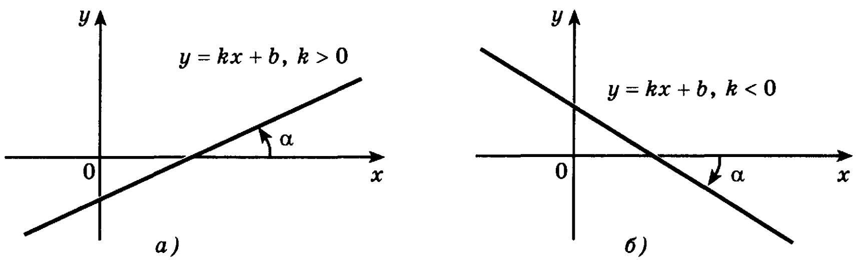


Рис. 109

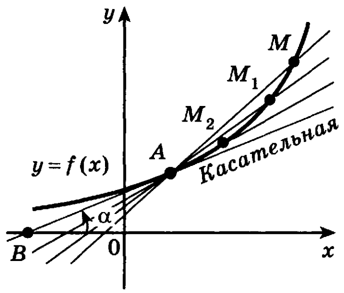


Рис. 110

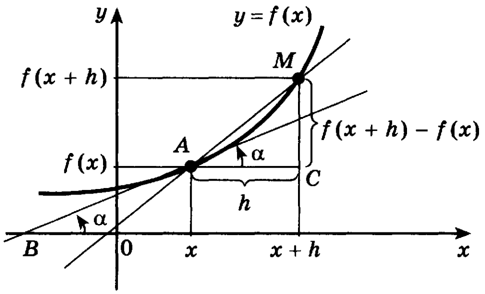


Рис. 111

Пусть число x фиксировано, а $h \to 0$, тогда точка A неподвижна, а точка M, двигаясь по графику, стремится к точке A (рис. 111). При этом прямая AM стремится занять положение некоторой прямой, которую называют *касательной к графику функции* $y = f(x)$, потому что $\lim\limits_{h \to 0} k(h)$ существует и равен $f'(x)$. Итак,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x; f(x))$.

Задача 1 Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке (0; 0) и осью Ox.

▶ Найдем угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке (0; 0), т. е. значение производной этой функции при $x = 0$. Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ (рис. 112).} \triangleleft$$

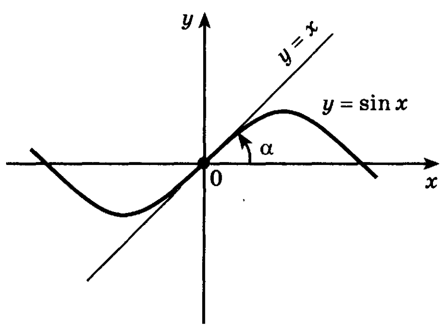


Рис. 112

Отметим, что это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке (0; 0) синусоида касается прямой $y = x$ (рис. 112).

Задача 2 Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке (1; 1) и осью Ox и написать уравнение этой касательной.

▶ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 113).

Найдём теперь уравнение касательной AB к параболе $y = x^2$ в точке $A(1; 1)$ (см. рис. 113). Если $y = kx + b$ — уравнение прямой AB, то $k = \operatorname{tg} \alpha = 2$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = 2x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки (1; 1), получаем $1 = 2 \cdot 1 + b$, откуда $b = -1$. Следовательно, $y = 2x - 1$ — уравнение искомой касательной. ◁

Аналогично тому, как это сделано в задаче 2, выведем *уравнение касательной к графику дифференцируемой функции в точке* $(x_0; f(x_0))$ (рис. 114).

● Если $y = kx + b$ — искомое уравнение, то по формуле (2) находим $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = f'(x_0)\,x + b$. Подставляя в это уравнение координаты точки $(x_0; f(x_0))$, получаем $f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$.

Итак, уравнение касательной $y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad ○ \qquad (3)$$

Задача 3 Найти уравнение касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

▶ Найдём значения функции $f(x) = \cos x$ и её производной в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(x_0) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

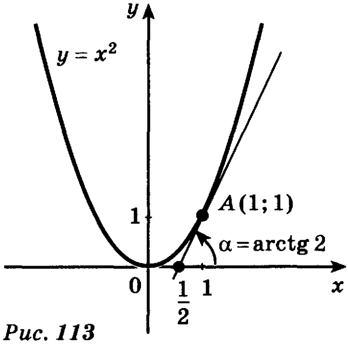


Рис. 113

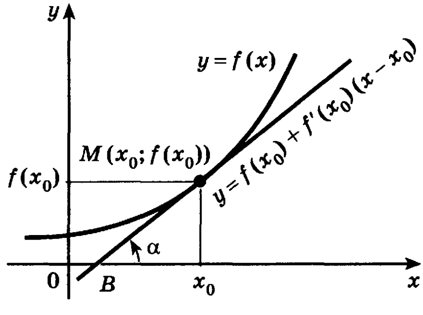


Рис. 114

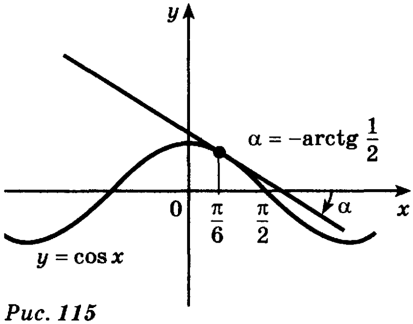


Рис. 115

Используя формулу (3), найдём искомое уравнение касательной: $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$,

или $y = -\frac{1}{2}x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$. ◁

Касательная к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 115.

Задача 4* Показать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0 пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

▶ Пусть $f(x) = x^2$, тогда

$$f'(x) = 2x, \quad f(x_0) = x_0^2 \quad \text{и} \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

По формуле (3) находим уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \quad y = 2x_0x - x_0^2.$$

Найдём точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Из равенства $2x_0x - x_0^2 = 0$ находим $x = \frac{x_0}{2}$. ◁

Отсюда следует простой геометрический *способ построения касательной к параболе* $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 116).

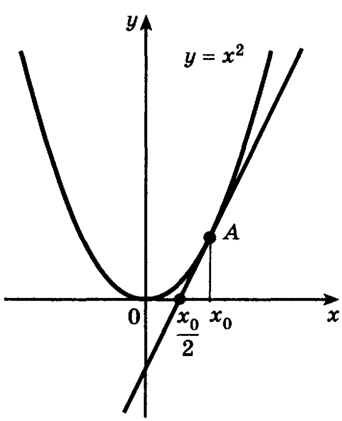


Рис. 116

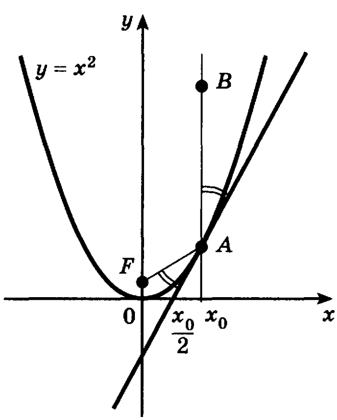


Рис. 117

Построив касательную к параболе, можно построить её *фокус* F. Напомним, что фокусом является точка, в которую нужно поместить источник света, чтобы все лучи, отражённые от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. Для построения фокуса F нужно построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB (рис. 117).

Упражнения

857 Найти значения k и b, если прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(x_0; y_0)$ и образует с осью Ox угол α:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = -3$, $y_0 = 2$;

3) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; 4) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$.

858 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 3$.

859 Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью Ox:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x_0 = 3$; 4) $f(x) = \frac{18}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 3$;

5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}}$, $x_0 = 0$; 6) $f(x) = \ln(2x + 1)$, $x_0 = 2$.

860 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x - 3x^2$, $x_0 = 2$;

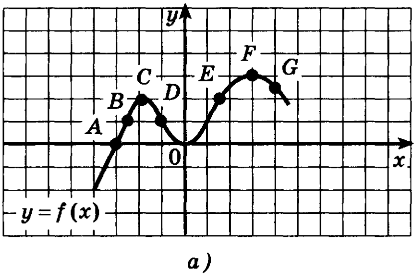
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 8) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

861 Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 118, *а*, *б*). Из точек A, B, C, D, E, F, G выбрать те, в которых производная этой функции принимает:

а) положительные значения; б) отрицательные значения;
в) значения, равные 0.



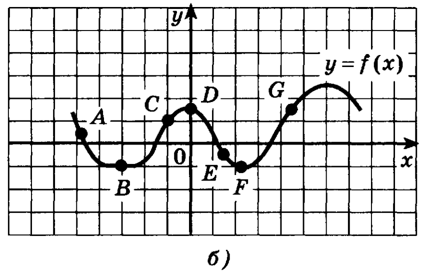


Рис. 118

862 Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$; 2) $f(x) = \sin 2x - \ln(x + 1)$.

863 Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = 0$:

1) $f(x) = x + e^{-x}$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = \sqrt{x+1} + e^{\frac{x}{2}}$.

864 Под каким углом пересекаются графики функций (*углом между кривыми* в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$; 2) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ и $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

3) $y = \ln(1+x)$ и $y = \ln(1-x)$; 4) $y = e^x$ и $y = e^{-x}$?

865 Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке общую касательную. Написать уравнение этой касательной:

1) $y = x^4$ и $y = x^6 + 2x^2$;
2) $y = x^4$ и $y = x^3 - 3x^2$;
3) $y = (x + 2)^2$ и $y = 2 - x^2$;
4) $y = x(2 + x)$ и $y = x(2 - x)$.

866 Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = kx$:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $k = \frac{3}{2}$; 2) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $k = \frac{3}{4}$;

3) $f(x) = \sin 2x$, $k = 2$; 4) $f(x) = x + \sin x$, $k = 0$.

867 В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

868 Найти точки, в которых касательные к кривым

$$f(x) = x^3 - x - 1 \text{ и } g(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

параллельны. Написать уравнения этих касательных.

Упражнения к главе VIII

Найти производную функции **(869—874)**.

869 1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4$; 2) $-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$;

3) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x + 3)^8$;

6) $(4 - 3x)^7$; 7) $\sqrt[3]{3x-2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

870 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \ln x$; 3) $\sin x - \sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

871 1) $\sin 5x + \cos(2x - 3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;

3) $\sin(x - 3) - \ln(1 - 2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.

872 1) $x^2\cos x$; 2) $x^3\ln x$; 3) $5xe^x$;

4) $x\sin 2x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x\cos x$.

873 1) $\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.

874 1) $\sin^3 x$; 2) $8^{\cos x}$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\ln(x^3)$.

875 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2x^3 - x^2$; 2) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$;

3) $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$; 4) $f(x) = (x + 3)^3(x - 4)^2$;

5) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

876 Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = \cos x\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = e^x\ln x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$, $x_0 = 0$.

877 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 3$; 2) $y = x^3 + 3x$, $x_0 = 3$;

3) $y = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

878 Закон движения тела задан формулой $s(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройден телом за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

Проверь себя!

1 Найти значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 4x - 1$ в точке $x = 3$.

2 Найти производную функции:

1) $\frac{3}{x} + 2\sqrt{x} - e^x$; 2) $(3x-5)^4$; 3) $3\sin 2x \cos x$; 4) $\frac{x^3}{x^2+5}$.

3 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \cos 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

4 Найти угол между касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ и осью Ox.

Найти производную функции **(879—881)**.

879 1) $y = \cos^2 3x$; 2) $y = \sin x \cos x + x$;

3) $y = (x^3+1)\cos 2x$; 4) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$;

5) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x-1}\,(x^4-1)$.

880 1) $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x+4}}{4x}$;

3) $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; 4) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

881 1) $\log_2(x^3 - x^2 + 1)$; 2) $(\log_2 x)^3$; 3) $\sin(\log_3 x)$; 4) $\cos 3^x$.

882 На каком из рисунков 119 (*а—г*) изображены эскизы графиков функций, являющихся производными следующих функций: $y = e^{-x}$, $y = \ln(-x)$, $y = \sin 2x$, $y = 2\cos x$?

883 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно:

1) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 2) $f(x) = 3^{2x} - 2x\ln 3$;

3) $f(x) = x + \ln 2x$; 4) $f(x) = x + \ln(2x+1)$;

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$; 6) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$.

884 Найти все значения a, при которых $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

885 Найти все значения a, при которых $f'(x) \leqslant 0$ для всех действительных значений x, если $f(x) = ax^3 - 6x^2 - x$.

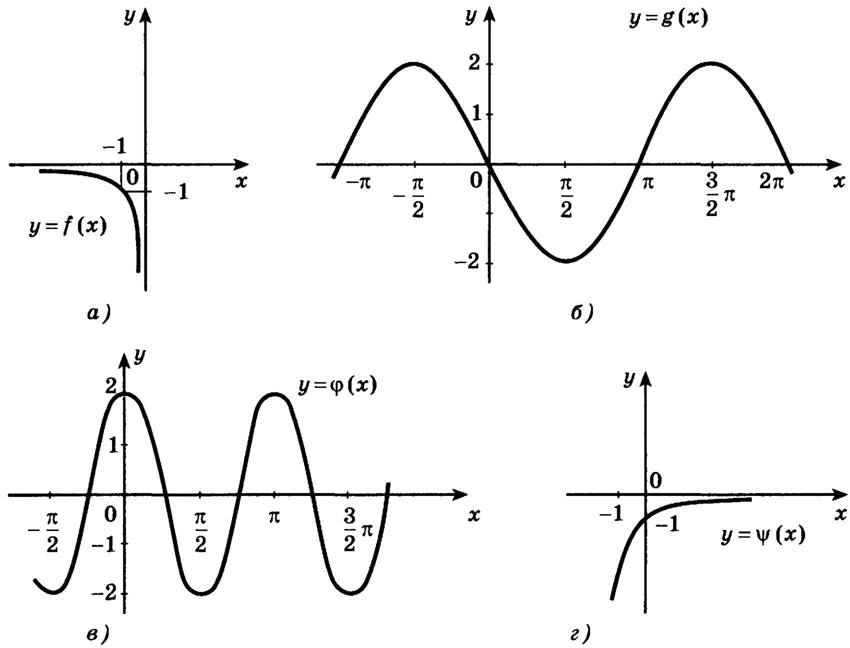


Рис. 119

886 Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:

1) $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = ax + \frac{1}{x}$;

3) $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 6x$; 4) $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax$.

887 Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x) < 0$ не имеет действительных решений, если:

1) $f(x) = ax^7 + x^3 - 1$; 2) $f(x) = x^5 + ax^3 + 3$;

3) $f(x) = (x + a)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

888 Под каким углом пересекаются графики функций:

1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6 - x}$; 2) $y = \sqrt{2x + 1}$ и $y = 1$?

889 Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0:

1) $y = 2\sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$; 2) $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \frac{x + 2}{3 - x}$, $x_0 = 2$; 4) $y = x + \ln x$, $x_0 = e$.

890 Найти уравнения касательных к графику функции $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y=6x$.

891 Прямая касается гиперболы $y=\frac{4}{x}$ в точке (1; 4). Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

892 Прямая касается гиперболы $y=\frac{k}{x}$, где $k>0$, в точке с абсциссой x_0.

1) Доказать, что площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания. Найти эту площадь.

2) Доказать, что эта касательная проходит через точки $\left(x_0; \frac{2k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$.

893 Выяснить, при каких значениях p касательная, проведённая к графику функции $y=x^3-px$ в его точке с абсциссой $x_0=1$, проходит через точку M (2; 3).

894 Найти все такие точки графика функции $y=\frac{4^x-2^{x+1}}{\ln 4}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y=2x+5$.

895 Найти расстояние от начала координат до той касательной к графику функции $y=x\ln x$, которая параллельна оси абсцисс.

896 Выяснить, при каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$.

897 Найти общие касательные к графикам функций

$$f(x)=x^2-4x+3 \text{ и } g(x)=-x^2+6x-10.$$

898 Две параллельные касательные к графику функции $y=x^3-6$ пересекают оси координат: одна — в точках A и B, другая — в точках C и D. Найти площадь треугольника AOB, если она в 4 раза меньше площади треугольника COD.

IX
глава

Применение производной к исследованию функций

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна или пагубна. Для теории нужны знания, для практики, сверх всего того, и умение.

А. Н. Крылов

§ 49 Возрастание и убывание функции

1. Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.*

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т. е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная образует острый угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т. е. функция $f(x)$ возрастает (рис. 120).

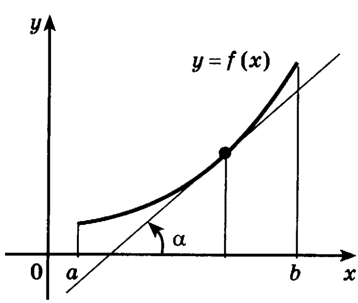


Рис. 120

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.

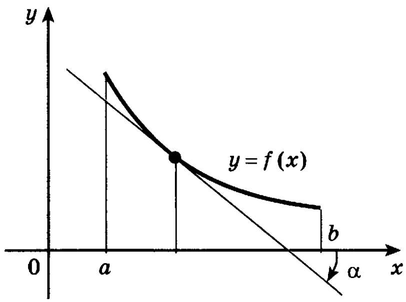


Рис. 121

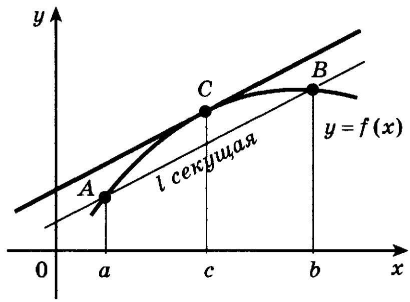


Рис. 122

Это означает, что касательная образует тупой угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом промежутке.
Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ *убывает* на этом промежутке.

2. При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется теорема 1, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

Доказательство формулы (1) приводится в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл этой формулы.

Проведём через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ прямую l и назовём эту прямую секущей. Угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Запишем формулу (1) в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (2)$$

Согласно формуле (2) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c (рис. 122) равен угловому коэффициенту секущей l, т. е. на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей. Сформулируем и докажем с помощью теоремы Лагранжа *теорему о достаточном условии возрастания функции*.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

● Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $(a; b)$, такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ где } c \in (x_1; x_2).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из последней формулы получим $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$. ○

Таким же способом можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция возрастает на отрезке $[a; b]$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, если $f'(x) < 0$ на $(a; b)$; если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она убывает на отрезке $[a; b]$.

Задача 1 Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$.

▶ Найдём производную: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Если $x > 1$, то $\frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$, т. е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $(1; +\infty)$. ◁

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют *промежутками монотонности этой функции*.

Задача 2 Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

▶ Найдём производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$.

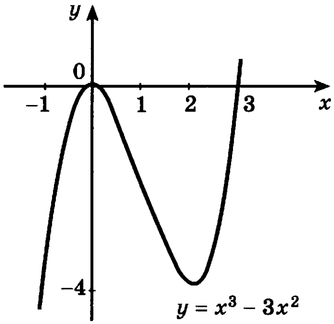


Рис. 123

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т. е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $(0; 2)$. ◁

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображён на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$; убывает не только на интервале $(0; 2)$, но и на отрезке $[0; 2]$.

Упражнения

899 Доказать, что функция $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ возрастает на промежутке $(1; +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$.

900 Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = 5x^2 - 3x - 1$;

3) $y = x^2 + 2x$; 4) $y = x^2 + 12x - 100$;

5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = x^4 - 2x^2$;

7) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$; 8) $y = x^3 - 6x^2 + 9$.

901 Построить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) > 0$ при $0 < x < 5$, $f(1) = 0$, $f(5) = 3$;

2) $a = -1$, $b = 3$, $f'(x) < 0$ при $-1 < x < 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = -4$.

Найти промежутки возрастания и убывания функции **(902—905)**.

902 1) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = 1 + \frac{2}{x}$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 1 + 3\sqrt{x-5}$.

903 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;

3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

904 1) $y = e^{x^2+3x}$; 2) $y = 3^{x^2-x}$.

905 1) $y = x - \sin 2x$; 2) $y = 3x + 2\cos 3x$.

906 Изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 6$, $f(-2) = 1$, $f(6) = 5$, $f(3) = 0$, $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 3$, $f'(x) > 0$ при $3 < x < 6$;

2) $a = -3$, $b = 3$, $f(-3) = -1$, $f(3) = 4$, $f'(2) = 0$, $f'(x) < 0$ при $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ при $2 < x < 3$.

907 При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:

1) $y = x^3 - ax$; 2) $y = ax - \sin x$?

908 При каких значениях a функция $y = x^3 - 2x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

909 При каких значениях a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?

§ 50 Экстремумы функции

На рисунке 123 изображён график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим *окрестность точки* $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1; 1)$ наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку $x = 2$ называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше её значения в любой точке некоторой окрестности точки $x = 2$, например окрестности $(1,5; 2,5)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

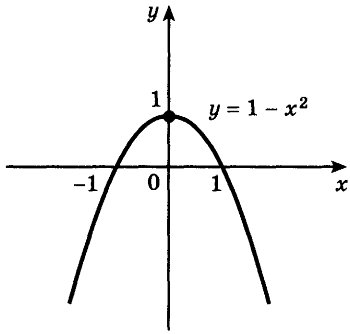


Рис. 124

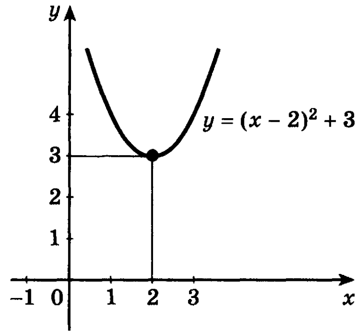


Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значениях $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3$ и $f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума.*

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Если x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют *теоремой Ферма*[1]. Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому её угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 126).

[1] Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик, один из основоположников теории чисел и математического анализа.

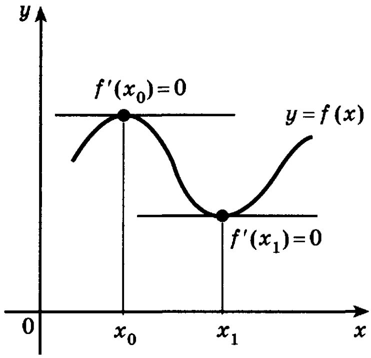


Рис. 126

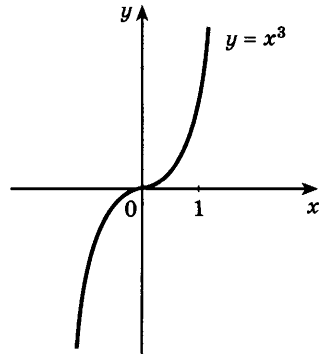


Рис. 127

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 124) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, её производная $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. Функция $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 125), $f'(x) = 2(x - 2)$, $f'(2) = 0$.

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 127).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют *стационарными*.

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, $x = 0$ — точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует (см. § 44). Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют *критическими точками этой функции.*

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, *необходимо*, чтобы эта точка была критической точкой данной функции.

Приведём *достаточные условия* того, что стационарная точка является точкой экстремума, т. е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

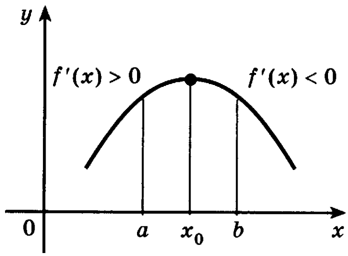


Рис. 128

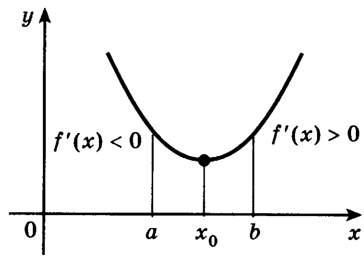


Рис. 129

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$. Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129).

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться формулой Лагранжа на отрезках $[x; x_0]$, где $a < x < x_0$, и $[x_0; x]$, где $x_0 < x < b$.

Задача 1 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

▶ Найдём производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Найдём стационарные точки:

$$4x^2(x - 3) = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = 3.$$

Методом интервалов устанавливаем, что производная $f'(x) = 4x^2(x - 3)$ положительна при $x > 3$, отрицательна при $x < 0$ и при $0 < x < 3$.

Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «−» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ — точка минимума. ◁

Задача 2 Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках.

▶ Производная равна

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приравнивая производную к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «–». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «–» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума. Значение функции в точке максимума равно $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. ◁

Упражнения

910 На рисунке 130 изображён график функции $y = f(x)$. Найти точки максимума и минимума этой функции.

911 На рисунке 131 изображён график функции $y = f(x)$. Найти критические точки этой функции.

912 Найти стационарные точки функции:

1) $y = \frac{x}{2} + \frac{8}{x}$; 2) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x$;

3) $y = e^{2x} - 2e^x$; 4) $y = \sin x - \cos x$.

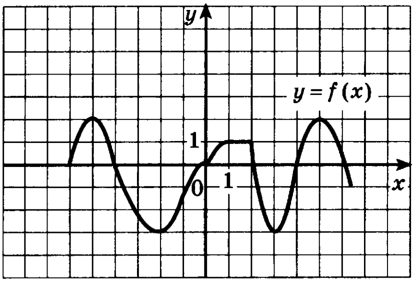


Рис. 130

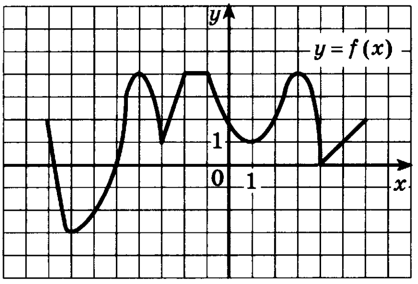


Рис. 131

913 Найти стационарные точки функции:

1) $y=\frac{2+x^2}{x}$; 2) $y=\frac{x^2+3}{2x}$; 3) $y=e^{x^2-1}$; 4) $y=2^{x^2+x}$.

914 Найти точки экстремума функции:

1) $y=2x^2-20x+1$; 2) $y=3x^2+36x-1$;

3) $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$; 4) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$.

915 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=x^4-8x^2+3$;

3) $y=x+\sin x$; 4) $y=2\cos x+x$.

916 Имеет ли точки экстремума функция:

1) $y=2x+5$; 2) $y=7-5x$; 3) $y=x^3+2x$; 4) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$?

917 Построить эскиз графика непрерывной функции $y=f(x)$, определённой на отрезке $[a;\ b]$, если:

1) $a=-1$, $b=7$, $f(-1)=0$, $f(7)=-2$, $f'(x)>0$ при $-1<x<4$, $f'(x)<0$ при $4<x<7$, $f'(4)=0$;

2) $a=-5$, $b=4$, $f(-5)=1$, $f(4)=-3$, $f'(x)<0$ при $-5<x<-1$, $f'(x)>0$ при $-1<x<4$, $f'(-1)=0$.

918 Найти критические точки функции:

1) $y=\sqrt{2-3x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^3-3x}$;

3) $y=|x-1|$; 4) $y=x^2-|x|-2$.

919 Найти точки экстремума функции:

1) $y=x+\sqrt{3-x}$; 2) $y=(x-1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y=x-\sin 2x$; 4) $y=\cos 3x-3x$.

920 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; 2) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$; 3) $y=(x-1)\,e^{3x}$;

4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$; 5) $y=e^{\sqrt{3-x^2}}$; 6) $y=\sqrt{e^x-x}$.

921 Построить эскиз графика функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, если:

1) $a=-6$, $b=6$, $f(-6)=-6$, $f(6)=1$, $f'(x)>0$ при $-6<x<-4$, $-1<x<4$, $f'(x)<0$ при $-4<x<-1$, $4<x<6$, $f'(-4)=0$, $f'(-1)=0$, $f'(4)=0$;

2) $a=-4$, $b=5$, $f(-4)=5$, $f(5)=1$, $f'(x)<0$ при $-4<x<-3$, $0<x<3$, $f'(x)>0$ при $-3<x<0$, $3<x<5$, $f'(-3)=0$, $f'(0)=0$, $f'(3)=0$.

922 Исследовать на экстремум функцию $y=(x+1)^n\,e^{-x}$, где n — натуральное число.

§ 51 Применение производной к построению графиков функций

Задача 1 Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

▶ Эта функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума. Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдём стационарные точки: $3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 1$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1)$.

Производная положительна на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ функция убывает.

Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

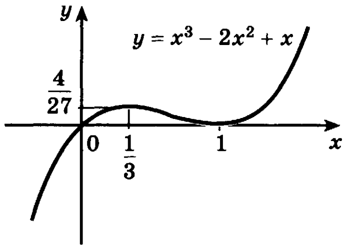


Рис. 132

Символ «↗» означает, что функция возрастает, а символ «↘» означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс:

$x^3 - 2x^2 + x = 0$, $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, $x(x - 1)^2 = 0$, откуда $x = 0$, $x = 1$. Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 2x^2 + x$ (рис. 132). ◁

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью её производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.

При исследовании свойств функции полезно найти:
1) область её определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, ещё несколько точек графика.

Задача 2 Построить график функции $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$.

▶ 1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x) = -5x - 5x^4 = -5x(1 + x^3)$.

3) Решая уравнение $-x(1 + x^3) = 0$, находим стационарные точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$.

4) Производная положительна на интервале $(-1; 0)$, следовательно, на этом интервале функция возра-

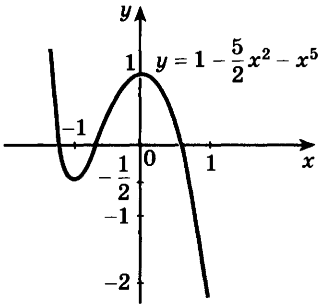


Рис. 133

стает. На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

5) Стационарная точка $x_1 = -1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+»; $f(-1) = -0{,}5$. Точка $x_2 = 0$ — точка максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с «+» на «–»; $f(0) = 1$.

Составим таблицу.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	−0,5	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ (рис. 133). ◁

График функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ построен с помощью исследования некоторых свойств этой функции. По графику можно выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 133 видно, что уравнение $1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 = 0$ имеет три различных действительных корня.

Для построения графика чётной (нечётной) функции достаточно исследовать свойства и построить её график при $x > 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Задача 3 Построить график функции $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

▶ 1) Область определения: $x \neq 0$.

2) Данная функция нечётная, так как $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$. Поэтому сначала исследуем эту функцию и построим её график при $x > 0$.

3) $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

4) На промежутке $(0; +\infty)$ функция имеет одну стационарную точку $x = 2$.

5) Производная положительна на промежутке $(2; +\infty)$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $(0; 2)$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

6) Точка $x = 2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «–» на «+»; $f(2) = 4$.

Составим таблицу.

x	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

Найдём значения функции ещё в двух точках: $f(1) = 5$, $f(4) = 5$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x + \frac{4}{x}$ при $x > 0$. График этой функции при $x < 0$ строим с помощью симметрии относительно начала координат (рис. 134). ◁

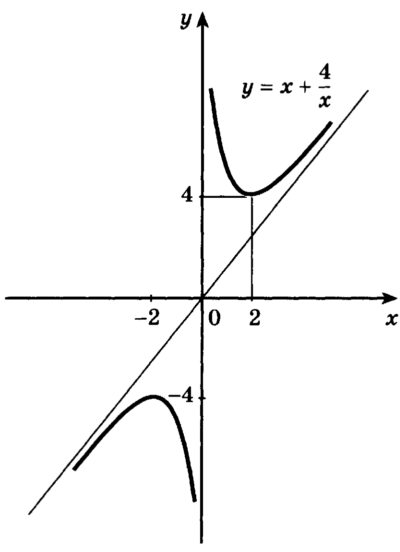


Рис. 134

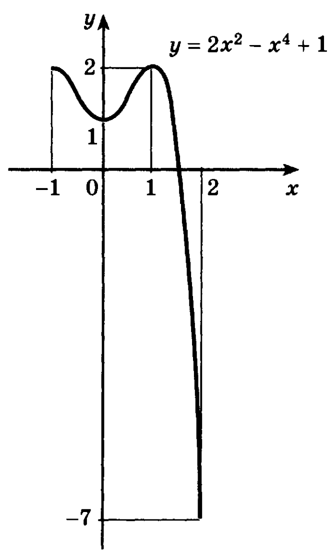


Рис. 135

Для краткости записи решения задач на построение графиков функций бо́льшую часть рассуждений, предшествующих таблице, можно проводить устно.

В некоторых задачах требуется исследовать функцию не на всей области определения, а только на некотором промежутке.

Задача 4 Построить график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$.

▶ Найдём производную

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 + x)(1 - x).$$

Составим таблицу.

x	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2
$f'(x)$	0	—	0	+	0	—	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Используя эту таблицу, строим график функции $y = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$ (рис. 135). ◁

Упражнения

923 Используя график функции $y = f(x)$ (рис. 136), найти:

1) область определения и множество значений функции;
2) нули функции;
3) промежутки возрастания и убывания функции;
4) значения x, при которых функция принимает положительные, отрицательные значения;
5) экстремумы функции.

924 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, если:

1) $a = -2$, $b = 4$, $f(-2) = -2$, $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[-2; 1]$ и $f(x) = x$ при $1 \leqslant x \leqslant 4$;
2) $a = 1$, $b = 7$, $f(7) = 1$, $f(x) = x^2$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$, $y = f(x)$ убывает на промежутке $(2; 7]$.

925 На отрезке $[0; 6]$ изобразить эскиз графика непрерывной функции $y = f(x)$, пользуясь данными, приведёнными в таблице. Учесть, что $f(2) = 0$, $f(5) = 0$.

x	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 4$	4	$4 < x < 6$	6
$f'(x)$		+	0	—	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	3

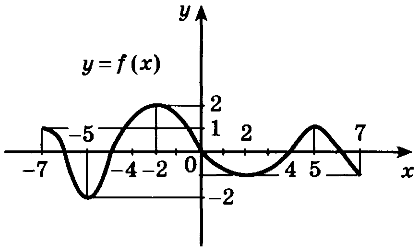


Рис. 136

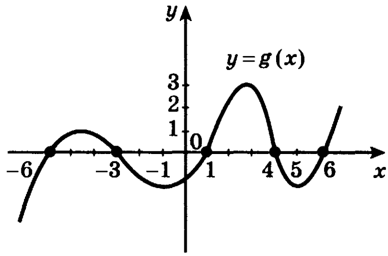


Рис. 137

Построить график функции **(926—927)**.

926 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = 2 + 3x - x^3$;
3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

927 1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$; 2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;
3) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$; 4) $y = 6x^4 - 4x^6$.

928 Построить график функции:
1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 3]$;
2) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ на отрезке $[-3; 3]$.

929 На рисунке 137 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Используя график, найти точки экстремума функции $y = f(x)$.

Построить график функции **(930—933)**.

930 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3$;
3) $y = 4x^5 - 5x^4$; 4) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$.

931 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$; 2) $y = \frac{4}{x} - x$; 3) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

932 1) $y = xe^{-x}$; 2) $y = xe^{x}$; 3) $y = e^{x^2}$; 4) $y = e^{-x^2}$.

933 1) $y = \frac{x^2}{x-2}$; 2) $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$; 3) $y = \frac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$.

934 Найти число действительных корней уравнения:
1) $x^4 - 4x^3 + 20 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 - 7 = 0$.

935 Построить график функции $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$. Сколько действительных корней имеет уравнение $\frac{x^3 - 4}{(x-1)^3} = C$ при различных значениях C?

§ 52 Наибольшее и наименьшее значения функции

1. На практике часто приходится решать задачи, в которых требуется найти *наибольшее* или *наименьшее значение* из всех тех значений, которые функция принимает *на отрезке.*

Рассмотрим, например, график функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$ на отрезке $[-1; 2]$. Этот график был построен в предыдущем параграфе (см. рис. 135).

Из рисунка видно, что наибольшее значение на этом отрезке, равное 2, функция принимает в двух точках $x = -1$ и $x = 1$; наименьшее значение, равное -7, функция принимает при $x = 2$. Точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = 1 + 2x^2 - x^4$. Это означает, что есть такая окрестность точки $x = 0$, например интервал $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, что наименьшее значение в этой окрестности функция принимает при $x = 0$. Однако на большем промежутке, например на отрезке $[-1; 2]$, наименьшее значение функция принимает не в точке минимума, а на конце отрезка. Таким образом, для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;
2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;
3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задача 1 Функция $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1=1$, $f(1)=4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ Наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, наименьшее равно 4. ◁

Задача 2 Функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ непрерывна на отрезке [2; 4]. Найти её наибольшее и наименьшее значения.

▶ 1) $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

На интервале (2; 4) стационарных точек нет.

3) Из чисел 2,5 и 4,25 наибольшее 4,25, наименьшее 2,5.

Ответ Наибольшее значение функции равно 4,25, наименьшее равно 2,5. ◁

2. При решении многих задач часто приходится находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на *интервале*.

Нередко встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале только одну стационар-

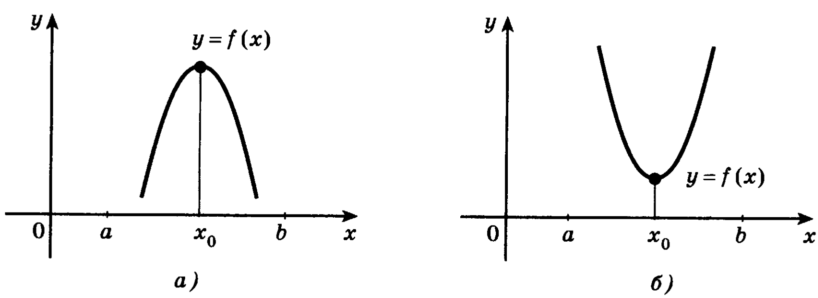


Рис. 138

ную точку: либо точку максимума, либо точку минимума. В этих случаях в точке максимума функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на данном интервале (рис. 138, *а*); а в точке минимума — наименьшее значение на данном интервале (рис. 138, *б*).

Задача 3 Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

▶ Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x + \frac{36}{x}$.

По условию задачи x — положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

Найдём производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1 = 6$ и $x_2 = -6$. На интервале $(0; +\infty)$ есть только одна стационарная точка $x = 6$. При переходе через точку $x = 6$ производная меняет знак с «–» на «+», и поэтому $x = 6$ — точка минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = x + \frac{36}{x}$ принимает в точке $x = 6$ (это значение $f(6) = 12$).

Ответ $36 = 6 \cdot 6$. ◁

3*. При решении некоторых задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции полезно использовать следующее утверждение:

Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n — натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задача 4* Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

▶ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т. е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 139). Обозначим $AB = x$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора

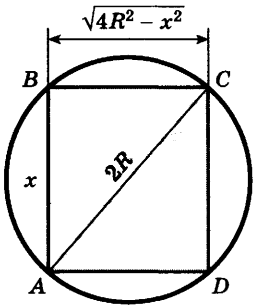


Рис. 139

находим $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Площадь прямоугольника равна

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ где } 0 < x < 2R.$$

Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $(0; 2R)$. Так как $S(x) > 0$ на интервале $(0; 2R)$, то функции $S(x)$ и $f(x) = (S(x))^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция

$$f(x) = x^2(4R^2 - x^2) = 4R^2x^2 - x^4$$

принимает наибольшее значение на интервале $(0; 2R)$. Найдём производную

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(R\sqrt{2} + x)(R\sqrt{2} - x).$$

На интервале $(0; 2R)$ есть только одна стационарная точка $x = R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$, (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x = R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь равна $2R^2$. $\triangleleft$

Упражнения

936 Используя график функции (рис. 140), найти её точки экстремума, а также наибольшее и наименьшее значения.

937 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$:

1) на отрезке $[-4; 3]$; 2) на отрезке $[-2; 1]$.

938 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$;

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$;

3) $f(x) = \sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

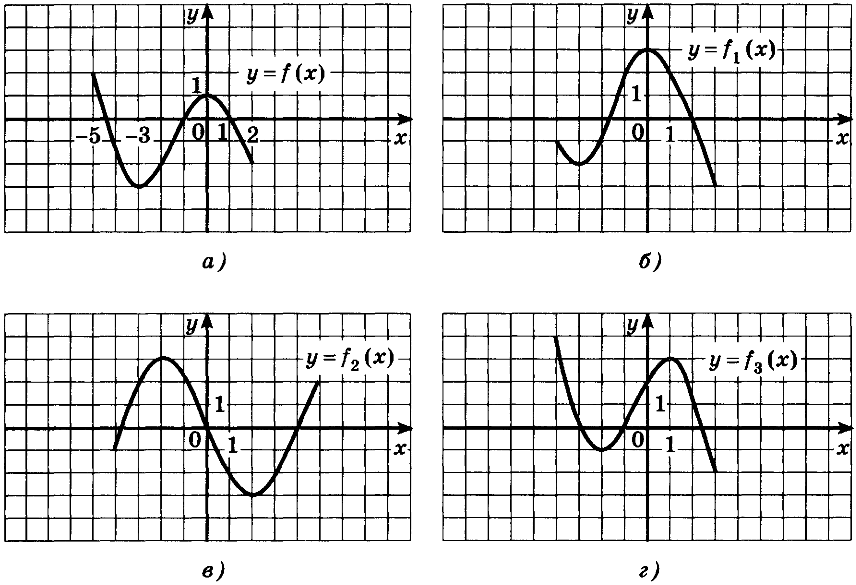


Рис. 140

939 Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции:

1) $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

940 Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

941 Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

942 Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

943 Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

944 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \ln x - x$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$;

2) $f(x) = x + e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$;

3) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

945 Найти наибольшее значение функции:

1) $3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

2) $3x - 2x\sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

946 Найти наименьшее значение функции:

1) $e^{3x} - 3x$ на интервале $(-1; 1)$;

2) $\frac{1}{x} + \ln x$ на интервале $(0; 2)$.

947 Найти наибольшее значение функции:

1) $x\sqrt[4]{5-x}$ на интервале $(0; 5)$;

2) $x\sqrt[3]{4-x}$ на интервале $(0; 4)$;

3) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$;

4) $\sqrt[3]{(x^2-4x+5)^{-1}}$ на интервале $(-1; 5)$.

948 Из квадратного листа картона со стороной a нужно сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края (рис. 141). Какой должна быть высота коробки, чтобы её объём был наибольшим?

949 Равнобедренные треугольники описаны около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 142). Обозначая $BK = x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

950 Из всех прямоугольников, у которых одна вершина лежит на оси Ox, вторая — на положительной полуоси Oy, третья — в начале координат, а четвёртая — на параболе $y = 3 - x^2$, выбран прямоугольник с наибольшей площадью. Найти эту площадь.

951 Найти на параболе $y = x^2$ точку, ближайшую к точке A (2; 0,5).

952 Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб. При каком угле наклона боковых стенок к основанию площадь поперечного сечения жёлоба будет наибольшей?

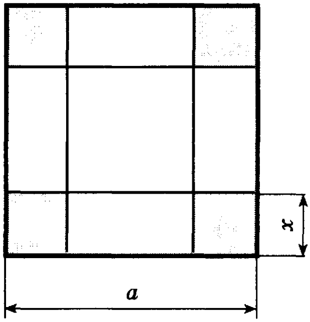


Рис. 141

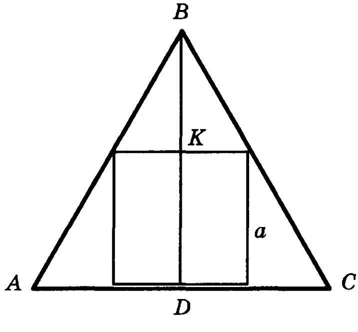


Рис. 142

§ 53* Выпуклость графика функции, точки перегиба

1. Производная второго порядка.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Её производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале. Производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$ называют также *первой производной* или *производной первого порядка* функции $f(x)$. Если функция $f'(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале $(a; b)$, то эту производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* данной функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Например, если $f(x) = x^4 - 3x^2$, то $f'(x) = 4x^3 - 6x$, $f''(x) = 12x^2 - 6$, а если $f(x) = \sin 2x$, то $f'(x) = 2\cos 2x$, $f''(x) = -4\sin 2x$. Производную от второй производной функции $f(x)$ называют *третьей производной* или *производной третьего порядка* этой функции и т. д. В § 49 и 50 было показано, как с помощью первой производной можно находить промежутки возрастания (убывания) функции и точки экстремума. Рассмотрим *свойства функции*, которые устанавливаются *с помощью второй производной.*

2. Выпуклость функции.

На рисунке 143 изображены графики функций, имеющих первую и вторую производные на интервале $(a; b)$.

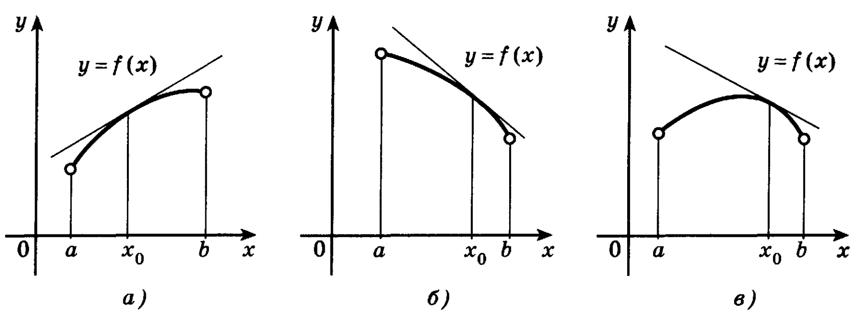


Рис. 143

Выясним, в чём заключается различие в поведении этих функций и какие свойства являются для них общими. На рисунке 143, *а* изображён график возрастающей, а на рисунке 143, *б* убывающей функции; функция, график которой представлен на рисунке 143, *в*, не является монотонной на $(a; b)$.

Однако все кривые, изображённые на рисунке 143, обладают общим свойством: с возрастанием x от a до b угловой коэффициент касательной к каждой из данных кривых уменьшается, т. е. производная каждой из соответствующих функций убывает на интервале $(a; b)$, и поэтому $f''(x) < 0$.

Из рисунков видно, что для любой точки x_0 интервала $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ *лежит ниже касательной* к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$.

Поэтому функции, графики которых изображены на рисунке 143, называют *выпуклыми вверх*. Дадим теперь определение *выпуклости*. Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх на* этом *интервале*, если её производная $f'(x)$ убывает на $(a; b)$.

Аналогично функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале $(a; b)$, если $f'(x)$ возрастает на этом интервале (рис. 144), и потому $f''(x) > 0$.

Если x_0 — любая точка интервала $(a; b)$, то график функции, выпуклой вниз, при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ (рис. 144) лежит выше *касательной к* этому *графику* в точке $(x_0; f(x_0))$.

Отметим ещё, что если функция $y = f(x)$ выпукла вверх, а M_1 и M_2 — точки этого графика (рис. 145), то на интервале $(x_1; x_2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, график функции $y = f(x)$ лежит выше прямой, проведённой через точки M_1 и M_2.

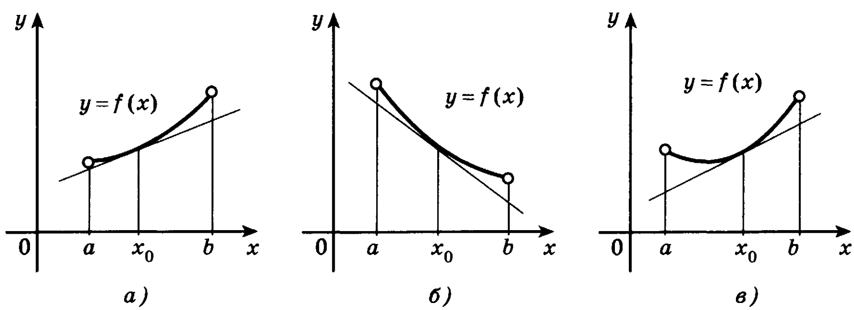


Рис. 144

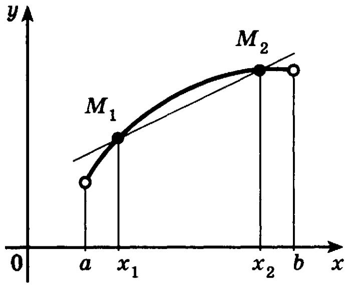


Рис. 145

Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют *интервалами выпуклости* этой функции.

Покажем, как с помощью второй производной можно находить интервалы выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а если $f''(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$.

Задача 1 Найти интервалы выпуклости вверх и вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sin x$, $-\pi < x < \pi$.

▶ 1) Если $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция x^3 выпукла вверх, а на промежутке $(0; +\infty)$ выпукла вниз (рис. 146).

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f''(x) = -\sin x$. Пусть $-\pi < x < 0$, тогда $\sin x < 0$ и $f''(x) > 0$. Следовательно, функция $\sin x$ (рис. 147) выпукла вниз на интервале $(-\pi; 0)$. Аналогично функция $\sin x$ выпукла вверх на интервале $(0; \pi)$, так как $-\sin x < 0$ при $0 < x < \pi$. ◁

Задача 2 Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

▶ Прямая $y = \frac{2}{\pi}x$ проходит через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ (см. рис. 147). Так как функция $y = \sin x$ выпукла

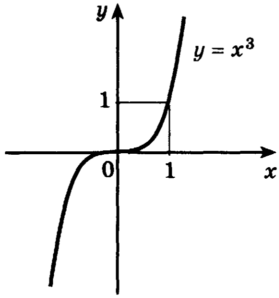


Рис. 146

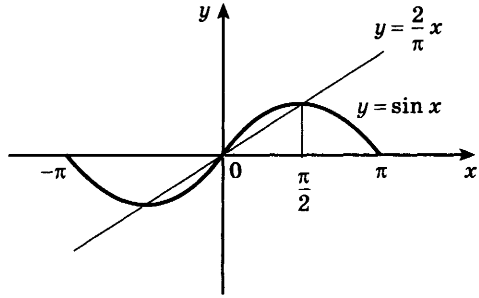


Рис. 147

вверх на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то её график на этом интервале лежит выше прямой $y = \frac{2}{\pi} x$. Это и означает, что на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi} x$. ◁

3. Точка перегиба.

В задаче 1 были рассмотрены функции $f(x) = x^3$ и $f(x) = \sin x$, для которых точка $x = 0$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз.

Точка x_0 дифференцируемой функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этой функции, если x_0 является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз для $f(x)$.

Иными словами, *в точке перегиба x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.*

Отметим, что при переходе через точку перегиба x_0 функции $f(x)$ график этой функции переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке x_0 на другую сторону.

С помощью второй производной можно находить точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Задача 3 Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = xe^{-x}$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

▶ Найдём первую и вторую производные функции.

1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$,

$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то $x = 2$ — точка перегиба функции xe^{-x}. Других точек перегиба нет.

2) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и 1 (и только в этих точках). Следовательно, $x = 0$ и $x = 1$ — точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$. ◁

Упражнения

953 Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 \cos x$;
2) $f(x) = x^3 \sin x$;
3) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$;
4) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6$.

954 Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = (x + 1)^4$;
2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$;
3) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^x$;
4) $f(x) = x^3 - 6x \ln x$.

955 Найти точки перегиба функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = \cos x$, $-\pi < x < \pi$;
2) $f(x) = x^5 - 80x^2$;
3) $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$;
4) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$, $-\pi < x < \pi$.

Упражнения к главе IX

956 Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$;
2) $y = \frac{2}{3} x^3 - x^2 - 4x + 5$;
3) $y = \frac{3}{x} - 1$;
4) $y = \frac{2}{x - 3}$.

957 Найти стационарные точки функции:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$;
2) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;
3) $y = \frac{x}{3} - \frac{12}{x}$;
4) $y = \cos 2x + 2 \cos x$.

958 Найти точки экстремума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$;
2) $y = 3x^4 - 4x^3$.

959 Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^5 - 2{,}5x^2 + 3$;
2) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 - 3$.

960 Построить график функции:

1) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$;
2) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

961 Построить график функции:

1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0; 3]$;
2) $y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 4]$.

962 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2; 2]$;

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-4; 0]$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-4; 3]$;

4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3; 2]$.

963 Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра наименьшую диагональ имеет квадрат.

964 Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

965 Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объёма.

Проверь себя!

1 **Найти интервалы возрастания и убывания функции**

$$y = 6x - 2x^3.$$

2 **Найти точки экстремума функции** $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

3 **Построить график функции:**

1) $y = 2x^4 - x^2 + 1$; **2)** $y = x^3 - 3x$.

4 **Функция** $y = x + \frac{4}{x}$ **непрерывна на отрезке** $[1; 5]$. **Найти её наибольшее и наименьшее значения.**

5 **Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объём параллелепипеда был наибольшим?**

966 Доказать, что функция $y = 1{,}8x^5 - 2\frac{1}{3}x^3 + 7x + 12{,}5$ возрастает на всей области определения.

967 Доказать, что функция $y = x(1 + 2\sqrt{x})$ возрастает на всей области определения.

968 Найти точки экстремума функции:

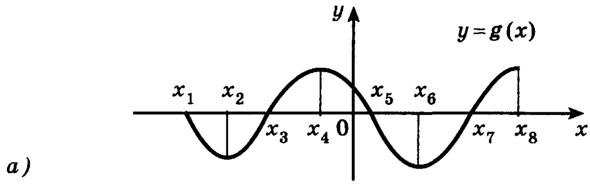
1) $y = x \ln x$; 2) $y = xe^x$; 3) $y = \frac{25}{7 - x} - \frac{9}{3 - x}$.

969 На рисунке 148 изображён график функции $y = g(x)$, являющейся производной функции $y = f(x)$. Найти:

1) интервалы возрастания и убывания функции $y = f(x)$;

2) точки экстремума функции $y = f(x)$;

3)* точки перегиба функции $y = f(x)$.



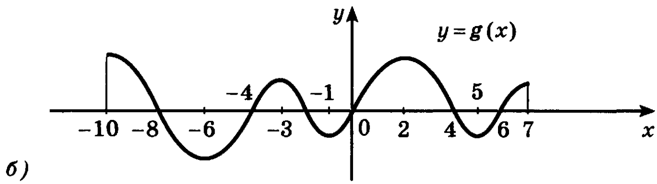


Рис. 148

970 Построить график функции:

1) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$; 2) $y = \dfrac{2}{x^2 + 4}$;

3) $y = (x - 1)^2 (x + 2)$; 4) $y = x (x - 1)^3$.

971 Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \dfrac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

972 Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

973 Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 40. Какую длину должны иметь катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

974 Сумма диагоналей параллелограмма равна a. Найти наименьшее значение суммы квадратов всех его сторон.

975 Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = 6x^2 - x^3$; 2) $f(x) = 3x^2 + 4x^3$.

976 Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найти эту площадь.

977 Найти наибольший из объёмов всех пирамид, у каждой из которых высота равна 12, а основанием является прямоугольный треугольник с гипотенузой 4.

978 Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объём.

979 Открытый кузов грузового автомобиля имеет вид прямоугольного параллелепипеда с площадью поверхности $2S$. Каковы должны быть длина и ширина кузова, чтобы его объём был наибольшим, а отношение длины к ширине равнялось $\frac{5}{2}$?

980 Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

981 Построить график функции:

1) $y = (x^2 - 1)\sqrt{x+1}$;

2) $y = |x| \cdot \sqrt[3]{1+3x}$;

3) $y = x^2 e^{-x}$;

4) $y = x^3 e^{-x}$.

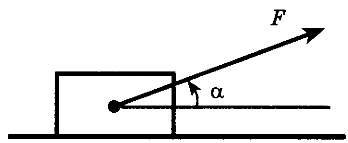


Рис. 149

982 Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 149). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором величина силы будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k.

X
глава

Интеграл

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. И. Лобачевский

§ 54 Первообразная

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. Пусть закон движения точки задан функцией $s(t)$. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ равна производной функции $s(t)$, т. е. $v(t) = s'(t)$.

В практике встречается обратная задача: по заданной скорости движения точки $v(t)$ найти закон движения, т. е. найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. Функцию $s(t)$, такую, что $s'(t) = v(t)$, называют *первообразной функции* $v(t)$.

Например, если $v(t) = at$, где a — заданное число, то функция $s(t) = \frac{at^2}{2}$ является первообразной функции $v(t)$, так как $s'(t) = \left(\frac{at^2}{2}\right)' = at = v(t)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$, функция $F(x) = \frac{x^4}{4}$ является первообразной функции $f(x) = x^3$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Задача 1 Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными функции $f(x)=x^2$.

▶ 1) Обозначим $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=$ $=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=x^2=f(x)$.

3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ◁

Вообще, любая функция $\frac{x^3}{3}+C$, где C — постоянная, является первообразной функции x^2. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю. Этот пример показывает, что для заданной функции её первообразная определяется неоднозначно.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_1'(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$. Производная их разности $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ равна нулю, так как $g'(x)=F'_1(x)-$ $-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Если $g'(x)=0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции $y=g(x)$ в каждой точке этого промежутка параллельна оси Ox. Поэтому графиком функции $y=g(x)$ является прямая, параллельная оси Ox, т. е. $g(x)=C$, где C — некоторая постоянная. Из равенств $g(x)=C$, $g(x)=$ $=F_1(x)-F_2(x)$ следует, что $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Итак, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то все первообразные функции $f(x)$ записываются в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная этой функции получается прибавлением к $F(x)$ некоторой постоянной: $F(x)+C$. Графики функций $y=F(x)+C$ получаются из графика $y=F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 150). Выбором C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

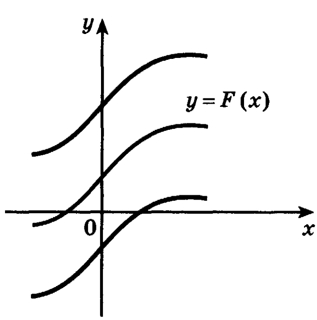


Рис. 150

Задача 2 Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

▶ Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдём число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◁

Задача 3 Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной функции $f(x) = x^p$ на промежутке $(0; +\infty)$.

▶ Так как $(x^{p+1})' = (p+1) \cdot x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◁

Упражнения

983 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = \frac{x^6}{6}$, $f(x) = x^5$; 2) $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$, $f(x) = x^4$.

984 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ при $x > 0$:

1) $F(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = -\frac{2}{x^2}$; 2) $F(x) = 1 + \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

985 Найти все первообразные функции:

1) x^4; 2) x^3; 3) x^{-3}; 4) $x^{-\frac{1}{2}}$.

986 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = x$, $M(-1; 3)$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$.

987 Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$; 2) $F(x) = \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$.

§ 55 Правила нахождения первообразных

Напомним, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием* (от латинского слова *integrare* — восстанавливать).

Таблицу первообразных для некоторых функций можно составить, используя таблицу производных. Например, зная, что $(\cos x)' = -\sin x$, получаем $(-\cos x)' = \sin x$, откуда следует, что все первообразные функции $\sin x$ записываются в виде $-\cos x + C$, где C — произвольная постоянная.

Приведём таблицу первообразных.

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p,\ \ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\dfrac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\dfrac{1}{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \ln (kx + b) + C$
$e^{kx+b},\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin (kx + b),\ \ k \neq 0$	$-\dfrac{1}{k} \cos (kx + b) + C$
$\cos (kx + b),\ \ k \neq 0$	$\dfrac{1}{k} \sin (kx + b) + C$

Отметим, что во всех рассмотренных примерах и в дальнейшем функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на таком промежутке, на котором обе функции $F(x)$ и $f(x)$ определены. Например, первообразной функции $\frac{1}{2x-4}$ является функция $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ на таком промежутке, на котором $2x-4>0$, т. е. на промежутке $(2; +\infty)$. Правила интегрирования можно также получить с помощью правил дифференцирования. Приведём следующие правила интегрирования:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:
1) функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной функции $f(x) \pm g(x)$;
2) функция $aF(x)$ является первообразной функции $af(x)$.

Задача 1 Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3\cos x.$$

▶ Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\sin x$. ◁

Задача 2 Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4\sin(2x+3).$$

▶ По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x+3)$ является функция $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3)$.

Ответ $-e^{1-x} + 2\cos(2x+3) + C$. ◁

Упражнения

Найти одну из первообразных функции (**988—990**).

988 1) $2x^5 - 3x^2$; 2) $5x^4 + 2x^3$; 3) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$; 5) $6x^2 - 4x + 3$; 6) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$.

989 1) $3\cos x - 4\sin x$; 2) $5\sin x + 2\cos x$;
3) $e^x - 2\cos x$; 4) $3e^x - \sin x$;
5) $5 - e^{-x} + 3\cos x$; 6) $1 + 3e^x - 4\cos x$;
7) $6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}$.

990 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1} + 4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3} - 2\sin(x-1)$.

991 Найти все первообразные функции:
1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;
4) $\sin\left(\frac{x}{4} + 5\right)$; 5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

992 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:
1) $f(x) = 2x + 3$, $M(1; 2)$; 2) $f(x) = 4x - 1$, $M(-1; 3)$;
3) $f(x) = \sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 5\right)$; 4) $f(x) = \cos 3x$, $M(0; 0)$.

Найти одну из первообразных функции (**993—996**).

993 1) $e^{2x} - \cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}} + \sin 2x$;
3) $2\sin\frac{x}{5} - 5e^{2x + \frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7} + 2e^{3x - \frac{1}{2}}$;
5) $\sqrt{\frac{x}{5}} + 4\sin(4x+2)$; 6) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$.

994 1) $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$; 2) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$;
3) $(1+2x)(x-3)$; 4) $(2x-3)(2+3x)$.

995 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

996 1) $\sin x \cos x$; 2) $\sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x$.

997 Найти первообразную функции $y = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$, которая при $x = \frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

998 Найти одну из первообразных функции:
1) $\frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $\cos^2 x$; 4) $\sin 3x \cos 5x$.

§ 56 Площадь криволинейной трапеции и интеграл

Рассмотрим фигуру, изображённую на рисунке 151. Эта фигура ограничена снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox, сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [a; b]$ и $f(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, а с боков ограничена отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой *криволинейной трапеции*.

Выясним, как можно вычислить площадь S криволинейной трапеции с помощью первообразной функции $f(x)$.

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ (рис. 152), где x — любая точка отрезка $[a; b]$. При $x = a$ отрезок $[a; x]$ вырождается в точку и поэтому $S(a) = 0$, при $x = b$ имеем $S(b) = S$.

Покажем, что $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

● Рассмотрим разность $S(x + h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади криволинейной трапеции с основанием $[x; x + h]$ (рис. 153). Справедливо утверждение: найдется точка $c \in [x; x + h]$ такая, что указанная площадь равна площади прямоугольника с основанием $[x; x + h]$ и высотой $f(c)$, т. е.

$$S(x + h) - S(x) = f(c)\,h.$$

Строгое доказательство этого утверждения рассматривается в курсе высшей математики.

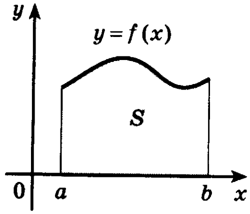


Рис. 151

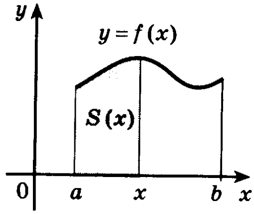


Рис. 152

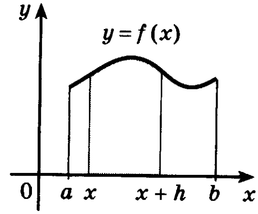


Рис. 153