Пусть $h \to 0$, тогда $c \to x$ и $f(c) \to f(x)$, так как $f(x)$ — непрерывная функция. Отсюда следует, что

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(c) \to f(x) \text{ при } h \to 0,$$

т. е. $S'(x) = f(x)$. ○

Любая другая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ отличается от $S(x)$ на постоянную, т. е.

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Из этого равенства при $x = a$ получаем $F(a) = S(a) + C$. Так как $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ и равенство (1) можно записать так:

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Отсюда при $x = b$ получаем

$$S(b) = F(b) - F(a).$$

Итак, площадь криволинейной трапеции (рис. 151) можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{S = F(b) - F(a),} \qquad (2)$$

где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции сводится к отысканию первообразной $F(x)$ функции $f(x)$, т. е. к интегрированию функции $f(x)$.

Разность $F(b) - F(a)$ называют *интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)dx$ (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»), т. е.

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).} \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Из формул (2) и (3) получаем

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

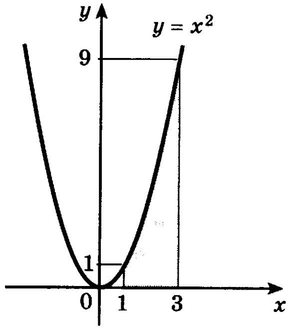

Рис. 154

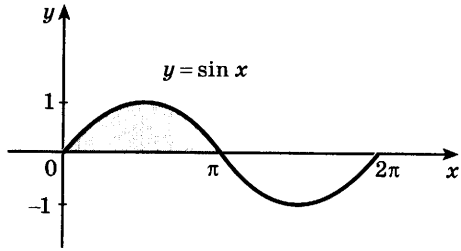

Рис. 155

Задача 1 Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 154.

▶ По формуле (4) находим $S = \int_1^3 x^2\,dx$. Вычислим этот интеграл с помощью формулы Ньютона — Лейбница (3). Одной из первообразных функции $f(x) = x^2$ является $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Поэтому $S = \int_1^3 x^2\,dx =$ $= F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8\frac{2}{3}$ (кв. ед.). ◁

Формулы (3) и (4) справедливы и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Задача 2 Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 155.

▶ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$. По формулам (3) и (4) получаем $S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) =$ $= 1 + 1 = 2$ (кв. ед.). ◁

Исторически интеграл возник в связи с вычислением площадей фигур, ограниченных кривыми, в частности в связи с вычислением площади криволинейной трапеции. Рассмотрим криволинейную трапецию, изображённую на рисунке 156. На этом рисунке основание трапеции — отрезок $[a; b]$ — разбито на n отрезков (необязательно равных) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

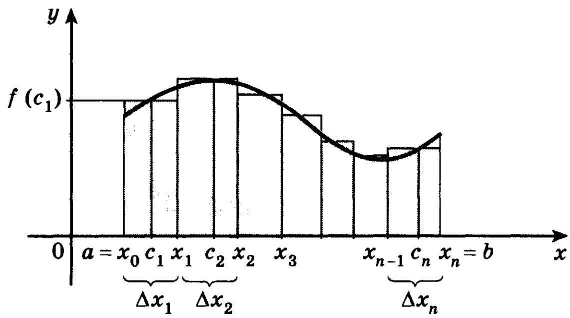

Рис. 156

Через эти точки проведены вертикальные прямые. На каждом отрезке $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, выберем точку c_k, и обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Тогда $f(c_k)\Delta x_k$ — площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(c_k)$, а площадь криволинейной трапеции приближённо равна сумме площадей построенных прямоугольников:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \qquad (5)$$

Сумму (5) называют *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке* $[a; b]$. Будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a; b]$ так, чтобы наибольшая из длин отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ стремилась к нулю. В курсе высшей математики доказывается, что для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ (не обязательно неотрицательной) интегральные суммы (5) стремятся к некоторому числу, т. е. имеют предел, не зависящий от выбора точек c_k. Этот предел называют *интегралом (определённым интегралом)* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$. Вычисляют интеграл по формуле $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Упражнения

999 Изобразить криволинейную трапецию, ограниченную:

1) графиком функции $y = (x - 1)^2$, осью Ox и прямой $x = 2$;
2) графиком функции $y = 2x - x^2$ и осью Ox;

3) графиком функции $y = \frac{2}{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = 4$;

4) графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

1000 Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;
2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;
3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;
4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;
5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;
6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

1001 Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:
1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$; 3) $y = -x^2 + 4x - 3$.

1002 Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 2) $a = 4$, $b = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$.

1003 Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$:

1) $b = 2$, $f(x) = 5x - x^2$, $2 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $b = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$;
3) $b = 1$, $f(x) = e^x - 1$; 4) $b = 2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

§ 57 Вычисление интегралов

Интегралы можно приближённо вычислять с помощью интегральных сумм. Такой способ требует громоздких вычислений. Его применяют в тех случаях, когда не удаётся найти первообразную функции $f(x)$ и для вычислений обычно используют ЭВМ, составляя специальные программы. Если же первообразная функция известна, то интеграл можно вычислить точно, используя формулу Ньютона — Лейбница.

Приведём примеры вычисления интегралов по формуле Ньютона — Лейбница с помощью таблицы первообразных и правил интегрирования.

Задача 1 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx$.

▶ Одной из первообразных функции $x - 1$ является функция $\frac{x^2}{2} - x$. Поэтому $\int\limits_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 2 Вычислить интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \sin x\,dx$.

▶ $\int\limits_{-a}^{a} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{-a}^{a} = (-\cos a) - (-\cos(-a)) =$
$= -\cos a + \cos(-a) = 0$, так как $\cos(-a) = \cos a$. ◁

Задача 3 Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

▶ $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int\limits_{-1}^{3} (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3} =$
$= (2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}} - (2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}} = 3 - 1 = 2$. ◁

Задача 4 Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)dx$.

▶ $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}. \ \triangleleft$$

Задача 5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 =$$
$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\frac{11}{15}. \ \triangleleft$$

Упражнения

Вычислить интеграл **(1004—1011).**

1004 1) $\int\limits_0^1 x\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 x^2dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 3x^2dx$; 4) $\int\limits_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int\limits_2^3 \frac{1}{x^2}dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}dx$; 7) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

1005 1) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

1006 1) $\int\limits_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$; 5) $\int\limits_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.

1007 1) $\int\limits_0^4 (x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int\limits_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\limits_0^2 e^{3x}dx$; 4) $\int\limits_1^3 2e^{2x}dx$.

1008 1) $\int_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)dx$;

3) $\int_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

1009 1) $\int_{1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}} dx$; 2) $\int_{1}^{3} \frac{3x-1}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx$.

1010 1) $\int_{1}^{2} \frac{3}{2x-1} dx$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{4}{3x+2} dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

1011 1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$; 4) $\int_{0}^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x)dx$;

5) $\int_{0}^{3} x^2\sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_{3}^{4} \frac{x^2-4x+5}{x-2}dx$.

1012 Найти все числа $b > 1$, для которых выполняется равенство $\int_{1}^{b} (b-4x)dx \geqslant 6-5b$.

§ 58 Вычисление площадей с помощью интегралов

Задача 4 Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$.

▶ Построим график функции $y=9-x^2$ и изобразим данную трапецию (рис. 157).

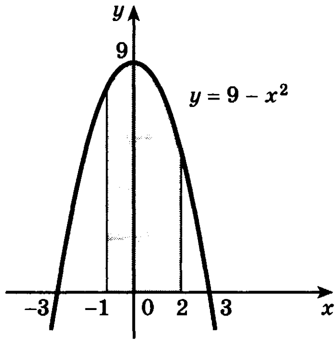

Рис. 157

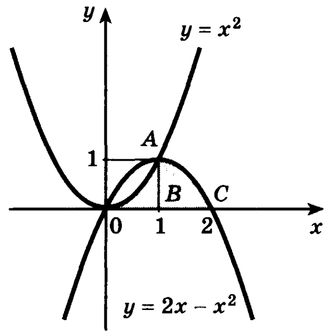

Рис. 158

Искомая площадь S равна интегралу

$$S = \int_{-1}^{2}(9 - x^2)dx.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$S = \int_{-1}^{2}(9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(9(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 24. \lhd$$

Задача 2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

▶ Построим графики функций $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 = 2x - x^2$. Корни этого уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Данная фигура изображена на рисунке 158. Из рисунка видно, что эта фигура состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S = \int_{0}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2}(2x - x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2} = 1. \lhd$$

Задача 3 Найти площадь S фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = \cos x$ на этом отрезке.

▶ Заметим, что площадь данной фигуры равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 159), т. е. площади фигуры, огра-

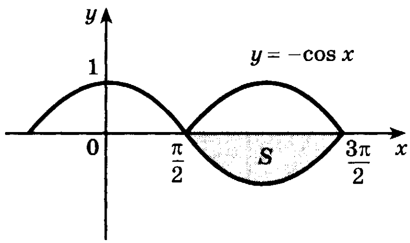

Рис. 159

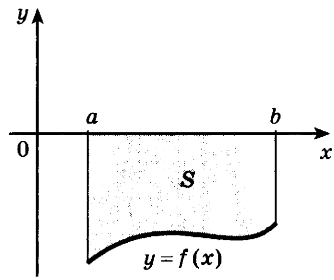

Рис. 160

ниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y = -\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому $S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\,dx =$

$$= (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2. \ \triangleleft$$

Вообще, если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, причем равенство нулю может быть лишь на его концах (рис. 160), то площадь S криволинейной трапеции равна $S = \int\limits_a^b (-f(x))\,dx.$

Задача 4 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$.

▶ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 161. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как

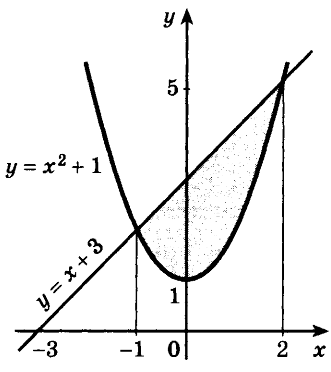

Рис. 161

$$S_1 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx, \quad S_2 = \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx,$$

$$\text{то } S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))\,dx =$$

$$= \int_{1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4{,}5. \ \triangleleft$$

Вообще, площадь фигуры, изображённой на рисунке 162, равна

$$S = \int_{a}^{b}(f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию $f_2(x) \geqslant f_1(x)$.

Задача 5 Найти площадь S фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

▶ Построим данную фигуру (рис. 163) и найдём абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2 = 2x^2 - 1$.

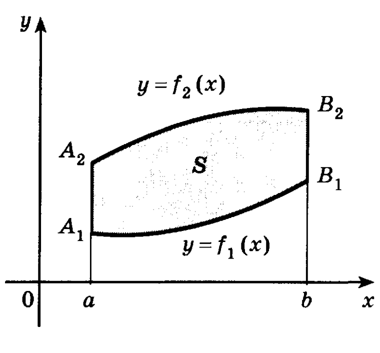

Рис. 162

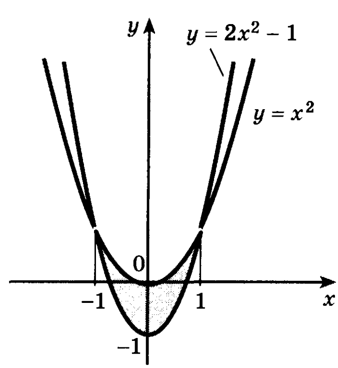

Рис. 163

Это уравнение имеет корни $x_{1,2} = \pm 1$. Воспользуемся формулой (1). Здесь $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$.

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1))\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \triangleleft$$

Упражнения

1013 На рисунке 164 изображены криволинейные трапеции. Найти площадь каждой из них.

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями (1014—1023).

1014 1) Параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;
3) параболой $y = 4x - x^2$, прямой $y = 4 - x$ и осью Ox;
4) параболой $y = 3x^2$, прямой $y = 1{,}5x + 4{,}5$ и осью Ox.

1015 1) Графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

1016 1) Параболой $y = x^2 + 3x$ и осью Ox;
2) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox.

1017 1) Параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3 - x$;
2) параболой $y = (x + 2)^2$ и прямой $y = x + 2$;
3) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$.

1018 1) Параболами $y = 6x^2$, $y = (x - 3)(x - 4)$ и осью Ox;
2) параболами $y = 4 - x^2$, $y = (x - 2)^2$ и осью Ox.

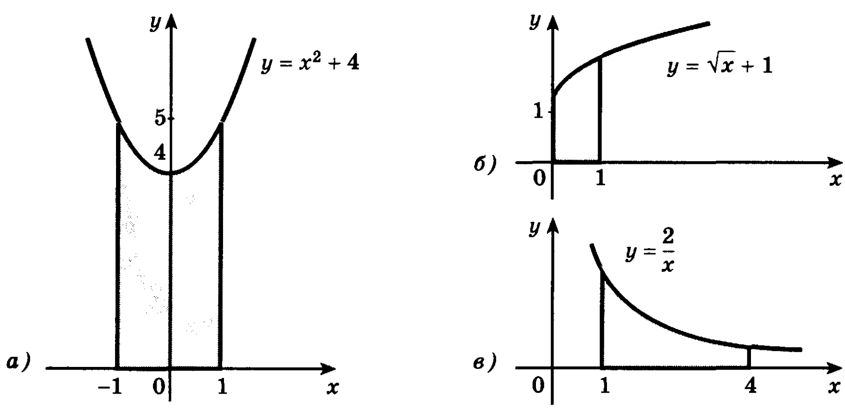

Рис. 164

1019 1) Графиком функции $y = \sin x$, отрезком $[0; \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

2) графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

1020 1) Параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$;
2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$.

1021 1) Параболой $y = 2 - x^2$ и прямой $y = -x$;
2) прямой $y = 1$, осью Oy и графиком функции $y = \sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1022 1) Параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;
2) параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;
3) параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;
4) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$, $x = -2$.

1023 1) Параболой $y = x^2 + 10$ и касательными к этой параболе, проведёнными из точки $(0; 1)$;
2) гиперболой $y = \frac{1}{x}$, прямой $x = 1$ и касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

1024 Фигура ограничена линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Найти точку $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2 + 1$, через которую надо провести касательную к этому графику так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади.

§ 59* Применение производной и интеграла к решению практических задач

1. Простейшие дифференциальные уравнения. До сих пор рассматривались уравнения, в которых неизвестными являлись числа. В математике и её приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Так, задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Например, если $v(t) = 3 - 4t$, то для нахождения $s(t)$ нужно решить уравнение $s'(t) = 3 - 4t$. Это уравнение содержит производную неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*.

Задача 1 Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

▶ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т. е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, где C — произвольная постоянная. ◁

Решение дифференциального уравнения определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого эта постоянная определяется.

Задача 2 Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

▶ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 2$ находим $\sin 0 + C = 2$, откуда $C = 2$.

Ответ $y = 2 + \sin x$. ◁

Решение многих физических, биологических, технических и других практических задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y' = ky, \qquad (1)$$

где k — заданное число. Решениями этого уравнения являются функции

$$y = Ce^{kx}, \qquad (2)$$

где C — постоянная, определяемая условиями конкретной задачи.

Например, скорость $m'(t)$ размножения бактерий связана с массой $m(t)$ бактерий в момент времени t уравнением

$$m'(t) = km(t),$$

где k — положительное число, зависящее от вида бактерий и внешних условий. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постоянную C можно найти, например, из условия, что в момент $t = 0$ масса m_0 бактерий известна. Тогда $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Другим примером применения уравнения (1) является задача о радиоактивном распаде вещества. Если $m'(t)$ — скорость радиоактивного распада в момент времени t, то $m'(t) = -km(t)$, где k — постоянная, зависящая от радиоактивности вещества. Решениями этого уравнения являются функции

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Если в момент времени t масса равна m_0, то $C = m_0$, и поэтому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества. Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (3) при $t = T$ получаем $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $k = \frac{\ln 2}{T}$. Поэтому формула (3) запишется так:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонические колебания.

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем, и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' = -\omega^2 y, \qquad (4)$$

где ω — заданное положительное число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$. Решениями уравнения (4) являются функции

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \qquad (5)$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (4) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Например, если $y(t)$ — отклонение точки свободно колеблющейся струны от положения равновесия в момент времени t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза.

Графиком гармонического колебания является синусоида.

3. Примеры применения первообразной и интеграла.

Задача 3 Цилиндрический бак, высота которого равна 5 м, а радиус основания равен 0,8 м, заполнен водой (рис. 165). За какое время вытечет вода из бака через круглое отверстие в дне бака, если радиус отверстия равен 0,1 м?

▶ Обозначим высоту бака H, радиус его основания R, радиус отверстия r (длины измеряем в метрах, время — в секундах).

Скорость вытекания жидкости v зависит от высоты столба жидкости x и вычисляется по формуле Бернулли

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \qquad (6)$$

где $g = 9{,}8$, σ — коэффициент, зависящий от свойства жидкости; для воды $\sigma = 0{,}6$. Поэтому по мере убывания воды в баке скорость вытекания уменьшается (а не постоянна).

Пусть $t(x)$ — время, за которое вытекает вода из бака высотой x с тем же радиусом основания R и с тем же отверстием радиуса r (рис. 165). Найдём приближённо разностное отношение $\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$, считая, что за время $t_1 = t(x+h) - t(x)$ скорость вытекания воды постоянна и выражается формулой (6). За время t_1 объём воды, вытекшей из бака, равен объёму цилиндра высотой h с радиусом основания R (рис. 165), т. е. равен $\pi R^2 h$. С другой стороны, этот объём равен объёму цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне бака, а высота равна произведению скорости вытекания v на время t_1, т. е. объём равен $\pi r^2 v t_1$. Таким обра-

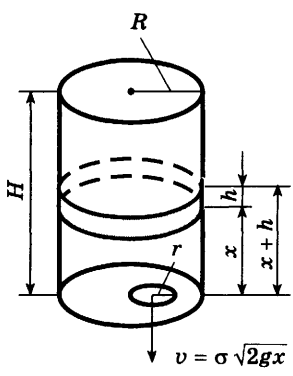

Рис. 165

зом, $\pi R^2 h = \pi r^2 v t_1$. Отсюда, учитывая формулу (6) и обозначение $t_1 = t(x+h) - t(x)$, получаем

$$\frac{t(x+h)-t(x)}{h} \approx \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

причём погрешность приближения стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, при $h \to 0$ получается равенство

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

откуда

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Если $x = 0$ (в баке нет воды), то $t(0) = 0$, поэтому $C = 0$. При $x = H$ находим искомое время

$$t(H) = \frac{R^2 \sqrt{2H}}{r^2 \sigma \sqrt{g}}.$$

Используя данные задачи, вычисляем

$$t(5) = \frac{(0{,}8)^2 \cdot \sqrt{10}}{(0{,}1)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \approx 108.$$

Ответ 108 с. ◁

Задача 4 Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

▶ По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. $F = kx$, где x — величина растяжения или сжатия (в м), k — постоянная. Из условия задачи находим k. Так как при $x = 0{,}01$ м сила $F = 10$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 1000$.

Следовательно, $F(x) = kx = 1000x$.

Работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

Используя данные задачи, получаем

$$A = \int\limits_0^{0{,}08} 1000x\,dx = 1000\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}08} = 3{,}2 \text{ (Дж)}. \ ◁$$

Упражнения

1025 Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$:

1) $v(t) = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$;
2) $v(t) = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

1026 Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t) = 4t - t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

1027 Решить дифференциальное уравнение:

1) $y' = 3 - 4x$;
2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$;
3) $y' = 3e^{2x}$;
4) $y' = 4\cos 2x$;
5) $y' = 3\sin x$;
6) $y' = \cos x - \sin x$.

1028 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$;
2) $y' = 2\cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$;
4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$;
6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

1029 Показать, что функция $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением дифференциального уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

1030 Масса радия, равная 1 г, через 10 лет уменьшилась до 0,999 г. Через сколько лет масса радия уменьшится до 0,5 г?

1031 Вычислить работу, которую нужно затратить при сжатии пружины на 3 см, если сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см.

1032 Вычислить работу, которую нужно затратить при растяжении пружины на 8 см, если сила в 3 Н растягивает пружину на 1 см.

Упражнения к главе X

1033 Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = \cos x$, $M(0; -2)$;
2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi; 0)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4; 5)$;
4) $f(x) = e^x$, $M(0; 2)$;
5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1; -2)$;
6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2; 3)$.

1034 Вычислить интеграл:

1) $\int_{-1}^{2} 2\,dx$; 2) $\int_{-2}^{2} (3 - x)\,dx$; 3) $\int_{1}^{3} (x^2 - 2x)\,dx$;

4) $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2)\,dx$; 5) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; 6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; 7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

1035 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
2) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
3) $y = x^2$, $y = 2 - x$;
4) $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Проверь себя!

1 Показать, что функция $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ на всей числовой прямой.

2 Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$.

3 Вычислить:

1) $\int_{1}^{2} 3x^3\,dx$; 2) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox;
2) графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = 10$.

Вычислить интеграл **(1036—1037).**

1036 1) $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3)\,dx$; 2) $\int_{-1}^2 (6x^3 - 5x)\,dx$;

3) $\int_1^4 \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right)dx$; 4) $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right)dx$;

5) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

1037 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$; 4) $\int_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями **(1038—1039).**

1038 1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$;

3) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$;

4) $y = x^2 + 2$, $y = 2x + 2$.

1039 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = x^2 + 4x + 4$, $y = 0$;

2) $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x^2$;

3) $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$.

1040 Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x = 1$;

2) гиперболой $y = \frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x = 2$, и прямыми $y = 0$, $x = 6$.

1041 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $x = 0$, $y = 6$ (при $x < 0$);

2) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

1042 При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + px$, где p — заданное число, и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

XI глава

Комбинаторика

В нашу современную жизнь вторгается математика с её особым стилем мышления, становящимся сейчас обязательным и для инженера, и для биолога.

Б. В. Гнеденко

§ 60 Правило произведения

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3 (т. е. $n = 3$). Второй цифрой может быть выбрана любая из четырёх данных цифр 0, 1, 2, 3 (т. е. $m = 4$). Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно $n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ 12. ◁

Задача 2 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ При решении задачи 1 было установлено, что с помощью цифр 0, 1, 2 и 3 можно записать 12 различных двузначных чисел. К каждому из них можно приписать любую из четырёх имеющихся цифр, получая тем самым различные трёхзначные числа. Таким образом, согласно правилу произведения существует $12 \cdot 4 = 48$ различных трёхзначных чисел, записанных с помощью данных цифр.

Ответ 48. ◁

При решении задачи 2 фактически дважды использовалось правило произведения. Действительно, первую цифру числа можно было выбрать 3 способами, вторую к ней присоединить — любым из 4 способов, третью цифру к каждому образованному двузначному числу можно было приписать 4 способами. Всего трёхзначных чисел с помощью данных цифр можно образовать $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 48$ способами. Таким образом, правило произведения может быть применено неоднократно для подсчёта числа соединений из трёх, четырёх и т. д. элементов, выбираемых из определённых множеств с конечным числом элементов.

Задача 3 Сколько различных пятибуквенных *слов* можно записать с помощью букв «и» и «л»? (*Словом* в комбинаторике называют любую последовательность букв; среди составленных из данных букв *слов* только слово «лилии» имеет смысл в русском языке.)

▶ Каждая из пяти букв составляемого *слова* последовательно выбирается из предложенных двух букв. Применив 4 раза правило произведения, найдём число всевозможных пятибуквенных *слов*, составленных из двух данных букв:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ответ 32. ◁

Упражнения

1043 Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры:

1) 1, 2 и 3; 2) 4, 5 и 6; 3) 5, 6, 7 и 8;
4) 6, 7, 8 и 9; 5) 0, 2, 4 и 6; 6) 0, 3, 5 и 7?

1044 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр:

1) 2 и 3; 2) 8 и 9; 3) 0 и 2; 4) 0 и 5?

1045 Сколько различных трёхзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:

1) 3, 4 и 5; 2) 7, 8 и 9; 3) 5, 6, 7 и 8; 4) 1, 2, 3 и 4?

1046 Сколько различных четырёхбуквенных *слов* можно записать с помощью букв:

1) «м» и «а»; 2) «п» и «а»; 3) «к», «а» и «о»; 4) «ш», «а» и «л»?

1047 Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три различные дороги, а между пунктами B и C — четыре различные дороги. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

1048 Чтобы попасть из города M в город K, нужно проехать через город N. Между городами M и N имеются четыре автодороги, а из города N в город K можно попасть либо поездом, либо самолетом. Сколько существует различных способов добраться из города M в город K?

1049 Сколькими способами могут распределиться золотая и серебряная медали на чемпионате по футболу, если в нём принимают участие:

1) 32 команды; 2) 16 команд?

1050 Сколькими способами можно составить расписание 5 уроков на один день из 5 различных учебных предметов?

1051 Сколькими способами можно составить расписание 6 уроков из 6 разных учебных предметов?

1052 Сколькими способами могут занять очередь в школьный буфет:

1) 6 учащихся; 2) 5 учащихся?

1053 В классе 18 учащихся. Из их числа нужно выбрать физорга, культорга и казначея. Сколькими способами это можно сделать, если один ученик может занимать не более одной должности?

1054 В классе 20 учащихся. Необходимо назначить по одному дежурному в столовую, вестибюль и спортивный зал. Сколькими способами это можно сделать?

1055 Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью:
1) любой из 10 гласных букв с последующим трёхзначным

числовым кодом; 2) любой из 8 согласных букв «к», «л», «м», «н», «п», «р», «с», «т» с последующим четырёхзначным числовым кодом (нуль в коде может стоять и на первом месте)?

1056 Сколько существует пятизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечётных местах, различны?

1057 Сколько существует шестизначных чисел, в которых все цифры, стоящие на чётных местах, различны?

1058 Сколько нечётных: 1) трёхзначных; 2) четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если любую из них можно использовать в записи числа не более одного раза?

§ 61 Перестановки

Задача 1 Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

▶ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ Книги можно поставить 24 способами. ◁

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение. ***Перестановками из n элементов*** **называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.**

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)\,(n-1)\,n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Задача 2 Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

▶ Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов. По формуле (1) находим: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ 720 способами. ◁

Упражнения

1059 Найти значение:

1) P_5; 2) P_7; 3) P_9; 4) P_8.

1060 Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырёх стульях в столовой детского сада?

1061 Сколькими способами могут занять места 5 учащихся класса за пятью одноместными партами?

1062 Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день:

1) среди семи учащихся класса в течение 7 дней;
2) среди девяти учащихся класса в течение 9 дней?

1063 Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:

1) последней была цифра 3;
2) первой была цифра 4;
3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
4) первой была цифра 2, а последней — цифра 4;

5) первыми были цифры 3 и 4, расположенные в любом порядке;

6) последними были цифры 1 и 2, расположенные в любом порядке?

1064 Упростить форму записи выражений (полагая, что k — натуральное число, $k > 4$):

1) $6! \cdot 7$; 2) $10! \cdot 11$; 3) $15 \cdot 14!$; 4) $12 \cdot 11!$;
5) $k!\,(k+1)$; 6) $(k-1)!\,k$; 7) $(k-1)!\,k\,(k+1)$;
8) $(k-2)!\,(k-1) \cdot k$; 9) $(k-4)!\,(k^2-5k+6)$;
10) $(k-3)!\,(k^2-3k+2)$.

1065 Найти значение выражения:

1) $\frac{26!}{25!}$; 2) $\frac{32!}{31!}$; 3) $\frac{12!}{10!}$; 4) $\frac{14!}{12!}$;
5) $\frac{5!\cdot 3!}{7!}$; 6) $\frac{6!\cdot 4!}{8!}$; 7) $\frac{10!}{8!\cdot 3!}$; 8) $\frac{11!}{9!\cdot 2!}$.

1066 Упростить выражение (буквами n и m обозначены натуральные числа):

1) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$; 3) $\frac{m!\,(m+1)}{(m+2)!}$; 4) $\frac{(m+3)!}{(m+1)!\,(m+2)}$.

1067 Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{4}$; 2) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 5$;

3) $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$; 4) $\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{12}$.

1068 Сколько различных *слов* можно составить, переставляя местами буквы в слове: 1) гипотенуза; 2) треугольник?

1069 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 5, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

1070 Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 6, 7 и 9?

1071 Имеются 8 книг, среди которых: 1) 6 книг различных авторов и двухтомник одного автора, книг которого не было среди предыдущих шести книг; 2) 5 книг различных пяти авторов и трёхтомник шестого автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

§ 62 Размещения

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▶ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ 12. ◁

При решении задачи 1 из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом элементов (например, 12 и 24), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение. ***Размещениями из m элементов по n элементов*** **($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.**

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.

Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

● Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т. е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $(m - 1)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^1 \cdot (m - 1)$. Таким образом, $A_m^2 = m\,(m - 1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $(m - 2)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^2 \cdot (m - 2)$, т. е. $A_m^3 = m\,(m - 1)\,(m - 2)$.

Последовательно применяя правило произведения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$\boldsymbol{A_m^n = m\,(m - 1)\,(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1))}. \ \bigcirc \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n\,(n - 1)\,(n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n,$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$\boldsymbol{A_n^n = P_n}. \qquad (2)$$

Задача 2 Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D, E, F?

▶ В условии задачи даны 6 букв. Для обозначения вектора используются 2 буквы, причём порядок записи этих букв в обозначении имеет значение. Поэтому задача сводится к нахождению числа размещений из 6 по 2. Находим $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ 30 способами. ◁

Задача 3 Решить уравнение $A_n^2 = 56$.

▶ Отметим, что $n \geqslant 2$ и $n \in \boldsymbol{N}$. По формуле (1) имеем $A_n^2 = n\,(n - 1) = n^2 - n$, т. е. $n^2 - n = 56$, откуда $n^2 - n - 56 = 0$ и $n_1 = 8$, $n_2 = -7$. Так как корнем за-данного уравнения может быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n = -7$ — посторонний корень.

Ответ $n = 8$. ◁

Преобразуем формулу (1) для нахождения числа размещений A_m^n.

● Запишем формулу (1) следующим образом:

$$A_m^n = (m - n + 1)(m - n + 2) \cdot \ldots \cdot (m - 1)\, m.$$

Умножив обе части этого равенства на $(m - n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m - n)$, получим

$$(m - n)! \cdot A_m^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \times$$
$$\times (m - n)(m - n + 1)(m - n + 2) \cdot \ldots \cdot (m - 1)\, m,$$

т. е. $(m - n)! \cdot A_m^n = m!$, откуда

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \ \bigcirc \qquad (3)$$

Для того чтобы формула (3) была справедлива не только для $n < m$, но и для $n = m$ (так как имеет смысл $A_m^m = P_m = m!$), полагают по определению $0! = 1$.

Задача 4 Вычислить: $\dfrac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5}$.

▶ Используя формулу (3), находим

$$\frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\frac{20!}{13!} + \frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} =$$
$$= 14 \cdot 15 + 15 = 15(14 + 1) = 225.$$

Ответ 225. ◁

Упражнения

1072 Вычислить:

1) A_4^1; 2) A_5^1; 3) A_5^2; 4) A_4^2;
5) A_7^7; 6) A_6^6; 7) A_{10}^3; 8) A_8^3.

1073 В классе изучают 8 предметов естественно-математического цикла. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть:
1) 5 уроков из пяти разных предметов этого цикла;
2) 6 уроков из шести разных предметов этого цикла.

1074 Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E, F вершин данного:
1) четырёхугольника; 2) треугольника?

1075 В классе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: 1) физорга и культорга; 2) физорга, культорга и казначея?

1076 Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{15}^9 - A_{15}^8}{A_{15}^7}$; 2) $\dfrac{A_{18}^{10} + A_{18}^{11}}{A_{18}^9}$; 3) $\dfrac{A_9^4 \cdot A_4^4}{A_8^6}$; 4) $\dfrac{A_5^5 \cdot A_{10}^3}{A_9^7}$.

1077 Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 72$; 2) $A_m^2 = 56$; 3) $A_m^3 = 12m$;
4) $A_m^3 = 20m$; 5) $A_{m+1}^2 = 110$; 6) $A_{m+2}^2 = 90$;
7) $A_m^5 = 18A_{m-2}^4$; 8) $(m-4) \cdot A_m^4 = 21\,(m-5) \cdot A_{m-2}^3$.

1078 Упростить выражение:

1) $\dfrac{A_9^n \cdot P_{10-n}}{P_8}$, где $n \leqslant 9$; 2) $\dfrac{P_{12}}{A_{13}^n \cdot P_{14-n}}$, где $n \leqslant 13$.

1079 В шахматном турнире участвуют:
1) 6 юношей и 2 девушки; 2) 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники турнира набирают разное количество очков.

§ 63 Сочетания и их свойства

Задача 1 Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

▶ Пусть x — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. $2x$. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно A_{10}^2. Таким образом, $2x = A_{10}^2$, т. е. $2x = 90$, откуда $x = 45$.

Ответ 45 способами. ◁

При решении этой задачи из 10 саженцев были образованы пары — соединения по 2 саженца, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение. ***Сочетаниями из m элементов по n*** **в каждом ($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.**

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

● Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n = n!$ соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получим все размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \quad ○ \qquad (1)$$

Например, $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Заметим, что если $m = n$, то $C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$

Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geqslant n$ и $P_n = n!$, формулу (1) можно представить в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}, \qquad (2)$$

где $m \geqslant n$.

Например, $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Задача 2 Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

▶ Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учёта порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим

$$C_{36}^{2} = \frac{36!}{(36-2)!\cdot 2!} = \frac{36!}{34!\cdot 2!} = \frac{35\cdot 36}{2} = 35\cdot 18 = 630.$$

Ответ 630 способов. ◁

Рассмотрим два свойства сочетаний, которые в ряде случаев упрощают вычисления при решении задач.

Свойство 1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

● По формуле (2) имеем

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot(m-n)!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!},$$

т. е. $C_m^n = C_m^{m-n}$. ○

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

● Воспользуемся соотношением (1):

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{A_m^n}{P_n} + \frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(n+1) + m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\dots(m-(n-1))}{(n+1)!} = \frac{A_{m+1}^{n+1}}{P_{n+1}} = C_{m+1}^{n+1}. \ ○$$

Задача 3 Найти значение выражения $C_{20}^{18} + C_{20}^{19}$.

▶ Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем

$$C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)!\cdot 19!} = \frac{21!}{2!\cdot 19!} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210.$$

Ответ 210. ◁

Упражнения

1080 Найти значение:

1) C_7^1; 2) C_6^1; 3) C_8^2; 4) C_7^2;
5) C_7^3; 6) C_8^3; 7) C_9^8; 8) C_{10}^9;
9) C_{15}^{15}; 10) C_{12}^{12}; 11) C_{30}^0; 12) C_{40}^0;
13) C_{50}^{48}; 14) C_{40}^{38}; 15) C_{70}^2; 16) C_{60}^2.

1081 Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать:
1) троих студентов; 2) четверых студентов?

1082 Сколько различных аккордов, содержащих: 1) 4 звука; 2) 3 звука, можно образовать из 12 клавиш одной октавы?

1083 В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться: 1) 15 ламп; 2) 14 ламп?

1084 На плоскости отмечено: 1) 16 точек; 2) 13 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

1085 На окружности отмечено: 1) 10 точек; 2) 12 точек. Сколько различных треугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

1086 На окружности отмечено: 1) 7 точек; 2) 8 точек. Сколько различных выпуклых четырёхугольников с вершинами, выбранными из этих точек, можно построить?

1087 Из колоды карт, содержащей 36 листов, выбирают: 1) 3 карты бубновой масти и одну карту трефовой масти; 2) одну карту пиковой масти и две карты червовой масти. Сколькими способами можно осуществить такой выбор?

1088 Имеются 5 тюльпанов и 6 нарциссов. Сколькими способами можно составить букет: 1) из 3 тюльпанов и 2 нарциссов; 2) из 2 тюльпанов и 3 нарциссов?

1089 В школьном хоре 7 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами из состава хора можно выбрать для участия в районном смотре: 1) 5 девочек и 2 мальчиков; 2) 4 девочек и 3 мальчиков?

1090 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{13}^{10}+C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^{12}+C_{14}^{13}$; 3) $C_{19}^4-C_{18}^4$;
4) $C_{21}^3-C_{20}^3$; 5) $C_{61}^3-C_{60}^2$; 6) $C_{71}^3-C_{70}^2$.

1091 Решить уравнение:

1) $C_{x+1}^2+C_{x+1}^3=7x$; 2) $C_{x-1}^3+C_{x-1}^2=4(x-1)$;
3) $C_x^3=\frac{4}{15}C_{x+2}^4$; 4) $5C_x^3=C_{x+2}^4$;
5) $C_{3x+1}^{3x-1}=120$; 6) $C_{2x+1}^{2x-1}=36$.

§ 64 Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a + b)^0 = 1,$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$

$(a + b)^4 = (a + b)^3\,(a + b) =$

$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$

$(a + b)^5 = (a + b)^4\,(a + b) =$

$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$\begin{aligned}(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b +\\ + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots +\\ + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.\end{aligned} \qquad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Задача 1 Записать разложение бинома $(x - 2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x+(-2))^6 =$$
$$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 +$$
$$+ C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$
$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \lhd$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты: 1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m + 1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Задача 2 Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \qquad (2)$$

▶ Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◁

Задача 3* Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

▶ $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложения десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид $C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2, должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2. \qquad (3)$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$. Равенство (3) выполняется при $5 - n = 2$, т. е. при $n = 3$. При $n = 3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Ответ $120x^2$. ◁

Упражнения

1092 Записать разложение бинома:

1) $(1 + x)^8$; 2) $(x + 1)^7$; 3) $(a - 1)^9$; 4) $(y - 1)^{10}$;
5) $(2x + 1)^5$; 6) $(x + 2)^6$; 7) $(3x + 2)^4$; 8) $(2a + 3)^5$;
9) $\left(2a - \frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^4$.

1093 Записать разложение бинома:

1) $\left(1 + \sqrt{2}\right)^6$; 2) $\left(1 + \sqrt{3}\right)^5$; 3) $\left(a - \frac{1}{3a}\right)^7$; 4) $\left(b - \frac{1}{2b}\right)^6$.

1094 Найти четвёртый член разложения бинома:

1) $(\sqrt{x}+x)^{12}$; 2) $(x-\sqrt{x})^{14}$; 3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$;

4) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{11}$; 5) $\left(a^{0,1}+a^{0,2}\right)^{9}$; 6) $\left(b^{0,3}+b^{0,4}\right)^{8}$.

1095 С помощью свойства элементов строки треугольника Паскаля найти сумму:

1) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$;

2) $C_6^6+C_6^5+C_6^4+C_6^3+C_6^2+C_6^0$;

3) $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5$;

4) $C_7^6+C_7^5+C_7^4+C_7^3+C_7^2+C_7^1$;

5) $C_9^0+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4$;

6) $C_{11}^5+C_{11}^4+C_{11}^3+C_{11}^2+C_{11}^1+C_{11}^0$.

1096 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий x^{-1};

2) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^{3}.

Упражнения к главе XI

1097 Вычислить:

1) $\frac{7!-5!}{5!}$; 2) $\frac{6!-4!}{5!}$; 3) $\frac{149!}{148!}-\frac{36!}{35!}$;

4) $\frac{97!}{96!}+\frac{35!}{34!}$; 5) $\frac{4!\cdot 8!}{6!\cdot 7!}$; 6) $\frac{9!\cdot 5!}{7!\cdot 6!}$.

1098 Упростить:

1) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$; 2) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$;

3) $\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$; 4) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)\cdot n!$;

5) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)\cdot(n+1)!$; 6) $\left(\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot(n+1)!$.

1099 Найти значение выражения:

1) $\frac{A_7^4}{P_5}$; 2) $\frac{A_6^3}{P_4}$; 3) $\left(\frac{C_{11}^7}{10}-\frac{C_7^2}{5}\right)\cdot\frac{P_5}{A_6^4}$; 4) $\left(\frac{C_{10}^7}{3}+\frac{C_6^2}{6}\right)\cdot\frac{P_4}{A_5^4}$.

1100 Решить уравнение:

1) $\frac{P_{x+1}}{P_{x-1}}=30$; 2) $\frac{P_x}{P_{x-2}}=42$; 3) $\frac{1}{P_{x-5}}=\frac{56}{P_{x-3}}$;

4) $\frac{1}{P_{x-4}}=\frac{110}{P_{x-2}}$; 5) $A_{x+1}^3=72\,(x-1)$;

6) $A_{x-1}^4=40\,(x-2)\,(x-3)$;

7) $5C_{n+1}^3=8C_n^4$; 8) $C_n^3=4C_{n-2}^2$.

1101 Сколькими способами можно составить график очерёдности дежурства (по одному человеку в день) в школьной столовой среди: 1) восьми учащихся на восемь дней; 2) семи учащихся на семь дней?

1102 Сколько существует способов выбора троих учёных из числа: 1) десяти; 2) девяти сотрудников кафедры?

1103 Сколькими способами могут распределиться одно первое, одно второе и одно третье места среди: 1) десяти; 2) восьми участников соревнования?

1104 Сколькими способами можно рассадить: 1) четверых; 2) троих учащихся на имеющихся в классе 20 стульях?

1105 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_{12}^{10}+C_{12}^{11}$; 2) $C_{11}^9+C_{11}^{10}$; 3) $C_8^6+C_8^7+C_9^8$; 4) $C_9^5+C_9^6+C_{10}^7$.

1106 Записать разложение бинома:

1) $(2-x)^5$; 2) $(x-2)^4$; 3) $(a+3)^4$;

4) $(3+a)^5$; 5) $(x-1)^8$; 6) $(1-x)^7$;

7) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; 8) $\left(2a+\frac{1}{2}\right)^6$.

Проверь себя!

1 В вазе лежат 7 разных пирожных. Сколько существует вариантов выбора из них двух пирожных?

2 Сколькими способами можно подарить 6 различных по окраске мячей шести малышам, вручая каждому по одному мячу?

3 Сколько существует способов занять 3 одноместные парты в первом ряду класса, если в выборе мест участвуют 22 школьника?

4 Найти значение выражения $\frac{C_8^3\cdot P_6}{A_7^4}$.

5 Записать разложение бинома $(1-x)^6$.

1107 Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте:

1) 75 солдат и 6 офицеров; 2) 78 солдат и 5 офицеров?

1108 Сколько диагоналей имеет выпуклый:

1) семиугольник; 2) восьмиугольник?

1109 Найти значение выражения, предварительно его упростив:

1) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$; 2) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4$;

3) $C_7^0 + C_7^7 + C_7^1 + C_7^6 + C_7^2 + C_7^5 + C_7^3 + C_7^4$;

4) $C_6^0 + C_6^6 + C_6^1 + C_6^5 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^3$;

5) $C_{12}^2 + C_{12}^3 + C_{13}^4 + C_{14}^5$; 6) $C_9^3 + C_9^4 + C_{10}^5 + C_{11}^6$;

7) $C_{21}^7 - C_{20}^7$; 8) $C_{25}^9 - C_{24}^9$; 9) $C_{15}^{10} - C_{14}^9$; 10) $C_{13}^8 - C_{12}^7$.

1110 Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать:

1) две карты чёрной масти; 2) две карты червовой масти?

1111 Шифр в камере хранения состоит из двух букв, выбираемых из 10 гласных русского алфавита, и четырёхзначного числового кода (буквы и цифры в шифре могут повторяться; числовой код 0000 также возможен). Сколько различных шифров можно использовать в этой камере хранения?

1112 В некотором государстве автомобильный номер составляется из трёх различных букв алфавита, состоящего из 25 букв, и трёх цифр (с их возможными повторами). Скольким автомобилям можно присвоить получаемые таким образом номера?

1113 Записать разложение бинома:

1) $(3a + 1)^5$; 2) $(x + 3)^6$; 3) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^7$; 4) $\left(\frac{a}{3} - 1\right)^5$;

5) $(10x - 0{,}1)^6$; 6) $(0{,}1b - 10)^7$; 7) $\left(\frac{2}{a} + \frac{a}{2}\right)^7$; 8) $\left(\frac{2}{c} + \frac{c}{2}\right)^8$.

1114 Найти член разложения бинома:

1) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$, содержащий $x^{\frac{1}{3}}$;

2) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^{14}$, содержащий x^2;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^{16}$, содержащий, $x^{-\frac{13}{12}}$;

4) $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$, содержащий $x^{-0{,}6}$.

XII

глава

Элементы теории вероятностей

Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

§ 65 События

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Определение 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

Определение 2. **Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.**

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

Определение 3. **Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.**

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Предположим, что в результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходными* испытаниями).

Например:

1) в испытании с бросанием игрального кубика существует шесть элементарных исходов: выпадение числа 1, выпадение числа 2, ..., выпадение числа 6;

2) при бросании монеты существует два элементарных события: появление орла и появление решки;

3) при изъятии одного шара из коробки, в которой находятся два белых и один чёрный шар, существует три элементарных исхода: изъятие любого из двух белых шаров и изъятие чёрного шара;

4) при одном бросании канцелярской кнопки существуют два элементарных исхода испытания: падение кнопки с касанием острия поверхности, на которую она падает, и падение плашмя — без касания острия поверхности падения.

Рассмотренные в каждом из примеров события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого) и *единственно возможны* (обязательно произойдёт одно из них). Однако в первых трёх примерах элементарные события являются *равновозможными* (у каждого из них шансы появиться равны), а в четвёртом примере (для большинства реальных кнопок) шансы названных двух событий различны.

Заметим, что на практике равновозможность событий иногда удаётся определить из соображений симметрии.

Кроме элементарных событий, в теории вероятностей рассматриваются и более сложные события. Например, при бросании игрального кубика может быть рассмотрено событие A — появление чётного числа, которое «распадается» на 3 элементарных события (появление числа 2, 4 или 6).

Упражнения

1115 (Устно.) Каким событием (достоверным, невозможным или случайным) является событие:

1) изъятая из колоды одна карта оказалась семёркой треф;

2) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении медь оказалась в жидком состоянии;

3) при температуре 20 °C и нормальном атмосферном давлении вода оказалась в жидком состоянии;

4) наугад названное натуральное число оказалось больше нуля;

5) вынутый наудачу цветок из букета гвоздик оказался розой;

6) в результате броска игрального кубика появилось число 5?

1116 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания:

1) бросается на стол игральный кубик и определяется число очков, появившееся на верхней грани (грани, противоположной той, которая лежит на плоскости стола);

2) на поверхность стола бросается игральный тетраэдр (грани которого пронумерованы числами 1, 2, 3, 4) и определяется число на той грани, которая лежит на поверхности стола;

3) бросается на пол монета и определяется видимая сторона;

4) на пол роняют усечённый конус, выточенный из дерева, и определяют геометрическую фигуру, по которой упавший конус касается пола;

5) из всех карт одной масти (взятых из колоды с 36 листами) случайным образом выбирается одна карта и определяется изображение на ней;

6) из коробки, в которой лежат 5 шаров пяти различных цветов, извлекается один шар и называется его цвет.

Высказать предположение о том, являются ли перечисленные элементарные события равновозможными.

1117 (Устно.) Выяснить, являются ли события A и B несовместными, если:

1) A — появление туза, B — появление дамы в результате одного изъятия одной карты из колоды карт;
2) A — появление туза, B — появление карты бубновой масти в результате одного изъятия одной карты из колоды;
3) A — выпадение числа 6, B — выпадение чётного числа при одном бросании игральной кости;
4) A — выпадение числа 4, B — выпадение нечётного числа в результате одного броска игральной кости.

§ 66 Комбинации событий. Противоположное событие

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. ***Суммой (объединением)*** **событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).**

На рисунке 166 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A + B$.

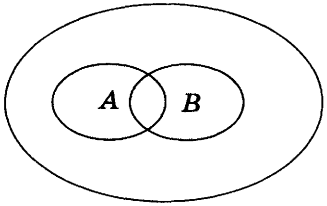

Рис. ***166***

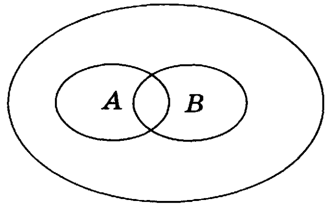

Рис. ***167***

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. ***Произведением*** **(*пересечением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).**

Рисунок 167 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB.

Ответ Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. События A и B называют *равными* (*равносильными*) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Рассмотрим события A и $\overline{A}$ (читается «а с чертой»), связанные с одним испытанием.

Определение 4. **Событие $\overline{A}$ называют *противоположным* событию A, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.**

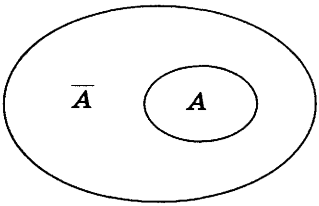

Рис. 168

Например, если событие A — выпадение чётного числа при бросании игральной кости, то $\overline{A}$ — выпадение нечётного числа; если A — попадание по мишени при одном выстреле, то $\overline{A}$ — непопадание (промах).

На рисунке 168 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\overline{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\overline{A}$ изображено закрашенной областью).

Задача 2 Пусть A и B — произвольные события. Записать с помощью введённых обозначений следующие события:

1) A_1 — произошли оба события;

2) A_2 — ни одно из двух событий A и B не произошло;

3) A_3 — произошло только событие A;

4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A и B;

5)* A_5 — произошло либо только событие A, либо только событие B.

▶ 1) $A_1 = AB$; 2) $A_2 = \overline{A}\,\overline{B}$;

3) $A_3 = A\overline{B}$; 4) $A_4 = A + B$;

5) $A_5 = A\overline{B} + \overline{A}B$. ◁

Упражнения

1118 (Устно.) Из колоды карт вынимается одна карта. Пусть событие A — изъятие из колоды карты с картинкой, B — изъятие карты червовой масти. Пояснить, в чём заключается событие $A + B$; AB.

1119 Двадцать карточек пронумерованы числами от 1 до 20. Произвольно из них выбирается одна карточка. Пусть событие A — на карточке записано число, кратное 4; событие B — на карточке записано число, кратное 6. Выяснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1120 (Устно.) Испытание состоит из двух выстрелов по мишени. Событие A — попадание по мишени при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле. Пояснить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1121 На стол бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало число 5, B — на второй кости выпало число, не меньшее пяти. Установить, в чём заключаются события $A + B$ и AB.

1122 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию:

1) при одном броске монеты выпала решка;

2) в результате броска игральной кости выпало число, равное двум;

3) в результате броска игральной кости выпало число, большее четырёх;

4) в результате броска игральной кости выпало число, не большее трёх;

5) из колоды карт изъята карта бубновой масти;

6) из колоды карт извлечена шестёрка;

7) хотя бы одна пуля попала в цель в испытании с тремя выстрелами по мишени;

8) хотя бы на одной из двух брошенных игральных костей появилось число 6;

9) в расписании уроков на понедельник первым уроком поставлена физика;

10) при сдаче экзамена студент получил оценку «отлично».

1123 Пусть C и D — произвольные события. Записать следующие события:

1) произошли оба данных события;

2) произошло только событие C;

3) произошло только событие D;

4) ни одно из данных событий не произошло;

5) произошло, по крайней мере, одно из данных двух событий;

6)* произошло только одно из данных событий.

§ 67 Вероятность события

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся $(n - m)$ исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n. \qquad (1)$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

а также

$$P(V) = 0, \; P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Бросают две монеты. Найти вероятность события A — хотя бы на одной монете выпал орёл.

▶ Обозначим появление орла на выпавшей монете буквой «О», а появление решки — буквой «Р». Тогда равновозможны следующие четыре ($n = 4$) элементарных исхода испытания: ОО, ОР, РО, РР (в каждой паре на первом месте записан результат появления орла или решки на первой монете, на втором месте — на второй монете). Событию A благоприятствуют первые 3 пары исходов ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Ответ $\frac{3}{4}$. ◁

Задача 3 Игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A — сумма выпавших очков не меньше 10.

▶ Результаты двух бросаний игральной кости — равновозможные упорядоченные пары чисел, выбираемых из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Согласно комбинаторному правилу произведения число таких пар равно $6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют следующие 6 пар: 4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 В ящике лежат 3 белых и 4 чёрных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — оба вынутых шара белого цвета; 2) B — вынуты шары разного цвета.

▶ Общее число возможных исходов испытания $n = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$.

1) Число благоприятствующих событию A исходов $m = C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2) Так как любой из 3 белых шаров может комбинироваться с любым из 4 чёрных шаров, то по правилу произведения существует $3 \cdot 4 = 12$ пар из белого и чёрного шаров, т. е. $m = 12$. Таким образом, $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

Ответ 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$. ◁

Упражнения

1124 (Устно.) Какова вероятность выпадения числа: 1) 2; 2) 5 в результате одного бросания игрального кубика?

1125 Какова вероятность того, что при изъятии одной карты из колоды в 36 листов игрок вынет: 1) даму треф; 2) короля пик; 3) валета красной масти; 4) семёрку чёрной масти; 5) шестёрку; 6) туза; 7) или даму, или валета; 8) или восьмёрку, или девятку; 9) или короля червовой масти, или даму любой масти; 10) или валета любой масти, или туза пик; 11) не короля треф; 12) не даму?

1126 Какова вероятность того, что на открытом наугад листе откидного календаря на январь окажется: 1) 21-е число; 2) 10-е число; 3) 31-е число; 4) 32-е число; 5) число, содержащее в своей записи цифру 0; 6) число, содержащее цифру 4; 7) число, содержащее хотя бы одну цифру 2; 8) число, содержащее хотя бы одну цифру 1?

1127 В коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) чёрный; 3) красный; 4) белый или чёрный; 5) белый или красный; 6) чёрный или красный; 7) или белый, или чёрный, или красный; 8) синий.

1128 В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых: 1) 4 выигрышных; 2) 5 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?

1129 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) на обеих костях выпали числа 6; 2) на обеих костях выпали числа 5; 3) на первой кости выпало число 2, а на второй число 3; 4) на первой кости выпало число 6, а на второй число 1; 5) на первой кости выпало чётное число, а на второй число 3; 6) на первой кости выпало число 2, а на второй нечётное число; 7) на первой кости выпало нечётное число, а на второй чётное число; 8) на первой кости выпало чётное число, а на второй кратное трём; 9) на первой кости выпало число, большее 2, а на второй число, не меньшее 4; 10) на первой кости выпало число, не большее 4, а на второй число, большее 4; 11) сумма выпавших чисел равна 3; 12) сумма выпавших чисел равна 4; 13) сумма выпавших чисел не больше 4; 14) сумма выпавших чисел не меньше 10; 15) произведение выпавших чисел равно 10; 16) произведение выпавших чисел равно 5; 17) произведение выпавших чисел равно 6; 18) произведение выпавших чисел равно 4.

1130 Среди 20 деталей, лежащих в ящике, 3 детали бракованные. Наугад вынимают 2 детали. Какова вероятность того, что: 1) обе детали оказались бракованными; 2) одна деталь бракованная, а другая нет; 3) обе детали не бракованные?

1131 Среди 15 лампочек 4 испорчены. Наугад берут 2 лампочки. Какова вероятность того, что: 1) обе выбранные лампочки испорчены; 2) одна лампочка исправная, а одна — испорченная; 3) обе лампочки исправные?

1132 Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) на каждой кости выпало число 3; 2) выпали одинаковые числа; 3) сумма чисел на всех костях равна 4; 4) произведение всех выпавших чисел равно 2?

1133 Из полного набора домино, не глядя, извлекают две костяшки. Найти вероятность того, что: 1) обе костяшки окажутся дублями; 2) на каждой из костяшек одна половинка будет «пустой».

§ 68 Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

● Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A + B$ будут благоприятствовать $k + l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n},\ P(B) = \frac{l}{n},\ P(A+B) = \frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

● События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Но $A + \overline{A} = U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A + \overline{A}) = P(U) = 1$, т. е. $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно,