что $P(C)=\frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

▶ Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A)=0{,}8$. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ — промах, его вероятность $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}8=0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Задача 3 В группе спортсменов 10 лыжников и 7 велосипедистов. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных из этой группы пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист?

▶ Пусть событие A — среди выбранных пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист, тогда событие $\overline{A}$ — среди выбранных спортсменов нет ни одного велосипедиста (т. е. все — лыжники). В данном случае вероятность события $\overline{A}$ найти проще, чем $P(A)$. Найдём $P(\overline{A})$.

Число всех способов выбрать из имеющихся 17 спортсменов пятерых равно числу сочетаний из 17 по 5, т. е. $n=C_{17}^5$. Благоприятствующими событию $\overline{A}$ будут все пятерки спортсменов, выбранных из 10 лыжников. Их число $m=C_{10}^5$. Таким образом,

$$P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^5}{C_{17}^5}=\frac{\frac{10!}{5!\cdot 5!}}{\frac{17!}{12!\cdot 5!}}=\frac{10!\cdot 12!}{5!\cdot 17!}=$$

$$=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}=\frac{9}{221}.$$

Теперь находим $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{9}{221}=\frac{212}{221}$.

Ответ $\frac{212}{221}$. ◁

Замечания. 1) Теорема, аналогичная теореме 1, верна для любого конкретного числа событий, т. е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n),$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события.

2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — все элементарные события некоторого испытания, то их совокупность называют *полем событий*. Очевидно, что эти события попарно несовместны и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, где U — достоверное событие.

$$P(U) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \text{ но } P(U) = 1,$$

поэтому

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Упражнения

1134 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо валет; 2) либо шестёрка, либо туз; 3) либо семёрка треф, либо карта бубновой масти; 4) либо туз красной масти, либо карта трефовой масти? Решить задачу двумя способами.

1135 В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.

1136 В папке находятся 15 билетов спортивной лотереи, 20 билетов художественной лотереи и 30 билетов денежно-вещевой лотереи. Найти вероятность того, что наугад вынутый из этой пачки один билет окажется билетом: 1) либо спортивной, либо денежно-вещевой лотереи; 2) либо спортивной, либо художественной лотереи; 3) либо художественной, либо денежно-вещевой лотереи. Решить задачу двумя способами.

1137 Найти вероятность того, что в результате одного бросания игральной кости выпадет число, отличное от 1.

1138 Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино одна кость окажется не дублем.

1139 Вероятность попадания мяча в корзину, брошенного один раз некоторым баскетболистом, равна 0,4. Найти вероятность того, что, бросив мяч в корзину, этот баскетболист промахнётся.

1140 Вероятность выигрыша по одному билету в некоторой лотерее равна 10^{-5}. Какова вероятность приобретения невыигрышного билета при покупке одного билета?

1141 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) чёрный шар.

1142 В коробке лежат 6 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) красный шар.

1143 Известно, что среди 100 деталей 5 бракованных. Наугад выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) хотя бы одна бракованная деталь; 2) хотя бы одна не бракованная деталь.

1144 В студенческой группе 24 человека, среди которых только 6 девушек. Случайным образом из числа всех студентов выбирают троих на профсоюзную конференцию. Найти вероятность того, что среди них окажется: 1) по крайней мере одна девушка; 2) по крайней мере один юноша.

§ 69 Независимые события. Умножение вероятностей

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$.

Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9} > \frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B. Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

● Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n=36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m=1$. Таким образом, $P(AB)=\frac{1}{36}=$ $=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Часто о независимости событий удается судить не на основании формулы (1), а на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких *независимых испытаний* (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей).

Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=0{,}2,\ P(B)=0{,}5,\ P(AB)=0{,}1;$

2) $P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{2}{3},\ P(AB)=\frac{2}{9}.$

▶ 1) Так как $P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1=P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}\neq\frac{2}{9}=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB) = \frac{1}{10}$. Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

▶ Пусть событие A — выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры, B — выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи $P(A) = 0{,}001 = 10^{-3}$, $P(B) = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Событие AB — выход из строя в течение суток обеих видеокамер. Считая события A и B независимыми, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ $5 \cdot 10^{-7}$. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

▶ Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P(\overline{A}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Ответ 0,94. ◁

Упражнения

1145 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{10}{13}$, $P(AB) = \frac{4}{13}$;

2) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}15$;

3) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$, $P(AB) = 0{,}6$;

4) $P(A) = \frac{3}{14}$, $P(B) = \frac{7}{12}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$.

1146 Наугад называется: 1) одно из первых двенадцати натуральных чисел; 2) одно из первых тринадцати натуральных чисел. Рассматриваются события: A — названное число является чётным, B — названное число кратно трём. Установить, являются ли события A и B независимыми.

1147 Бросаются две игральные кости и рассматриваются события: 1) A — на первой кости выпало число 6, B — на второй кости выпало чётное число; 2) A — на первой кости выпало нечётное число, B — на второй кости выпало число, кратное 3. Убедиться с помощью формулы (1) в независимости событий A и B.

1148 Вероятность выигрыша на некоторой бирже в течение каждого из двух фиксированных дней равна 0,3. Найти вероятность того, что на этой бирже: 1) выигрыши произойдут в каждый из этих двух дней; 2) два этих дня не будет выигрышей; 3) выигрыши произойдут хотя бы в один из двух фиксированных дней.

1149 Для сигнализации об угоне установлены два независимых датчика. Вероятность того, что при угоне сработает первый датчик, равна 0,97, что сработает второй, равна 0,95. Найти вероятность того, что при угоне: 1) сработают оба датчика; 2) оба датчика не сработают; 3) сработает хотя бы один из датчиков; 4) хотя бы один из датчиков не сработает.

1150 В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

1151 В первой коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара, а во второй — 5 белых и 9 чёрных. Не глядя из каждой коробки вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба вынутых шара белые; 2) оба вынутых шара чёрные; 3) хотя бы один шар белый; 4) хотя бы один шар чёрный.

1152 Вероятность того, что цель будет поражена хотя бы одним из двух выстрелов, равна 0,96. Полагая, что каждый раз вероятность поражения цели при одном выстреле одна и та же, найти эту вероятность.

1153 Вероятность P того, что при измерении прибором некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, постоянна. Вероятность того, что ошибка будет допущена этим прибором хотя бы один раз из двух измерений, равна $\frac{32}{81}$. Найти P.

1154 Вероятность попадания по мишени при одном выстреле некоторым стрелком равна 0,8. Найти вероятность попадания по мишени этим стрелком: 1) в каждом из трёх выстрелов; 2) хотя бы одним из трёх выстрелов.

1155 Имеются 3 партии деталей. Вероятность того, что вынутая из первой партии деталь окажется бракованной, равна 0,1. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из второй партии деталь, равна 0,2. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из третьей партии деталь, равна 0,3. Случайным образом из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) все 3 детали окажутся бракованными; 2) все 3 детали окажутся не бракованными; 3) хотя бы одна деталь окажется не бракованной; 4) хотя бы одна деталь окажется бракованной.

§ 70 Статистическая вероятность

Определение вероятности, сформулированное в § 67, называется *классическим определением вероятности*. Оно применяется, когда теоретически удаётся выявить все элементарные равновозможные исходы испытания и определить благоприятствующие исследуемому событию исходы. В этом случае число элементарных исходов испытания конечно и выражается конкретным числом. Однако на практике — при изучении случайных явлений в естествозна-

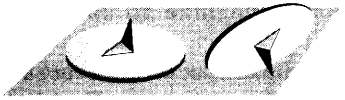

Рис. 169

нии, экономике, медицине, производстве — часто встречаются испытания, число возможных исходов которых необозримо велико. А в ряде случаев до проведения реальных испытаний трудно или невозможно установить равновозможность исходов испытания. Например, до многократного подбрасывания кнопки (рис. 169) трудно представить, равновозможны ли её падения «на плоскость» и «на остриё». Поэтому наряду с классическим на практике используется и так называемое *статистическое определение вероятности*. Для знакомства с ним требуется ввести понятие *относительной частоты*.

Определение 1. ***Относительной частотой*** **события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M, в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N. При этом число M называют** ***частотой*** **события A.**

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1 Во время стрельбы по мишени было сделано 25 выстрелов и зарегистрировано 15 попаданий. Какова относительная частота попадания по мишени в данной серии выстрелов?

▶ Событие A — попадание по мишени, произошло в 15 случаях, т. е. $M = 15$. Общее число испытаний (выстрелов) $N = 25$. По формуле (1) имеем $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ 0,6. ◁

Если проводить реальное испытание с подбрасыванием монеты и наблюдать за относительной частотой появления, например орла, в каждой серии испытаний, то можно заметить следующий факт: чем больше проводится испытаний, тем всё меньше относительная частота появления орла отличается от 0,5, т. е. от значения вероятности этого события в классическом понимании.

Этот факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24 000 аналогичных испытаний и наблюдал 12 012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $\frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005$.

Определение 2. ***Статистической вероятностью*** **называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.**

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний.

Проиллюстрируем ещё одним примером сформулированный закон больших чисел.

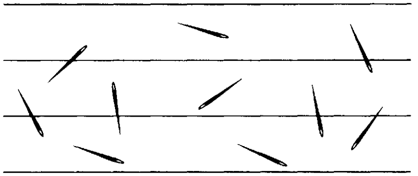

Рис. 170

На листе начерчены параллельные линии, расстояния между которыми равны длине некоторой иглы (рис. 170). Эта игла 100 раз бросается на расчерченный лист, и случаи её пересечения с любой из линий подсчитываются во втором столбце таблицы, где N — число бросаний, M — частота пересечения иглой линии, $\frac{M}{N}$ — относительная частота события в серии из N испытаний, подсчитанная с точностью до десятитысячных.

N	M	$W = \frac{M}{N}$
10	6	0,6
20	14	0,7
30	19	0,6333
40	26	0,65
50	33	0,66
60	40	0,6667
70	46	0,6571
80	54	0,675
90	59	0,6556
100	66	0,66

По результатам 100 бросков можно предположить, что значения дроби $\frac{M}{N}$ колеблются около числа $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$. Действительно ли вероятность рассматриваемого события равна $\frac{2}{3}$? При увеличении числа испытаний было обнаружено, что относительная частота этого события стабилизируется около числа, чуть меньшего, чем $\frac{2}{3}$. На основании понятия геометрической вероятности Бюффон доказал, что вероятность этого события равна $\frac{2}{\pi}$.

Упражнения

1156 В изготовленной партии из 10 000 деталей обнаружено: 1) 350; 2) 220 бракованных деталей. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной детали. Результат выразить в процентах.

1157 Заполнить последний столбец таблицы (с точностью до тысячных):

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Наблюдаемое событие	Частота события (M)	Относительная частота события $\left(W = \frac{M}{N}\right)$
1	Брошена монета	200	Выпала решка	98	
2	Брошен игральный кубик	300	Выпало число 4	53	
3	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	93	
4	Брошен игральный тетраэдр (с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4)	200	Выпало число 3	49	

1158 Проводились серии из N испытаний с подбрасыванием некоторой правильной треугольной призмы, сделанной из стали. Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	300	500	1000
Частота падения призмы на любую боковую грань (M)	8	34	73	206	353	698
Относительная частота падения призмы на боковую грань (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя результаты вычислений до сотых. Высказать предположение о приближённом значении (с точностью до одной десятой) вероятности события A — падение призмы на боковую грань.

1159 Провести серии из N испытаний (где $N_1 = 10$, $N_2 = 20$, $N_3 = 40$, $N_4 = 50$) с подбрасыванием игрального кубика, наблюдая за частотой появления числа 1. Убедиться в том, что относительная частота события A — появление числа 1 с увеличением N всё меньше отличается от числа $\frac{1}{6}$ (значения вероятности этого события в классическом понимании).

Упражнения к главе XII

1160 (Устно.) Перечислить все элементарные события, которые могут произойти в результате следующего испытания: 1) наугад называется день недели; 2) перекидной календарь на апрель месяц открывается наугад и читается записанное на листе число; 3) на пол роняется тонкий бутерброд и определяется — на какую сторону он упадёт; 4) бросают на пол 2 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 5) на пол бросают 3 монеты и наблюдают выпавшие стороны; 6) по мишени по одному разу стреляют 3 стрелка; наблюдается попадание (П) или непопадание (Н) по мишени каждым из них; 7) из пункта A пешеход может попасть в пункт C по одной из трёх дорог (на рисунке 171 дороги проходят либо по сторонам прямоугольника $ABCD$, либо по его диагонали AC); оцениваются длины маршрутов в каждом испытании. Высказать предположение о равновозможности перечисленных элементарных событий.

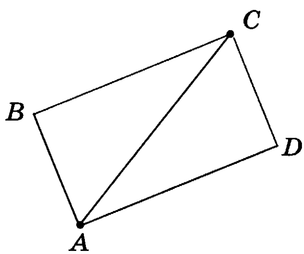

Рис. 171

1161 (Устно.) Назвать события $A + B$ и AB, если: 1) из полного набора домино извлекается одна костяшка, событие A — вынута костяшка «два — два», событие B — вынут дубль; 2) из колоды карт в 36 листов извлекается одна карта, событие A — вынута карта с картинкой; событие B — вынут король.

1162 Двенадцать карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 12. Случайным образом выбирается одна карточка. Рассматриваются события: 1) A — на карточке записан делитель числа 12, B — записано число, кратное 12; 2) A — на карточке делитель числа 6, B — на карточке число, кратное 6; 3) A — на карточке число, меньшее 10, B — на карточке число, большее 5; 4) A — на карточке число, большее 7, B — на карточке число, меньшее 9; 5) A — на карточке число, кратное 2, B — на карточке число, кратное 4; 6) A — на карточке число, кратное 3, B — на карточке число, кратное 6. Установить, в чём состоят события $A + B$ и AB.

1163 (Устно.) Установить событие, являющееся противоположным событию: 1) выпало число 4 в результате броска игрального тетраэдра; 2) выпало число, кратное 5, в результате броска игрального кубика; 3) хотя бы на одном из кубиков выпало чётное число в результате бросания двух игральных кубиков; 4) хотя бы на одном из двух брошенных игральных тетраэдров появилось число 1; 5) брошенная на шахматную доску шашка имеет с клеткой «f2» хотя бы одну общую точку; 6) брошенная на шахматную доску шашка легла на чёрную клетку.

1164 События A и B изображены с помощью кругов Эйлера (рис. 172). Большим кругом изображены все элементарные исходы испытания, с которым связаны события A и B. Перенести рисунок в тетрадь и штриховкой показать событие, состоящее в том, что: 1) произошли оба события A и B; 2) произошло или событие A, или событие B; 3) произошло только событие A; 4) произошло событие $\overline{B}$.

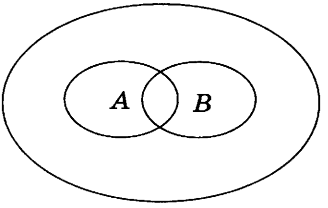

Рис. 172

1165 Брошена игральная кость. Найти вероятность события: 1) выпало число, не меньшее 2; 2) выпало число, меньшее 3; 3) выпало число, большее 4; 4) выпало число, не большее 5.

1166 В коробке находятся 2 белых, 5 чёрных и один синий шар. Наугад вынимают один из них. Найти вероятность события: 1) вынут белый шар; 2) вынут чёрный шар; 3) вынут синий шар; 4) вынут или белый, или чёрный шар; 5) вынут не чёрный шар; 6) вынут не белый шар.

1167 Из колоды карт в 36 листов наугад вынимается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта: 1) дама красной масти; 2) шестёрка чёрной масти; 3) семёрка; 4) девятка; 5) с картинкой; 6) не с картинкой; 7) или король, или шестёрка; 8) или семёрка, или туз червей; 9) не король бубен; 10) не валет.

1168 Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету в некоторой лотерее равна: 1) $2 \cdot 10^{-4}$; 2) $3 \cdot 10^{-5}$. Какова вероятность приобрести невыигрышный билет при покупке одного билета?

1169 Установить, являются ли события C и D независимыми, если: 1) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}4$, $P(AB) = 0{,}3$; 2) $P(A) = 10^{-3}$, $P(B) = 10^{-2}$, $P(AB) = 10^{-6}$.

1170 Наугад называется одно из первых: 1) девятнадцати; 2) двадцати натуральных чисел; рассматриваются события: A — названо число, кратное 4, B — названо число, кратное 5. Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

1171 Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания по мишени у первого стрелка равна 0,65, у второго равна 0,8. Найти вероятность того, что: 1) оба стрелка попадут по мишени; 2) хотя бы один из стрелков попадёт по мишени; 3) оба стрелка промахнутся; 4) хотя бы один промахнётся.

1172 Вероятность того, что лампочка в люстре перегорит в течение года, равна 0,3. Считая, что каждая из двух таких лампочек в люстре перегорает независимо от другой, найти вероятность события: 1) в течение года перегорят обе лампочки; 2) в течение года не перегорит ни одна из лампочек; 3) в течение года перегорит хотя бы одна лампочка; 4) в течение года не перегорит хотя бы одна лампочка.

1173 Заполнить последний столбец таблицы, округляя результаты вычислений с точностью до тысячных.

№ п/п	Испытание	Число испытаний	Наблюдаемое событие	Частота события	Относительная частота события
1	Брошены два игральных кубика	400	Сумма выпавших чисел равна 2	11	
2	Брошены два игральных кубика	200	Сумма выпавших чисел равна 3	11	
3	Спортсмен стреляет по мишени	300	Попадание по мишени	284	
4	Из колоды карт извлекается одна карта	200	Извлечён туз	23	

Проверь себя!

1 Наугад называется одно из первых восемнадцати чисел. Событие A — названо чётное число, событие B — названо число, кратное 3. Перечислить элементарные исходы испытания, благоприятствующие событию: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $\overline{A}$; 4) $\overline{B}$.

2 Брошены 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на первой кости выпало число 4, а на второй — нечётное число?

3 Вероятность попадания по цели при одном выстреле у первого орудия равна 0,6, у второго — 0,7. Найти вероятность того, что по цели попадёт хотя бы одно орудие после того, как оба сделают по одному выстрелу.

1174 С помощью штриховки (см. рис. 172) проиллюстрировать событие: 1) $\overline{A+B}$; 2) $\overline{AB}$, если большой круг на рисунке изображает все элементарные события испытания, с которым связаны события A и B (эти события проиллюстрированы малыми кругами).

1175 Бросают 3 монеты и определяют выпавшие стороны. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию: 1) хотя бы на одной монете появилась решка; 2) хотя бы на двух монетах появилась решка.

1176 Бросают 3 монеты и наблюдают за выпавшими сторонами. Перечислить все элементарные исходы, благоприятствующие событию $\overline{A}$, если событие A состоит в следующем: 1) только на одной монете появился орёл; 2) хотя бы на одной монете появился орёл.

1177 Бросают две игральные кости. Найти вероятность события: 1) произведение появившихся чисел равно 6; 2) произведение появившихся чисел равно 4; 3) сумма выпавших чисел равна 4; 4) сумма выпавших чисел равна 5; 5) сумма выпавших чисел больше 9; 6) сумма выпавших чисел не больше 5.

1178 В коробке лежат 5 белых и 6 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белого цвета; 2) оба шара чёрного цвета; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

1179 В коробке лежат 6 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) оба шара белые; 2) оба шара чёрные; 3) один шар белый, другой чёрный; 4) по крайней мере один шар белый; 5) по крайней мере один шар чёрный.

1180 В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что: 1) все шары белые; 2) все шары чёрные; 3) один шар белый и 2 чёрных; 4) один шар чёрный и 2 белых.

1181 Клавиатура компьютера имеет 105 клавиш. Найти вероятность того, что при случайном последовательном нажатии трёх клавиш будет написано слово: 1) *дом*; 2) *око*.

1182 В первом ящике находятся 8 белых и 9 чёрных шаров, во втором — 6 белых и 5 чёрных. Наугад из каждого ящика выбирают по одному шару. Найти вероятность того, что: 1) оба шара оказались белыми; 2) оба шара оказались чёрными; 3) из первого ящика извлекли белый шар, а из второго — чёрный; 4) из первого ящика извлекли чёрный, а из второго — белый шар; 5) хотя бы один шар оказался белым; 6) хотя бы один шар оказался чёрным.

1183 Два мальчика играют в игру *крестики-нолики* на поле 3×3. Первый случайным образом ставит в одну клетку крестик, второй случайным образом ставит нолик в одну из оставшихся 8 клеток. Найти вероятность того, что после этих ходов будут заняты заранее зафиксированные наблюдателем две клетки поля. Решить задачу двумя способами.

XIII

глава

Статистика

Цель математически оформленных теорий состоит не только в том, чтобы описать с помощью точных формул уже накопленные знания, но и в том, чтобы предсказать новые явления.

Б. В. Гнеденко

§ 71 Случайные величины

Статистика занимается сбором, представлением (в виде таблиц, диаграмм, графиков и др.) и анализом информации о различных случайных величинах.

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая.

Например, сумма чисел (очков), выпадающая при бросании двух игральных костей, — случайная величина. Обозначим её X, тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, ..., $X_{11} = 12$ — значения этой случайной величины. В таблице 1 указаны суммы выпавших чисел, а в таблице 2 показано распределение значений случайной величины X (суммы выпавших чисел) по их вероятностям P: каждой из сумм X_1, X_2, X_3, ..., X_{11} поставлена в соответствие вероятность, с которой она может появиться в результате одного испытания (одного бросания двух игральных костей).

Например, сумма $X_2 = 3$ появляется в двух благоприятствующих случаях ($1 + 2$ и $2 + 1$) из 36 возможных, поэтому $P_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Таблица 1

I кость / II кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для наглядности распределение значений случайной величины X, представленное в таблице 2, может быть изображено в виде, например, линейной или столбчатой диаграммы.

Заметим, что сумма вероятностей ΣP[1] всех значений величины X (записанных во второй строке таблицы 2) равна 1, как сумма вероятностей всех элементарных исходов испытания с нахождением суммы очков при одном бросании двух игральных костей (см. предыдущую главу).

Таблицы распределения значений случайной величины, аналогичные таблице 2, составляются по результатам теоретических расчётов вероятностей. На практике часто после проведения реальных испытаний составляются таблицы распределения значений случайных величин по частотам (или по относительным частотам), после чего для большей наглядности распределение данных представляют либо в виде диаграммы, либо в виде *полигона частот* (полигона относительных частот).

[1] Знак Σ, введённый Л. Эйлером, используется для записи суммы значений некоторой величины (в данном случае — суммы всех значений вероятности P).

Задача Имеются результаты 20 измерений диаметра d болта (в миллиметрах с точностью до 0,1):

10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8; 9,9; 10,0; 10,0; 10,2; 10,0;
10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,1; 10,0.

Представить эти данные с помощью: 1) таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W; 2) полигона частот.

▶ 1) Имеющиеся данные (значения случайной величины d) представим в виде таблицы 3 распределения по частотам и относительным частотам:

Таблица 3

d	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2
M	1	3	9	5	2
$W = \frac{M}{N}$	0,05	0,15	0,45	0,25	0,1

Отметим, что $\Sigma M = N = 20$, $\Sigma W = 1$.

2) На рисунке 173 представлено распределение значений d в виде полигона частот. ◁

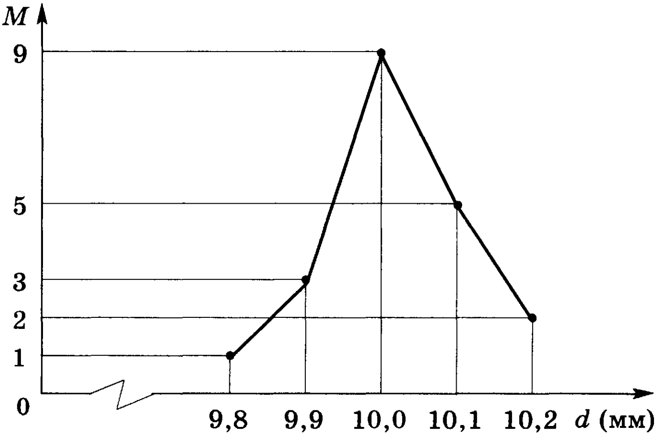

Рис. 173

* Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от лат. *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, а автобусы ходят с интервалом 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части (обычно — на равные) и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них.

Рассмотрим пример. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0; 1000]$. Тогда промежуток $[0; 1000]$ можно разделить к примеру на 5 одинаковых по длине промежутков и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занести в частотную таблицу 4:

Таблица 4

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Отметим, что $\Sigma M = N = 100$.

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 174).

Если основанием каждой ступени служит промежуток длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$, где M — частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равна $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь фигуры под гистограммой равна $\Sigma M = N$.

Если по данным таблицы 4 заполнить таблицу 5 относительных частот, то построенную на её основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 175).

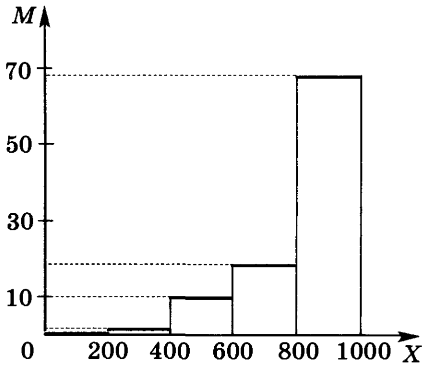

Рис. 174

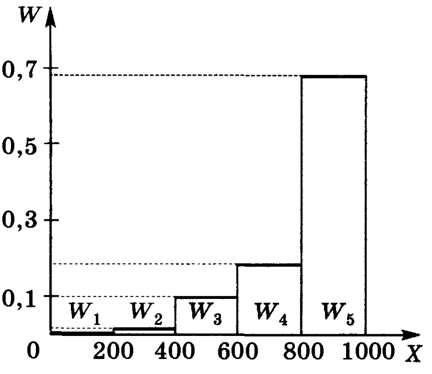

Рис. 175

Таблица 5

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой была равна соответствующему значению W. Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\Sigma W = 1$). *

Упражнения

1184 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании игрального кубика: 1) на двух гранях которого отмечены 3 очка, на одной — 4 очка, на трёх — 5 очков; 2) на одной грани которого отмечено 2 очка, на другой — 3 очка, на двух гранях — по 4 очка и на оставшихся двух — по 5 очков.

1185 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся при бросании двух игральных тетраэдров, грани которых пронумерованы натуральными числами от 1 до 4.

1186 На стол бросают обыкновенный игральный кубик и игральный октаэдр, грани которого пронумерованы числами от 1 до 8. Составить таблицу распределения значений случайной величины X — суммы выпавших чисел по их вероятностям P.

1187 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в выборке следующих телефонных номеров:
1) 3965184, 6542913, 7902914, 2878858;
2) 1316573, 4336582, 2983412, 3941009.

1188 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

1)

X	5	6	7	8	9
M	2	3	6	4	1

2)

X	12	13	14	15	16	17
M	4	5	7	6	4	3

1189 В таблице записаны результаты 20 взвешиваний (с точностью до 1 г) одной и той же стальной отливки:

99	97	101	100	99	102	100	102	98	101
100	98	100	98	101	97	101	100	100	99

Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины X — результата определения массы стальной отливки.

1190 Составить таблицы распределения по частотам (M) и относительным частотам (W), а также полигон частот значений случайной величины Y — ростов 30 девушек спортивной секции гимнастики, приведённых (с точностью до 1 см) в таблице:

160	163	161	162	165	163	166	159	164	165
163	159	164	158	164	162	165	163	166	162
162	164	161	165	163	164	161	166	160	163

1191 Сроки службы T приборов некоторого вида (в часах) попадают в промежуток [0; 2500]. Результаты проверки сроков работы 200 приборов этого вида отражены в частотной таблице:

T	[0; 500)	[500; 1000)	[1000; 1500)	[1500; 2000)	[2000; 2500]
M	5	10	15	20	150

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы частот.

1192 Значения роста H у 100 жителей дома (в сантиметрах) попадают в промежуток [50; 190]. Распределение значений непрерывной случайной величины H отражено в частотной таблице:

H	[50; 70)	[70; 90)	[90; 110)	[110; 130)	[130; 150)	[150; 170)	[170; 190]
M	5	8	10	12	15	30	20

Проиллюстрировать распределение этих данных с помощью гистограммы относительных частот.

§ 72 Центральные тенденции

Однотипные объекты можно сравнивать по общим параметрам, присущим этим объектам. Например, российские монеты можно сравнивать по номиналу, весу, диаметру; юношей одного класса можно сравнивать по возрасту, весу, росту и др. Каждый из названных параметров может принимать определённые числовые значения.

В статистике исследуют различные совокупности данных — числовых значений случайных величин с учётом частот, с которыми они встречаются в совокупности. При этом совокупность всех данных называют *генеральной совокупностью*, а любую выбранную из неё часть — *выборкой*. В статистических исследованиях выборку называют *репрезентативной* (от фр. *representative* — представительный), если в ней присутствуют те и только те значения случайной величины, что и в генеральной совокупности, причём частоты имеющихся в ней данных находятся практически в тех же отношениях, что и в генеральной совокупности.

Рассмотрим пример. Пусть некоторая случайная величина X имеет распределение своих значений по частотам M, представленное в таблице 6,

Таблица 6

X	–1	2	6	8
M	200	500	700	300

и пусть совокупность всех значений этой величины принята за генеральную совокупность. Тогда выборку из этой совокупности, распределение которой представлено в таблице 7, следует считать репрезентативной, так как $200 : 500 : 700 : 300 = 2 : 5 : 7 : 3$ и в выборке присутствуют те и только те значения X, которые присутствуют в генеральной совокупности. Выборки же, представленные в таблицах 8 и 9, не являются репрезентативными.

Таблица 7

X	–1	2	6	8
M	2	5	7	3

Таблица 8

X	–1	2	8
M	2	5	3

Таблица 9

X	–1	2	6	8
M	2	9	7	3

Совокупность данных иногда бывает полезно охарактеризовать (оценить) одним числом — *мерой центральной тенденции* числовых значений её элементов. К таким характеристикам относятся мода, медиана и среднее.

Мода (обозначают Mo) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды: $Mo_1 = 2$, $Mo_2 = 8$.

Медиана (обозначают Me) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна серединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух серединных чисел.

Задача 1 Найти медиану выборки значений случайной величины: 1) 5, 9, 1, 4, 5, –2, 0; 2) 7, 4, 2, 3, 6, 1.

▶ 1) Расположим элементы выборки в порядке возрастания: –2, 0, 1, 4, 5, 5, 9. Количество данных нечётно. Слева и справа от числа 4 находятся по 3 элемента, т. е. 4 — серединное число выборки, поэтому $Me = 4$.

2) Упорядочим элементы выборки: 1, 2, 3, 4, 6, 7. Количество данных чётно. Серединные данные выборки: 3 и 4, поэтому $Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Ответ 1) 4; 2) 3,5. ◁

Среднее (или *среднее арифметическое*) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины X, то её среднее обозначают $\overline{X}$.

Задача 2 Найти среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице 10.

Таблица 10

X	2	3	4	8	10
M	1	2	3	1	1

▶ $$\overline{X} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 8\cdot 1 + 10\cdot 1}{1+2+3+1+1} = \frac{2+6+12+8+10}{8} =$$
$$= \frac{38}{8} = 4{,}75.$$

Ответ 4,75. ◁

* Одной из наиболее распространённых характеристик выборки значений случайной величины, чьё распределение по вероятностям известно, является так называемое *математическое ожидание*.

Пусть распределение по вероятностям P значений некоторой случайной величины X задано таблицей 11.

Таблица 11

X	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Тогда число E, где

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + \ldots + X_{n-1}P_{n-1} + X_nP_n, \quad (1)$$

называют *математическим ожиданием* (или *средним значением*) случайной величины X.

Например, для случайной величины X — суммы чисел, выпавших при бросании двух игральных кубиков (её распределение представлено в таблице 2), можно найти её математическое ожидание:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} +$$

$$+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot 252 = 7.$$

Понятие математического ожидания широко используется в теории игр.

Рассмотрим пример. Предположим, что в некоторой игре с двумя игроками первый игрок может выиграть X_1, X_2, ..., X_k рублей (среди чисел X_1, X_2, ..., X_k могут быть отрицательные и 0, а суммарный выигрыш обоих игроков всегда равен 0). При этом вероятность того, что первый игрок выиграет X_i рублей, равна P_i. Тогда средний выигрыш первого игрока будет равен $E = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_kP_k$. Игра называется *справедливой*, если $E = 0$, т. е. если $X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_kP_k = 0$. Игра называется *выгодной* (не выгодной) для первого игрока, если $E > 0$ ($E < 0$). *

Упражнения

1193 (Устно.) Распределение в генеральной совокупности значений случайной величины X отражено в таблице:

X	5	7	9	11	12
M	25	60	80	45	15

Установить выборку, являющуюся репрезентативной для заданной генеральной совокупности:

1)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	5

2)

X	5	7	11	12
M	5	12	9	3

3)

X	5	7	9	11	12
M	5	12	16	9	3

4)

X	5	7	8	9	11	12
M	5	12	14	16	9	3

1194 Найти моду выборки:

1) 4, 15, 6, 7, 3, 6, 8; 2) 18, 9, 5, 3, 7, 9, 1;
3) 1, 3, 5, 1, 4, 3, 2; 4) 6, 8, 5, 4, 8, 3, 6.

1195 Найти медиану выборки:

1) 17, 12, 34, 18, 6; 2) 24, 15, 13, 20, 21;
3) 4, 1, 8, 9, 13, 10; 4) 15, 6, 12, 8, 9, 14.

1196 Найти среднее значение выборки:

1) 24, –5, 13, –8; 2) 7, 16, –9, –2, 10;
3) 0,3, 0,8, 0,2, 0,5, 0,8, 0,2;
4) 1,3, 1,4, 1,3, 0,9, 0,9, 1,4.

1197 Найти моду, медиану и среднее выборки:

1) 3, –2, 1, 0, 2, –1; 2) 7, 4, –1, 3, –3, 0.

1198 Найти среднее арифметическое выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	–2	0	1	3
M	5	6	7	2

2)

X	–1	2	3
M	4	5	2

3)

X	–1	4	6
M	5	1	2

4)

X	–3	2	3	4
Y	4	3	2	1

1199 Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X:

1)

X	–3	–1	0	5
M	2	3	5	2

2)

X	–2	–1	0	1	3
M	1	3	2	4	1

1200 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	–3	–1	1	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2)

X	–1	0	1	2	3
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

§ 73 Меры разброса

Не каждую выборку имеет смысл оценивать с помощью центральных тенденций. Например, если исследуется выборка

$$80,\ 80,\ 320,\ 4600 \qquad (1)$$

годовых доходов (в тысячах рублей) четверых человек, то очевидно, что ни мода (80), ни медиана (200), ни среднее (1270) не могут выступать в роли единой объективной характеристики данной выборки. Это объясняется тем, что наименьшие значения выборки (1) существенно отличаются от наибольшего — разность наибольшего и наименьшего значений соизмерима с наибольшим значением.

Определение 1. Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её *размахом* и обозначается R.

Так, для выборки (1) размах $R = 4600 - 80 = 4520$. Размах показывает, как велик разброс значений случайной величины в выборке. Однако, зная только размах выборки, невозможно охарактеризовать отличие её элементов друг от друга, отличие каждого элемента от среднего значения. Возникает вопрос: как сравнить, например, две выборки, имеющие одинаковые размахи и одинаковые средние значения? Рассмотрим реальную ситуацию на примере.

На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице 12.

Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день)}.$$

Таблица 12

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковые (50 и 50). Кого же из этих рабочих предпочтительнее взять на работу? В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать *стабильность* производительности труда рабочего. Её можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

Определение 2. ***Отклонением от среднего*** **называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением выборки.**

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\overline{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего будет равно $X_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений выборки от среднего значения равна нулю.* Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего.*

Из предложенной ниже таблицы 13 видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma\,(X - \overline{X})^2 < \Sigma\,(Y - \overline{Y})^2.$$

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то

Таблица 13

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\overline{X} = \overline{Y} = 50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	$(X - \overline{X})^2$	$(Y - \overline{Y})^2$
Понедельник	48	50	−2	0	4	0
Вторник	54	40	4	−10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	52	61	2	11	4	121
Пятница	46	44	−4	−6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

навёрстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтёт взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и производили в среднем за день одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического квадратов отклонений.*

Такая величина называется *дисперсией* (от лат. *dispersio* — рассеяние) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}. \quad (1)$$

Задача 1 Два токаря вытачивали одинаковые детали, причём первый трудился полную рабочую неделю, а второй по распоряжению начальника — 4 дня. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице 14. Сравнить стабильность работы токарей.

▶ Найдём средние значения выборок данных величин X и Y:

$$\overline{X} = \frac{53 + 54 + 49 + 48 + 46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\overline{Y} = \frac{52 + 46 + 53 + 49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, $\overline{X} = \overline{Y}$.

Таблица 14

День недели	Дневная выработка	
	первого токаря (X)	второго токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

С помощью таблицы 15 найдём суммы квадратов отклонений от средних всех значений величин X и Y.

Таблица 15

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X - 50$	$Y - 50$	$(X - 50)^2$	$(Y - 50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	–4	16	16
Среда	49	53	–1	3	1	9
Четверг	48	49	–2	–1	4	1
Пятница	46	—	–4	—	16	—
				Сумма:	46	30

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2, \text{ а } D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5, \text{ т. е. } D_X > D_Y.$$

Ответ Второй токарь работает стабильнее первого. ◁

Если значения X_1, X_2, ..., X_k случайной величины X повторяются с частотами M_1, M_2, ..., M_k соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 M_1 + (X_2 - \overline{X})^2 M_2 + \ldots + (X_k - \overline{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}, \quad (1)$$

где $\overline{X} = \dfrac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}$.

Используя знак суммы Σ, формулу (1) можно записать компактнее:

$$D = \frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2 M\right)}{\Sigma M}, \text{ где } \overline{X} = \frac{\Sigma(XM)}{\Sigma M}.$$

Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда её среднее значение $\overline{X}$ и отклонение от среднего $X - \overline{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (в сантиметрах). Квадрат же отклонения $(X - \overline{X})^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (в квадратных сантиметрах).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и сама величина X. С этой целью используют значения корня квадратного из дисперсии $\sqrt{D}$.

Определение. Корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратичным отклонением* и обозначают σ, т. е. $\sigma = \sqrt{D}$.

Задача 2 Распределение по частотам значений величины X — числа забитых голов игроками футбольной команды за период соревнований показано в таблице 16. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения числа всех забитых голов.

Таблица 16

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

▶ Результаты последовательных вычислений будем заносить в таблицу 17, при этом:

$$\Sigma M = 10,\ \overline{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$$

Таблица 17

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X - \overline{X}$	−1,1	−0,1	0,9	1,9
$(X - \overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X - \overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$D = \frac{\sum\left((X-\overline{X})^2 \cdot M\right)}{\sum M} = \frac{4{,}84 + 0{,}02 + 2{,}43 + 3{,}61}{10} =$$

$$= \frac{10{,}9}{10} = 1{,}09,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04.$$

Ответ $\sigma \approx 1{,}04.$ ◁

Задача 3 Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) ставить по рабочим дням торговую палатку. В первую очередь его интересует объём продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провёл исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения значений величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

▶ Очевидно, в январе было 22 рабочих дня ($\Sigma M_A = 22$), а в феврале было 20 рабочих дней ($\Sigma M_B = 20$). Найдём величины среднесуточных продаж обуви в точках A и B:

$$\overline{X}_A = \frac{\sum(X_A \cdot M_A)}{\sum M_A} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 7 + 3\cdot 7 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2}{22} =$$

$$= \frac{63}{22} \approx 2{,}86;$$

$$\overline{X}_B = \frac{\sum(X_B \cdot M_B)}{\sum M_B} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 5 + 6\cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{57}{20} = 2{,}85.$$

Среднее значение суточных продаж оказалось практически одинаковым (примем $\overline{X}_A = \overline{X}_B = \overline{X} = 2{,}9$), значит, предпочтение следует отдать точке с более стабильной торговлей. Для этого нужно сравнить средние квадратичные отклонения совокупностей значений X_A и X_B. Результаты вычислений будем заносить в таблицы:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2
$X_A - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	2,1
$(X_A - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A$	7,22	5,67	0,07	4,84	8,82

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1
$X_B - \overline{X}$	−1,9	−0,9	0,1	1,1	3,1
$(X_B - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	9,61
$(X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B$	10,83	4,05	0,06	6,05	9,61

$$D_A = \frac{\Sigma\left((X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A\right)}{\Sigma M_A} = \frac{7{,}22 + 5{,}67 + 0{,}07 + 4{,}84 + 8{,}82}{22} =$$

$$= \frac{26{,}62}{22} = 1{,}21 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \text{ (пар)};$$

$$D_B = \frac{\Sigma\left((X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B\right)}{\Sigma M_B} = \frac{10{,}83 + 4{,}05 + 0{,}06 + 6{,}05 + 9{,}61}{20} =$$

$$= \frac{30{,}6}{20} = 1{,}53 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}53} \approx 1{,}24 \text{ (пар)}.$$

Так как $\sigma_A < \sigma_B$, то точка A предпочтительнее для организации в ней торговли, чем точка B. ◁

Замечание. Дисперсию и среднее квадратичное отклонение в статистике называют также *мерами рассеивания* значений случайной величины около среднего значения.

Упражнения

1201 Найти размах выборки:

1) 15, −7, 13, −6, 8, 2, 1, −8, −2;
2) 21, 12, −1, 7, −3, 20, 14, 0, 1.

1202 Найти дисперсию выборки:

1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см; 2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с; 4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

1203 Найти дисперсию совокупности значений случайной величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	–1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

1204 Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения элементов выборки:
1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

1205 Сравнить дисперсии двух выборок, имеющих одинаковые средние значения:
1) 6, 10, 7, 8, 9 и 8, 9, 5, 10;
2) 5, 12, 7, 8, 18 и 17, 6, 11, 7, 9, 10.

1206 Найти среднее квадратичное отклонение величины X, заданной частотным распределением:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	–5	–2	2	3
M	2	3	4	2

1207 Сравнить дисперсии выборок, имеющих разные средние значения:
1) 4, 6, 8, 9, 8 и 6, 8, 10, 12, 9;
2) 6, 3, 4, 8, 9 и 2, 6, 3, 7, 5, 7.

1208 Двух футболистов, участвующих в играх пяти сезонов и забивших одинаковое количество голов (см. таблицу), сравнить по стабильности результатов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5
Число голов, забитых 1-м футболистом	18	23	19	17	23
Число голов, забитых 2-м футболистом	19	16	22	23	20

1209 Двух футболистов, один из которых участвовал в пяти игровых сезонах, а другой — в шести (см. таблицу), сравнить по стабильности в забивании голов.

Условный номер сезона	1	2	3	4	5	6
Число голов, забитых 1-м футболистом	17	21	20	16	15	19
Число голов, забитых 2-м футболистом	—	17	20	18	21	14

Упражнения к главе XIII

1210 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившихся при бросании кубика: 1) на одной грани которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 2) на двух гранях которого отмечено одно очко, а на остальных — 2 очка; 3) на одной грани которого отмечено одно очко, на двух — 2 очка, на остальных — 3 очка; 4) на одной грани которого отмечено одно очко, на другой — 2 очка, на двух — 3 очка, на остальных — 4 очка.

1211 Имеются две монеты, у которых на одной из сторон записано число 1, а на другой — число 2. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины Y — суммы чисел, появившихся при бросании этих монет.

1212 Дан набор случайно названных двузначных чисел:
1) 27, 31, 49, 25, 74, 99, 30, 12, 22, 58;
2) 19, 46, 54, 28, 67, 88, 37, 92, 71, 33.

Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в наборе.

1213 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины Z, распределение которых представлено в таблице:

1)

Z	3	4	5	6	7	8
M	1	3	4	5	3	2

2)

Z	10	11	12	13	14
M	4	6	9	7	3

Найти размах, моду, медиану и среднее выборки **(1214—1217)**:

1214 1) 1, 5, 5, 8, 10;
2) 3, 10, 12, 12, 18;

1215 1) –8, –8, –5, –5, 0, 2;
2) –4, –4, 0, 2, 9, 9;

1216 1) –1, 12, –6, –7, 13, –2, 10, –2, –9;
2) 4, –10, 13, 8, –6, –3, –1, 13, –6;

1217 1) –5, –15, 12, –7, 8, 13, –1, –7;
2) 16, –2, –8, 10, 14, –6, –2, 11.

1218 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение выборки:

1) 3, 8, 5, 6; 2) 4, 7, 3, 9;

3) 4, 1, 3, 2, 2; 4) 3, 2, 1, 1, 5;

5) 2, –1, 3, –2, 5; 6) –2, 4, –3, –1, 6.

Проверь себя!

1 **На стол бросают монету (на одной из сторон которой записано число 1, на другой — число 2) и игральный кубик (грани которого пронумерованы числами от 1 до 6). Составить вероятностную таблицу распределения значений случайной величины X — суммы чисел, появившихся на монете и на кубике.**

2 **Найти размах, моду, медиану и среднее выборки: –5, 6, 3, 8, 3, –2, –4, 0, 3, –2.**

3 **Найти дисперсию выборки: –2, 3, 1, 0, 4.**

1219 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам M задано таблицей:

1)

X	–1	0	1	3	5	6
M	2	3	4	1	1	1

2)

X	–2	–1	0	2	3	4
M	1	2	4	4	1	1

1220 Рост каждой из 50 гимнасток одного спортивного клуба занесён в таблицу:

148	148	149	149	149	149	149	149	149	149
149	150	150	150	150	150	150	150	150	150
150	151	151	151	151	151	151	151	151	152
152	152	152	152	152	152	152	152	153	153
153	153	153	153	153	153	154	154	154	154

По имеющимся данным составить таблицу распределения значений случайной величины X — роста гимнасток клуба: 1) по частотам (M); 2) по относительным частотам (W). Построить полигон относительных частот значений величины X.

1221 Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение значений случайной величины Z, заданных распределением по частотам M:

1)

Z	–2	–1	1	3
M	2	1	3	1

2)

Z	–4	–1	2	3
M	1	2	3	1

1222 Сравнить дисперсии выборок:
1) 2, 3, 5, 3, 7 и 4, 7, 5, 6; 2) –1, 3, 4 и –2, 0, 2, 4, 5.

1223 Сравнить стабильность производительности труда двух рабочих, первый из которых работал 5 дней, а второй — 6 дней, при этом они имели одинаковую среднюю производительность:

1)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда I рабочего (дет. / день)	8	11	9	12	10	—
Производительность труда II рабочего (дет. / день)	8	12	11	8	12	9

2)

Порядковый номер дня недели	1	2	3	4	5	6
Производительность труда I рабочего (дет. / день)	9	—	11	10	11	9
Производительность труда II рабочего (дет. / день)	9	10	11	11	10	9

1224 Были произведены замеры десяти диаметров d оснований цилиндров в партии стальных заготовок. Замеры производились дважды — двумя различными измерительными приборами. Результаты измерений (с точностью до 1 мм) первым прибором представлены в таблице слева, а вторым прибором — в таблице справа.

d_1	58	59	60	61	62
M_1	1	2	4	2	1

d_2	59	60	61	62
M_2	2	5	2	1

Сравнить дисперсии значений случайных величин d_1 и d_2.

1225 Среди трёх совокупностей, представленных таблицами распределения, выявить ту совокупность, значения которой имеют меньший разброс данных около своего среднего.

X	1	2	4	5
M	2	1	3	2

Y	–2	0	1	2	3
M	2	3	2	2	1

Z	–5	–4	–2	3
M	1	3	3	1

1226 Массы m пятидесяти детей до года, стоящих на учёте в некоторой районной поликлинике, попадают в промежуток [2; 12]. Распределение значений случайной величины m представлено в частотной таблице:

m	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
M	2	3	13	26	6

Построить гистограмму распределения значений величины m.

1227 Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

1)

X	–3	0	1	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	–2	–1	1	2	4
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Приложение

Множества

1. Множество и его элементы.

Буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

Если x — элемент множества A, то пишут $x \in A$, а если x не является элементом множества A, то пишут $x \notin A$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством множества* B. В этом случае говорят также, что A содержится в B или что B содержит A.

Например, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Иначе говоря, множества A и B *равны*, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Для удобства вводится понятие *пустого* множества (его обозначают $\varnothing$), которое по определению не содержит элементов и содержится в любом множестве.

Числовые промежутки можно записывать как с помощью неравенств, так и с помощью символики, используемой для обозначения отрезков, лучей, интервалов и др. Один и тот же промежуток обозначают, например, так:

1) $x \leqslant 2$ и $(-\infty; 2]$; 2) $x > -3$ и $(-3; +\infty)$; 3) $-1 < x \leqslant 5$ и $(-1; 5]$.

2. Операции над множествами.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается $A \cup B$ или $A + B$.

Например, если $A = [1;\ 4]$, $B = [2;\ 7)$, то $A \cup B = [1;\ 7)$.

Множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $A \cap B$ или AB. Если $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Например, если $A = [2;\ 6)$, $B = (3;\ 8]$, то $A \cap B = (3;\ 6)$, а если $A = [1;\ 5]$, $B = (6;\ 9)$, то $A \cap B = \varnothing$.

Множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается $A \backslash B$.

Например, если $A = [1;\ 5]$, $B = (2;\ 4]$, то $A \backslash B = [1;\ 2] \cup (4;\ 5]$.

Элементы математической логики

1. Высказывание. Отрицание высказывания.

Любое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*, называется *высказыванием*. Сами высказывания будем записывать в фигурных скобках. Например, высказывание $A \equiv$ {число 1352 делится на 4} — истинное высказывание, а высказывание $B \equiv$ {число 2 — единственный корень уравнения $x^2 = 4$} — ложное высказывание.

Из каждого высказывания A можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что высказывание A не имеет места (не выполняется). Такое высказывание (его называют *отрицанием* высказывания A и обозначают $\overline{A}$), является либо истинным, либо ложным. Из двух высказываний A и $\overline{A}$ одно является истинным, а другое — ложным.

Например, если $A \equiv$ {число 132 делится на 3} — истинное высказывание, то $\overline{A} \equiv$ {число 132 не делится на 3} — ложное высказывание.

Пусть $A \equiv$ {во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке}, тогда $\overline{A} \equiv$ {не во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной то́чке} $\equiv$ {найдётся треугольник, в котором три медианы не пересекаются в одной точке}.

Вообще, если высказывание A начинается со слов «все», «каждый», «любой», то для получения $\overline{A}$ надо либо, ничего не меняя, поставить отрицание «не» перед этими словами, либо заменить эти слова на «найдётся», «существует», а утверждение (свойство), которое стоит после этих слов, заменить его отрицанием.

2. Прямая и обратная теоремы. Необходимые и достаточные условия. Противоположные теоремы.

1) Формулировка каждой теоремы содержит её условие и заключение. Поменяв местами в формулировке некоторой теоремы условие и заключение, получим формулировку теоремы, *обратной данной*.

Например, теорема Пифагора утверждает, что если в треугольнике ABC угол C прямой, то $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. квадрат стороны, лежащий против угла C (гипотенузы), равен сумме квадратов двух других сторон (катетов). Теорему, обратную теореме Пифагора, можно сформулировать так: если в треугольнике ABC длины сторон a, b, c связаны равенством $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник является прямоугольным, а угол C — прямым. Эта теорема верна, и для её доказательства можно воспользоваться теоремой косинусов.

2) Пусть A — некоторое высказывание. Тогда всякое высказывание B, из которого следует A, называется *достаточным условием* для A, а всякое высказывание C, которое следует из A, называется *необходимым условием* для A. В этих случаях пишут $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow C$.

Например, если $A \equiv \{$натуральное число n делится на 4$\}$, $C \equiv \{$последняя цифра числа n чётная$\}$, то $A \Rightarrow C$.

3) Если высказывания M и N таковы, что каждое из них следует из другого ($M \Rightarrow N$, $N \Rightarrow M$), то говорят, что каждое из этих высказываний является *необходимым и достаточным условием* другого, и пишут $M \Leftrightarrow N$.

Это утверждение выражают так:

а) для справедливости M необходимо и достаточно, чтобы имело место N;

б) M имеет место в том и только в том случае, если выполняется N;

в) M справедливо тогда и только тогда, когда выполняется N.

Например, если $M \equiv \{$квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}\}$, $N \equiv \{D = b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0\}$, то $M \Leftrightarrow N$.

Если в некоторой теореме заменить её условие и заключение их отрицанием, то получится формулировка теоремы, *противоположной* данной.

Например, справедлива теорема: если многоугольник Q является четырёхугольником, то сумма его внутренних углов равна 2π.

Противоположную теорему можно сформулировать так: если многоугольник Q не является четырёхугольником, то сумма его внутренних углов не равна 2π. Эта теорема верна.

Можно показать, что исходная теорема и теорема, противоположная обратной к исходной, либо обе верны, либо обе не верны. Этот факт лежит в основе так называемого метода доказательства *от противного*.

Например, если $A \equiv \{$квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}\}$, $B \equiv \{D = b^2 - 4ac < 0\}$, то $A \Rightarrow B$. Действительно, если предположить, что $D \geqslant 0$, то $y = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$, где x_1, x_2 — нули функции $y = ax^2 + bx + c$, а это противоречит A. Следовательно, $D < 0$, т. е. справедливо утверждение B.

Предел последовательности

1. Понятие предела последовательности.

Если каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*; её обозначают $\{x_n\}$ или (x_n); число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n называют *номером* члена x_n.

Например, арифметическая и геометрическая прогрессии — последовательности, n-е члены (a_n и b_n) которых задаются соответственно формулами $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$, где d — разность арифметической прогрессии, и $b_n = b_1 q^{n-1}$, где q — знаменатель геометрической прогрессии, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число c_1 такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $c_1 \leqslant x_n$, и *ограниченной сверху*, если существует число c_2 такое, что $x_n \leqslant c_2$ для всех $n \in N$. Если для всех $n \in N$ справедливо неравенство

$$c_1 \leqslant x_n \leqslant c_2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые числа, то говорят, что $\{x_n\}$ — *ограниченная последовательность.*

Например, последовательность $\{\sin 5n\}$ ограничена, так как $|\sin 5n| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant \sin 5n \leqslant 1$.

Предваряя определение предела последовательности, рассмотрим две числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2^n}.$$

Выпишем несколько первых членов каждой последовательности:

$$\{x_n\}\colon\ 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{9}{8},\ \frac{8}{9},\ \ldots;$$

$$\{y_n\}\colon\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \ldots.$$

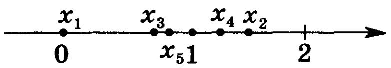

Рис. 176

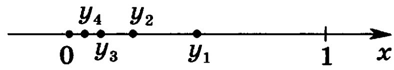

Рис. 177

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 176, 177).

Заметим, что члены последовательности $\{x_n\}$ как бы «сгущаются» около точки 1 (см. рис. 176), располагаясь правее точки 1 при чётных n и левее точки 1 при нечётных n. С увеличением n расстояние от точки x_n до точки 1 уменьшается (стремится к нулю). Поэтому число 1 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

Аналогично члены последовательности $\{y_n\}$ с ростом n «приближаются» к точке 0 (см. рис. 177), и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0.$$

Сформулируем определение предела последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a — предел последовательности, то пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание. Запись N_ε указывает на то, что номер, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n - a| < \varepsilon$, зависит, вообще говоря, от ε.

Если $x_n = a$ для всех $n \in N$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся.*

Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является её пределом.

Обратимся ещё раз к определению предела последовательности. Согласно определению число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, которое можно записать в виде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

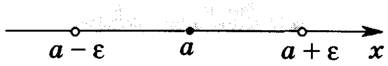

Рис. 178

Другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Этот интервал называют *ε-окрестностью* точки a (рис. 178) и обозначают $U_\varepsilon(a)$.

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдётся номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат ε-окрестности точки a, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

Задача 1 С помощью определения предела последовательности доказать, что: а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$; в) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

▶ а) Если $x_n = \frac{n+1}{n}$, то $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, откуда $|x_n - 1| < \frac{1}{n}$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, а в качестве N_ε можно взять число $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}$.

б) Если $x_n = q^n$ и $q \neq 0$, то $r = \frac{1}{|q|} > 1$, так как $|q| < 1$. Тогда $r = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$, откуда $\frac{1}{|q|^n} = r^n = (1+\alpha)^n$. Можно показать, что $(1 + \alpha)^n > \alpha n$ при $\alpha > 0$ и любом $n \in N$. Тогда $|x_n| = |q|^n < \frac{1}{\alpha n}$ и для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right] + 1$, справедливо неравенство $|x_n| < \frac{1}{\alpha n} \leqslant \frac{1}{\alpha N_\varepsilon} < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

в) Так как

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

то неравенство $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, равносильное неравенству $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, будет выполняться для всех $n \geqslant N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$. Это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$. ◁

2. Свойства сходящихся последовательностей.

1) Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

2) Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что для всех $n \geqslant N_0$ выполняется неравенство

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

и если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

3) Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$, $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n y_n) = ab$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ при условии, что $y_n \neq 0$ $(n \in N)$ и $b \neq 0$.

4. Предел монотонной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называют: *возрастающей*, если для любого $n \in N$ верно неравенство $x_{n+1} > x_n$; *неубывающей*, если для любого $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют: *убывающей*, если для любого $n \in N$ верно неравенство $x_{n+1} < x_n$; *невозрастающей*, если для любого $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей (неубывающей) и ограничена сверху, то она имеет предел.

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей (невозрастающей) и ограничена снизу, то она имеет предел.

Например, последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограничена сверху ($x_n < 3$ при всех $n \in N$), поэтому она имеет предел. Этот предел равен числу e, где $e \approx 2{,}7182818289045$.

Дробно-линейная функция и её график

Функцию вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — заданные числа, такие, что $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называют *дробно-линейной*.

Если $c = 0$ и $d \neq 0$, то y — линейная функция; если $ad = bc$, то $y = \text{const}$. Дробно-линейная функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = -\frac{d}{c}$. Преобразуем правую часть равенства (1), выделив целую часть:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}},$$

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}. \qquad (2)$$

Полагая

$$A = \frac{a}{c},\ B = \frac{bc-ad}{c^2},\ x_0 = -\frac{d}{c}, \qquad (3)$$

запишем равенство (2) в виде

$$y = A + \frac{B}{x-x_0}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что график дробно-линейной функции (1) можно получить сдвигом гиперболы $y = \frac{B}{x}$ на $|x_0|$ единиц вдоль оси Ox и $|A|$ единиц вдоль оси Oy (направление сдвига зависит от знаков чисел x_0 и A, x_0 — корень уравнения $cx + d = 0$; запоминать формулы (3) нет необходимости). Точка $(x_0; A)$ — центр симметрии графика функции (4).

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции (1), а прямая $y = A$ — горизонтальная асимптота этого графика при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Задача 1 Построить график функции $y = \frac{3x+2}{2x+3}$.

► Так как $\frac{3x+2}{2x+3} = \frac{3\left(x+\frac{3}{2}\right)+2-4{,}5}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = 1{,}5 - \frac{1{,}25}{x+1{,}5}$, т. е.

$$y = 1{,}5 - \frac{1{,}25}{x+1{,}5},$$

то график данной функции можно получить из графика функции $y = -\frac{1{,}25}{x}$ (рис. 179) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 так, что точка $(-1{,}5;\ 1{,}5)$ — центр симметрии графика, а прямые $x = -1{,}5$ и $y = 1{,}5$ — его асимптоты. График пересекает ось Ox в точке $\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$, а ось Oy — в точке $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$ и изображён на рисунке 179. ◁

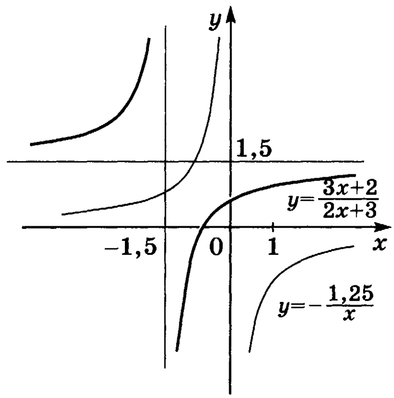

Рис. 179

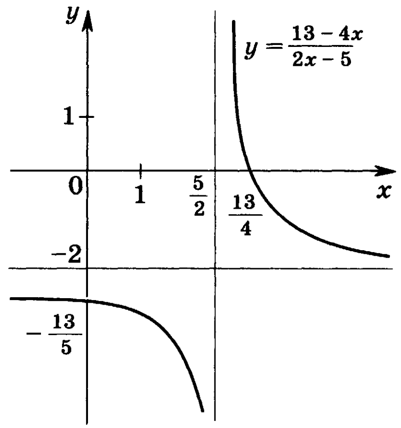

Рис. 180

Задача 2 Построить график функции $y=\dfrac{13-4x}{2x-5}$.

▶ Так как $\dfrac{13-4x}{2x-5}=\dfrac{-2(2x-5)+3}{2x-5}=-2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{5}{2}}$, т. е. $y=-2+$ $+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{5}{2}}$, то прямые $x=\dfrac{5}{2}$ и $y=-2$ — асимптоты графика функции, точка $\left(\dfrac{5}{2};\ -2\right)$ — центр симметрии, а $\left(\dfrac{13}{4};\ 0\right)$; и $\left(0;\ -\dfrac{13}{5}\right)$ — точки пересечения графика с осями координат (рис. 180). ◁

Уравнения и неравенства с двумя неизвестными

1. Линейные уравнения с двумя неизвестными.

Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат Oxy. Тогда уравнение

$$y=kx+b \qquad (1)$$

определяет прямую l (рис. 181), пересекающую ось Oy в точке M $(0;\ b)$ и образующую угол α с положительным направлением оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha=k$ — угловой коэффициент прямой l.

Чтобы построить прямую l, заданную уравнением (1), достаточно найти две точки этой прямой. На рисунке 182 изображены пря-

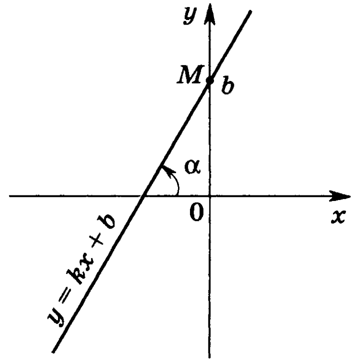

Рис. 181

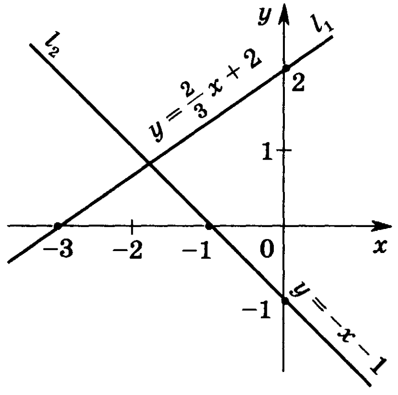

Рис. 182

мые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $y = \frac{2}{3}x + 2$ и $y = -x - 1$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2)$$

предполагая, что хотя бы одно из чисел A, B отлично от нуля ($A^2 + B^2 > 0$).

Пусть $B \neq 0$, тогда уравнение (2) можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, т. е. в виде (1), где $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Если $B = 0$ и $A \neq 0$, то уравнение (2), которое можно записать в виде $x = -\frac{C}{A}$, есть уравнение прямой, параллельной оси Oy.

Таким образом, при любых A, B, C, таких, что $A^2 + B^2 > 0$, уравнение (2) является уравнением некоторой прямой.

2. Линейные неравенства с двумя неизвестными.

Задача 1 Дать геометрическое описание множества точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $3y - 2x - 6 < 0$.

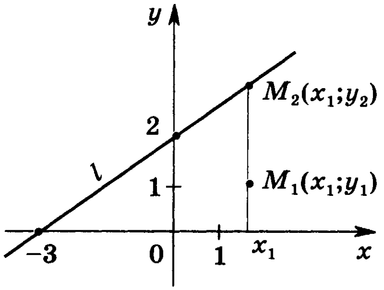

Рис. 183

▶ Уравнением $3y - 2x - 6 = 0$ задаётся прямая (рис. 183), проходящая через точки (–3; 0) и (0; 2). Пусть M_1 $(x_1; y_1)$ — точка, расположенная ниже прямой l, а M_2 $(x_1; y_2)$ — точка с абсциссой x_1 и ординатой y_2, лежащая на прямой l. Тогда

$$3y_2 - 2x_1 - 6 = 0,$$
$$3y_1 - 2x_1 - 6 < 0,$$

так как $y_1 < y_2$.

Аналогично можно показать, что в любой точке $M\ (x;\ y)$, лежащей ниже прямой l, выполняется неравенство $3y - 2x - 6 < 0$; в любой точке $M\ (x;\ y)$, лежащей выше прямой l, справедливо неравенство $3y - 2x - 6 > 0$. ◁

Рассмотрим неравенство

$$Ax + By + C < 0, \qquad (3)$$

считая, что $A^2 + B^2 > 0$.

Как и в задаче **1**, возьмём точки (они лежат на прямой, параллельной оси Oy) $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и $M_2\ (x_1;\ y_2)$, такие, что M_1 лежит ниже прямой l, заданной уравнением (2), а M_2 — на этой прямой, тогда $y_1 < y_2$.

Если $B > 0$, то $By_1 < By_2$, и поэтому $Ax_1 + By_1 + C < 0$, т. е. координаты точки M_1 удовлетворяют неравенству (3). Этому неравенству удовлетворяют координаты любой точки, расположенной ниже прямой l, если $B > 0$.

Если $B < 0$, то неравенству (3) удовлетворяют координаты любой точки, лежащей выше прямой l.

Если $B = 0$ $(A \neq 0)$, то неравенство (3) примет вид $Ax + C < 0$. Это неравенство равносильно неравенству $x < -\frac{C}{A}$ при $A > 0$ и неравенству $x > -\frac{C}{A}$ при $A < 0$.

Например, неравенство $3x + 4 < 0$, равносильное неравенству $x < -\frac{4}{3}$, выполняется во всех точках, лежащих слева от прямой $x = -\frac{4}{3}$.

Таким образом, прямая, заданная уравнением (2), разбивает плоскость на две полуплоскости, такие, что во всех точках одной из этих полуплоскостей выполняется неравенство (3), а в другой — неравенство

$$Ax + By + C > 0. \qquad (4)$$

Чтобы решить неравенство (3) или неравенство (4), т. е. чтобы определить, в какой из полуплоскостей оно справедливо, достаточно определить знак левой части этого неравенства в какой-либо точке одной из полуплоскостей.

Если $C \neq 0$ (прямая не проходит через начало координат), то в качестве такой точки удобно взять точку (0; 0).

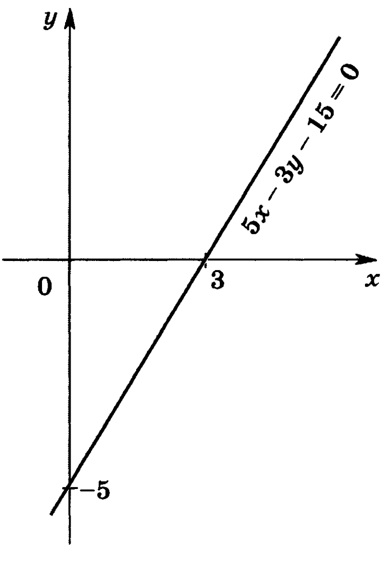

Рис. 184