МГУ – ШКОЛЕ

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

Геометрия

10–11 КЛАССЫ

Учебник для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

7-е издание, переработанное и дополненное

Москва «Просвещение» 2019

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
М34

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Авторы: **Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, Л. С. Киселёва**

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 481 от 14.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 170 от 05.10.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 164-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Условные обозначения:

25* — пункт, необязательный для изучения на базовом уровне
20 — задача, не являющаяся обязательной на базовом уровне
▼ — начало материала, необязательного для изучения на базовом уровне
△ — окончание материала, необязательного для изучения на базовом уровне

Математика: алгебра и начала математического анализа,
М34 геометрия. Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. — 7-е изд., перераб. и доп. — М. : Просвещение, 2019. — 287 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-071730-4.

Учебник позволяет обеспечить вариативность обучения не только согласно системе условных обозначений, но и благодаря хорошо подобранной системе задач, включающей типовые задачи к каждому параграфу, дополнительные задачи к главе и задачи повышенной трудности.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-071730-4

Введение

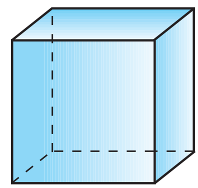
1 Предмет стереометрии

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. **Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.** Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объёмный, пространственный и «метрео» — измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются **точки**, **прямые** и **плоскости**. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать **геометрические тела** и их **поверхности**. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками**. Одним из простейших многогранников является куб (рис. 1, *а*). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром** (рис. 1, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром** (рис. 1, *в*).

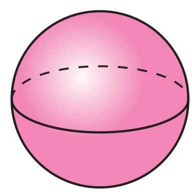
В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделённую от остальной части пространства поверхностью — **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть **сфера**, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.

Изучая свойства геометрических фигур — воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных



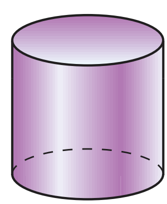
а)

Куб



б)

Шар



в)

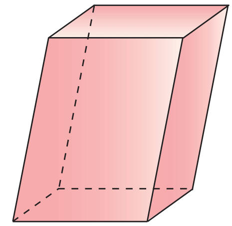
Цилиндр

Рис. 1

предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

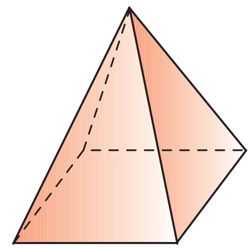
При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит её проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создаёт правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования её свойств. На рисунках 2, *а*, *б* изображены два многогранника — **параллелепипед** и **пирамида**, а на рисунке 2, *в* — **конус**. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1.

В течение двух лет мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники, «круглые» геометрические тела — цилиндр, конус, шар, рассмотрим вопрос об объёмах тел и познакомимся с векторами и методом координат в пространстве.



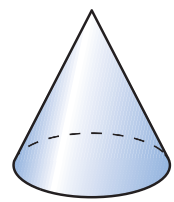
а)

Параллелепипед



б)

Пирамида



в)

Конус

Рис. 2

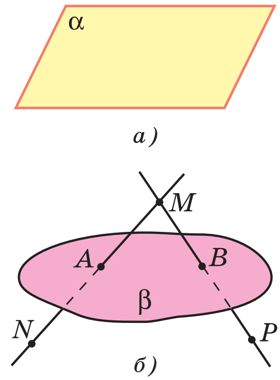
2 Аксиомы стереометрии

В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается ещё одна основная фигура — **плоскость**. Представление о плоскости даёт гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т. д., а прямые — строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. или двумя прописными латинскими буквами AB, CD и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, *а*) или в виде произвольной области (рис. 3, *б*).

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, *б* точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении 2. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены A_1, A_2, A_3.



Точки A и B лежат в плоскости β, а точки M, N и P не лежат в этой плоскости

Рис. 3

A_1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображённая на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью ABC.

Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трёх ножках, т. е. опирается на три «точки», а конец четвёртой ножки (четвёртая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

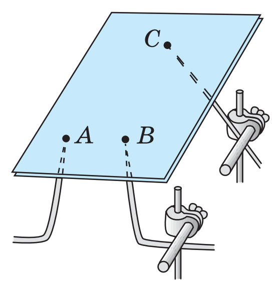


Иллюстрация к аксиоме A_1: пластинка поддерживается тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой

Рис. 4

A_2

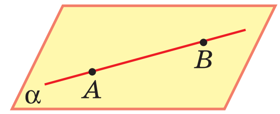
Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки» («две прямые», «три плоскости» и т. д.), будем считать, что эти точки (прямые, плоскости) различны.

В таком случае говорят, что **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую** (рис. 5, *а*).

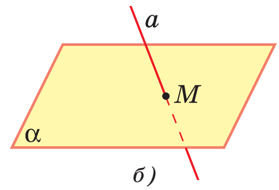
Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертёжной линейки. С этой целью линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

Из аксиомы A_2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они **пересекаются** (рис. 5, *б*).



а)

Прямая AB лежит в плоскости α



б)

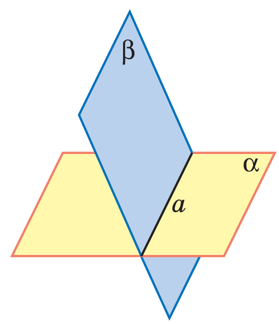
Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M

A_3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что **плоскости пересекаются по прямой** (рис. 5, *в*). Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).



в)

Плоскости α и β пересекаются по прямой a

Рис. 5

3 Некоторые следствия из аксиом

Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 6). Докажем, что через прямую a и точку M проходит плоскость. Отметим на прямой a две точки P и Q. Точки M, P и Q не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как две точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую a.

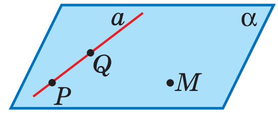


Рис. 6

Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M, проходит через точки M, P и Q. Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки M, P и Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

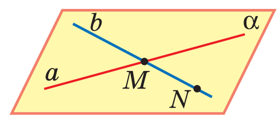


Рис. 7

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N, отличную от точки M, и рассмотрим плоскость α, проходящую через точку N и прямую a. Так как две точки прямой b лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Итак, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b, проходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Вопросы и задачи

1 По рисунку 8 назовите: а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC; б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB; в) точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC; г) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.

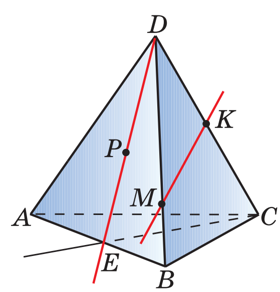


Рис. 8

2 По рисунку 9 назовите: а) точки, лежащие в плоскостях DCC_1 и BQC; б) плоскости, в которых лежит прямая AA_1; в) точки пересечения прямой MK с плоскостью ABD, прямых DK и BP с плоскостью $A_1B_1C_1$; г) прямые, по которым пересекаются плоскости AA_1B_1 и ACD, PB_1C_1 и ABC; д) точки пересечения прямых MK и DC, B_1C_1 и BP, C_1M и DC.

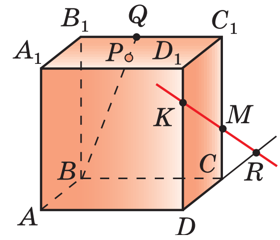


Рис. 9

3 Верно ли, что: а) любые три точки лежат в одной плоскости; б) любые четыре точки лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

4 Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. а) Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой? б) Могут ли прямые AB и CD пересекаться? Ответ обоснуйте.

5 Докажите, что через три данные точки, лежащие на прямой, проходит плоскость. Сколько существует таких плоскостей?

6 Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

7 Две прямые пересекаются в точке M. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку M и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку M?

8 Верно ли утверждение: а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости; б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

9 Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте.

10 Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она: а) пересекает две стороны треугольника; б) проходит через одну из вершин треугольника?

11 Даны прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

12 Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A, B, C и A, B, D?

13 Могут ли две плоскости иметь: а) только одну общую точку; б) только две общие точки; в) только одну общую прямую?

14 Три прямые проходят через одну точку. Через каждые две из них проведена плоскость. Сколько всего проведено плоскостей?

15 Три прямые попарно пересекаются. Докажите, что они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку.

Глава I
Параллельность прямых и плоскостей

§ 1 Параллельность прямых, прямой и плоскости

4 Параллельные прямые в пространстве

Введём понятие параллельных прямых в пространстве.

Определение

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$. На рисунке 10 прямые a и b параллельны, а прямые a и c, a и d, b и c, b и d не параллельны.

Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой α. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, должна лежать в одной плоскости с точкой M и прямой a, т. е. должна лежать в плоскости α. Но в плоскости α, как известно из курса планиметрии, через точку M проходит прямая, параллельная прямой a, и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой b. Итак, b — единственная прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a. Теорема доказана.

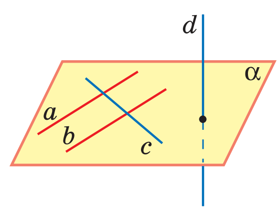


Рис. 10

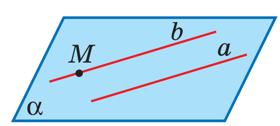


Рис. 11

В дальнейшем нам понадобятся также понятия параллельных отрезков, параллельных отрезка и прямой, параллельных лучей. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, а также параллельность двух лучей. На рисунке 12 отрезки CD и EF параллельны ($CD \parallel EF$), а отрезки AB и CD не параллельны, отрезок AB параллелен прямой a ($AB \parallel a$).

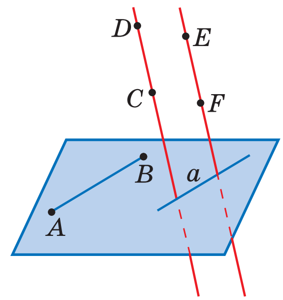


Рис. 12

5 Параллельность трёх прямых

Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим параллельные прямые a и b, одна из которых — прямая a — пересекает плоскость α в точке M (рис. 13, *а*). Докажем, что прямая b также пересекает плоскость α, т. е. имеет с ней только одну общую точку.

Обозначим буквой β плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как две различные плоскости α и β имеют общую точку M, то по аксиоме A_3 они пересекаются по некоторой прямой p (рис. 13, *б*). Эта прямая лежит в плоскости β и пересекает прямую a (в точке M), поэтому она пересекает параллельную ей прямую b в некоторой точке N. Прямая p лежит также в плоскости α, поэтому N — точка плоскости α. Следовательно, N — общая точка прямой b и плоскости α.

Докажем теперь, что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки N. Это и будет означать, что прямая b пересекает плоскость α. Действительно, если бы прямая b имела ещё одну общую точку с плоскостью α, то она целиком лежала бы в плоскости α и, значит, была бы общей прямой плоскостей α и β, т. е. совпадала бы с прямой p. Но это невозможно, так как по условию прямые a и b параллельны, а прямые a и p пересекаются. Лемма доказана. △

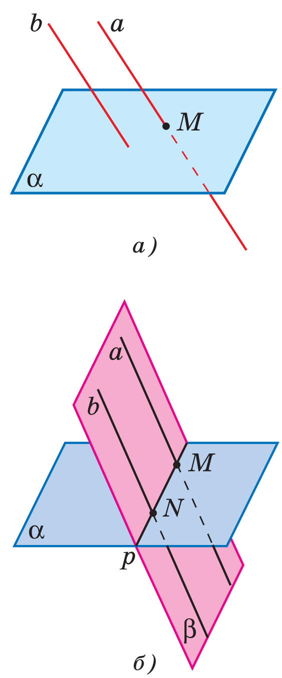


Рис. 13

Из курса планиметрии известно, что если три прямые лежат в одной плоскости и две из них параллельны третьей прямой, то эти две прямые параллельны. Аналогичное утверждение имеет место и для трёх прямых в пространстве. Сформулируем и докажем это утверждение.

Теорема

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$. Для этого нужно доказать, что прямые a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

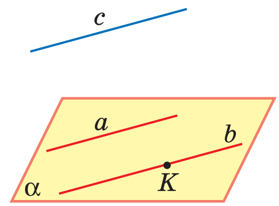


Рис. 14

1) Отметим какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку K (рис. 14). Докажем, что прямая b лежит в этой плоскости. Действительно, если допустить, что прямая b пересекает плоскость α, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость α. Но так как прямые a и c параллельны, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, ибо прямая a лежит в плоскости α.

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно в силу теоремы о параллельных прямых (п. 4). Теорема доказана.

6 Параллельность прямой и плоскости

Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то согласно аксиоме A_2 вся прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что **возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:**

а) прямая лежит в плоскости (см. рис. 5, *а*);

б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются (см. рис. 5, *б*);

в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

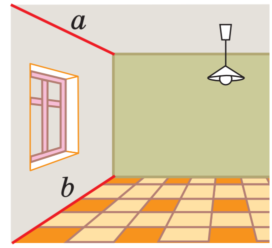
Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

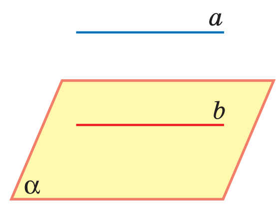
Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$. Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода — они параллельны плоскости земли. Другой пример даёт линия пересечения стены и потолка — эта линия параллельна плоскости пола (рис. 15, *а*). Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, линия пересечения пола с той же самой стеной.

На рисунке 15, *а* указанные прямые обозначены буквами a и b. Оказывается, что если в плоскости α имеется прямая b, параллельная прямой a, не лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны (рис. 15, *б*).

Другими словами, наличие в плоскости α прямой b, параллельной прямой a, является **признаком**, по которому можно сделать вывод о **параллельности прямой a и плоскости** α. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.



а)



б)

Рис. 15

Теорема

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости (рис. 15, *б*). Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, а значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая b лежит в плоскости α. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

Докажем ещё два утверждения, которые часто используются при решении задач.

1^0. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Пусть через данную прямую a, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b (рис. 16). Докажем, что $b \parallel a$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости β) и не пересекаются: ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α, что невозможно, поскольку по условию $a \parallel \alpha$.

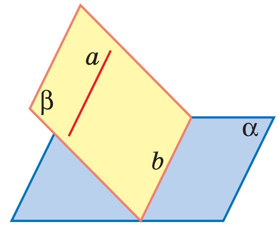


Рис. 16

2^0. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

В самом деле, пусть a и b — параллельные прямые, причём прямая a параллельна плоскости α. Тогда прямая a не пересекает плоскость α, и, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также не пересекает плоскость α. Поэтому прямая b либо параллельна плоскости α, либо лежит в этой плоскости.

Вопросы и задачи

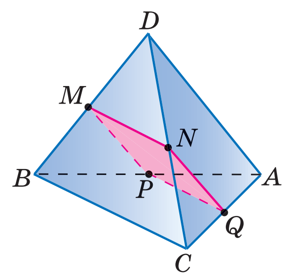


Рис. 17

16 Параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Докажите, что прямая c, пересекающая прямые a и b, также лежит в плоскости α.

17 На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырёхугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.

18 Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проведена плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если: а) точка C — середина отрезка AB и $BB_1 = 7$ см; б) $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 20$ см.

19 Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

20 Средняя линия трапеции лежит в плоскости α. Пересекают ли прямые, содержащие её основания, плоскость α? Ответ обоснуйте.

21 Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.

22 Точки A и B лежат в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BC, параллельна плоскости α.

23 Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.

24 Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BMC.

25 Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям.

26 Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

27 Точка C лежит на отрезке AB, причём $AB : BC = 4 : 3$. Отрезок CD, равный 12 см, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает плоскость α в некоторой точке E, и найдите отрезок BE.

28 На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что длина отрезка DE равна 5 см и $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Плоскость α проходит через точки B и C и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка BC.

29 В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12 см. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K — середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H, и найдите отрезок KH.

30 Основание AB трапеции $ABCD$ параллельно плоскости α, а вершина C лежит в этой плоскости. Докажите, что: а) основание CD трапеции лежит в плоскости α; б) средняя линия трапеции параллельна плоскости α.

31 Плоскость α параллельна стороне BC треугольника ABC и проходит через середину стороны AB. Докажите, что плоскость α проходит также через середину стороны AC.

32 Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Прямая a параллельна как плоскости α, так и плоскости β. Докажите, что прямые a и AB па раллельны.

Решение

Через точку A проведём[1] прямую AM, параллельную прямой a (рис. 18). Так как прямая a параллельна плоскостям α и β, то пря-

[1] Выражения «проведём прямую», «проведём плоскость», разумеется, не нужно понимать в буквальном смысле (ни прямую, ни плоскость в пространстве мы не проводим). Эти слова означают, что указанная прямая или плоскость вводятся в рассмотрение.

мая AM лежит как в плоскости α, так и в плоскости β (п. 6, утверждение 2^0). Таким образом, AM — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β, т. е. она совпадает с прямой AB. Следовательно, $AB \parallel a$.

33 Докажите, что если три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются, то прямые, по которым они пересекаются, либо параллельны, либо имеют общую точку.

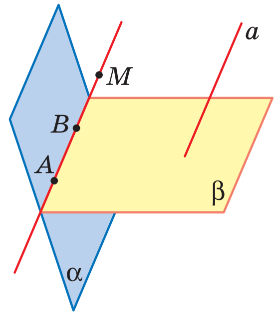


Рис. 18

§ 2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

7 Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Однако в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. не существует такой плоскости, которая проходит через обе эти прямые. Ясно, что такие прямые не пересекаются и не параллельны.

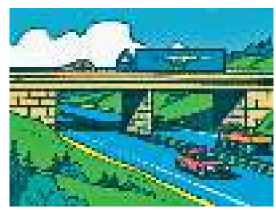


Рис. 19

Определение

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 19).

Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадёт с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит в плоскости α. Теорема доказана.

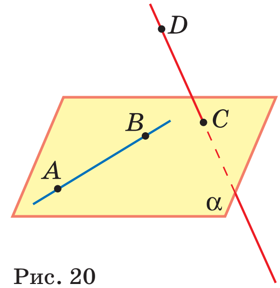


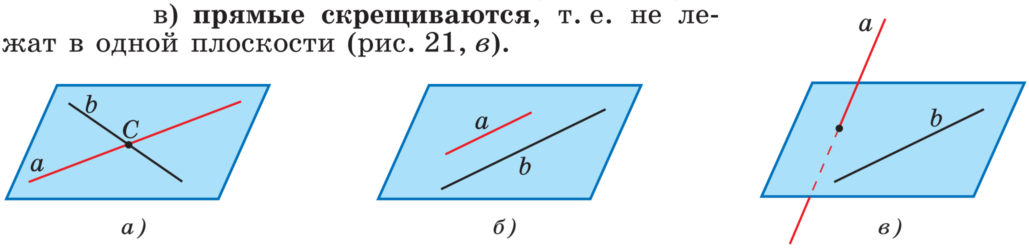
Рис. 20

Итак, **возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:**

а) **прямые пересекаются**, т. е. имеют только одну общую точку (рис. 21, *а*);

б) **прямые параллельны**, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, *б*);

в) **прямые скрещиваются**, т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, *в*).



Пересекающиеся прямые

Параллельные прямые

Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

Докажем ещё одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и такая плоскость только одна.

Проведём через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE.

Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α.

Ясно, что плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD. Теорема доказана.

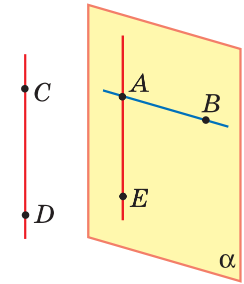
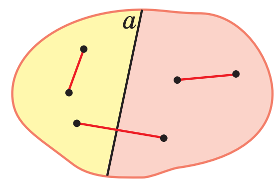


Рис. 22

Наглядной иллюстрацией этой теоремы служат две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (см. рис. 19). Нижняя дорога лежит в плоскости земли, параллельной дороге на эстакаде. Ясно, что и через дорогу на эстакаде проходит плоскость, параллельная плоскости земли, а значит, параллельная нижней дороге.

8 Углы с сонаправленными сторонами

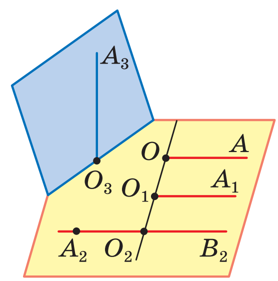


Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости

Рис. 23

Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями** (рис. 23). Прямая a называется **границей** каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей — по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1. Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи OA и O_1A_1, а также лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2, OA и O_3A_3, O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему). Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.



Лучи OA и O_1A_1, а также A_2B_2 и O_2B_2 — сонаправленные

Рис. 24

Теорема

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

Доказательство

Ограничимся рассмотрением случая, когда углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами лежат в разных плоскостях, и докажем, что $\angle O = \angle O_1$.

Отметим на сторонах угла O какие-нибудь точки A и B и отложим на соответственных сторонах угла O_1 отрезки $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 25). Так как лучи OA и O_1A_1 сонаправлены и $OA = O_1A_1$, то получится параллелограмм OAA_1O_1 и, следовательно, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$. Аналогично получаем: $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$. Отсюда следует, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, а значит, ABB_1A_1 — параллелограмм и $AB = A_1B_1$.

Сравним теперь треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Они равны по трём сторонам, и поэтому $\angle O = \angle O_1$. Теорема доказана.

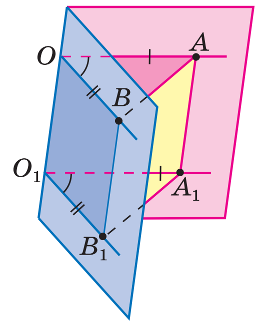


Рис. 25

▼ **Замечание**

При доказательстве мы неявно воспользовались тем, что отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются (в противном случае параллелограммом оказалась бы фигура AB_1BA_1, а не ABB_1A_1). Докажем это. Допустим, что отрезки AB и A_1B_1 пересекаются. Тогда плоскости AOB и $A_1O_1B_1$ пересекаются по некоторой прямой a. Поскольку $OA \parallel O_1A_1$, то $OA \parallel A_1O_1B_1$, поэтому $a \parallel OA$ (см. п. 6). Аналогично $a \parallel OB$. Но этого не может быть, так как через точку O проходит одна прямая, параллельная прямой a. Следовательно, отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются. △

9 Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвёрнутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда говорят, что **угол между пересекающимися прямыми равен** α. Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$.

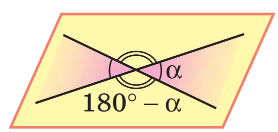


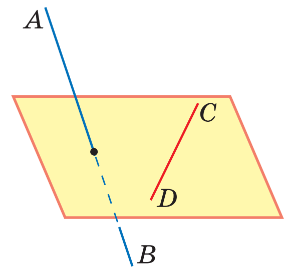
Рис. 26

Введём теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть AB и CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, *а*). Через произвольную точку M_1 проведём прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. 27, *б*).

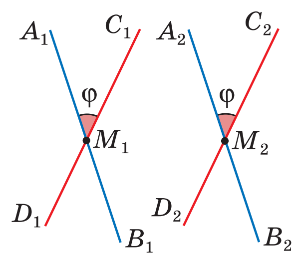
Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что **угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ.**

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1. Действительно, возьмём любую другую точку M_2 и проведём через неё прямые A_2B_2 и C_2D_2, соответственно параллельные прямым AB и CD (см. рис. 27, *б*). Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (объясните почему), то стороны углов с вершинами M_1 и M_2 попарно сонаправлены (на рис. 27, *б* такими углами являются $\angle A_1M_1C_1$ и $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ и т. д.). Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_2B_2 и C_2D_2 также равен φ.

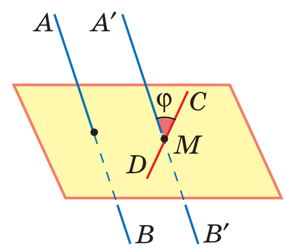
В качестве точки M_1 можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27, *в* на прямой CD отмечена точка M и через эту точку проведена прямая $A'B'$, параллельная прямой AB. Угол между прямыми $A'B'$ и CD также равен φ.



а)



б)



в)

Рис. 27

Вопросы и задачи

34 Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых:

а) ND и AB; б) PK и BC;
в) MN и AB; г) MP и AC;
д) KN и AC; е) MD и BC.

35 Через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две прямые, не имеющие общих точек с прямой a. Докажите, что по крайней мере одна из этих прямых и прямая a являются скрещивающимися прямыми.

36 Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые.

37 Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых m и BC, если:
а) прямая m лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком AC;
б) прямая m не лежит в плоскости ABC?

38 Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что:
а) прямые a и CD пересекаются;
б) a и b — скрещивающиеся прямые.

39 Докажите, что если AB и CD скрещивающиеся прямые, то AD и BC также скрещивающиеся прямые.

40 На скрещивающихся прямых a и b отмечены соответственно точки M и N. Через прямую a и точку N проведена плоскость α, а через прямую b и точку M — плоскость β.
а) Лежит ли прямая b в плоскости α?
б) Пересекаются ли плоскости α и β? При положительном ответе укажите прямую, по которой они пересекаются.

41 Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых быть параллельна третьей прямой? Ответ обоснуйте.

42 Даны параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABEK$ с основанием EK, не лежащие в одной плоскости.
а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK.
б) Найдите периметр трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность и $AB = 22{,}5$ см, $EK = 27{,}5$ см.

43 Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника[1] являются вершинами параллелограмма.

44 Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если:
а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$.

45 Прямая a параллельна стороне BC параллелограмма $ABCD$ и не лежит в плоскости параллелограмма. Докажите, что a и CD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если один из углов параллелограмма равен:
а) $50°$; б) $121°$.

46 Прямая m параллельна диагонали BD ромба $ABCD$ и не лежит в плоскости ромба. Докажите, что:
а) m и AC — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними;
б) m и AD — скрещивающиеся прямые, и найдите угол между ними, если угол ABC равен $128°$.

47 В пространственном четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

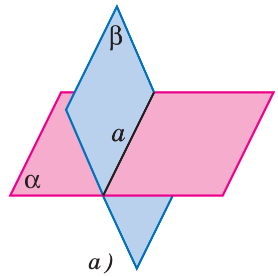
---

[1] Четырёхугольник называется **пространственным**, если его вершины не лежат в одной плоскости.

§ 3 Параллельность плоскостей

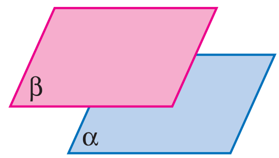
10 Параллельные плоскости

Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 28, *а*), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 28, *б*).



а)

Плоскости α и β пересекаются



б)

Плоскости α и β параллельны

Рис. 28

Определение

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены комнаты, поверхность стола и плоскость пола.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Докажем теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причём $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что прямые a и c параллельны.

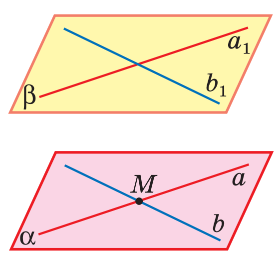


Рис. 29

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно, и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

11 Свойства параллельных плоскостей

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1^0. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Наглядным подтверждением этого факта служат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты — эти линии параллельны.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ (рис. 30). Докажем, что прямые a и b параллельны. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости γ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как эти плоскости параллельны. Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

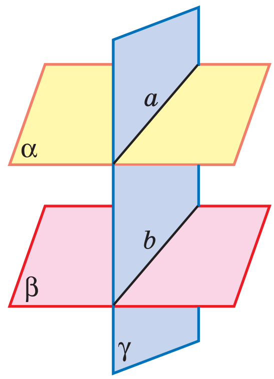


Рис. 30

2^0. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями α и β (рис. 31). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым AC и BD (свойство 1^0). Таким образом, в четырёхугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отрезки AB и CD равны.

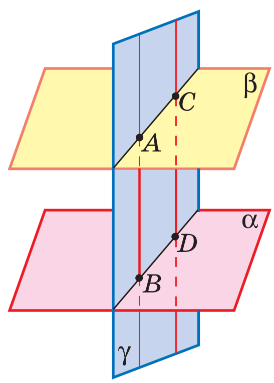


Рис. 31

Вопросы и задачи

48 Укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной комнаты.

49 Прямая m пересекает плоскость α в точке B. Существует ли плоскость, проходящая через прямую m и параллельная плоскости α?

50 Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

51 Докажите, что плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые m и n плоскости α параллельны плоскости β.

52 Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

53 Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

54 Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно.
а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.

55 Докажите, что если прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную данной плоскости α.

Решение
Рассмотрим произвольную плоскость β, параллельную плоскости α. Через какую-нибудь точку B плоскости β проведём прямую b, параллельную прямой a.
Так как прямая a пересекает плоскость α, то прямая b также пересекает эту плоскость. Следовательно, прямая b пересекает плоскость β (а не лежит в ней). Поэтому прямая a также пересекает плоскость β.

56 Плоскости α и β параллельны, A — точка плоскости α. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A и параллельная плоскости β, лежит в плоскости α.

57 Прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что прямая a либо параллельна другой плоскости, либо лежит в ней.

58 Докажите, что если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей α и β, то она пересекает и другую плоскость.

Решение
Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a. Докажем, что плоскость γ пересекает также плоскость β. Проведём в плоскости γ прямую b, пересекающую прямую a. Прямая b пересекает плоскость α, поэтому она пересекает и параллельную ей пло-

скость β (задача 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая b, пересекает плоскость β.

59 Докажите, что через точку A, не лежащую в плоскости α, проходит плоскость, параллельная плоскости α, и притом только одна.

Решение

Проведём в плоскости α две пересекающиеся прямые a и b, а через точку A проведём прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. Рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a_1 и b_1. Плоскость β — искомая, так как она проходит через точку A и по признаку параллельности двух плоскостей параллельна плоскости α.

Докажем теперь, что β — единственная плоскость, проходящая через данную точку A и параллельная плоскости α. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через точку A, пересекает плоскость β, поэтому пересекает и параллельную ей плоскость α (задача 58).

60 Две плоскости α и β параллельны плоскости γ. Докажите, что плоскости α и β параллельны.

61 Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая в плоскости этих прямых. Докажите, что через точку A проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и притом только одна.

62 Для проверки горизонтальности установки диска угломерных инструментов пользуются двумя уровнями, расположенными в плоскости диска на пересекающихся прямых. Почему уровни нельзя располагать на параллельных прямых?

63 Параллельные плоскости α и β пересекают сторону AB угла BAC соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону AC этого угла — соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите:

а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см;

б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.

64 Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 и C_1, а другую — в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

65 Параллельные отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 заключены между параллельными плоскостями α и β (рис. 32).

а) Определите вид четырёхугольников $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ и $A_1C_1C_2A_2$.

б) Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

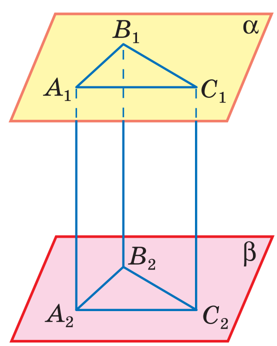


Рис. 32

§ 4 Тетраэдр и параллелепипед

12 Тетраэдр

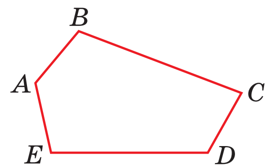
Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но ещё до подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них — **тетраэдром** и **параллелепипедом**. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.

Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая её саму (рис. 33, *б*). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

Перейдём теперь к определению простейшего из многогранников — тетраэдра.

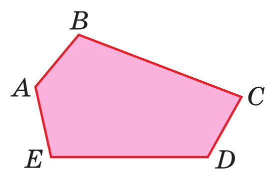
Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA. Поверхность, составленная из четырёх треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется **тетраэдром** и обозначается так: $DABC$ (рис. 34).

Треугольники, из которых составлен тетраэдр, называются **гранями**, их стороны — **рёбрами**, а вершины — **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть рёбер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке 34 противоположными являются рёбра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её **основанием**, а три другие — **боковыми гранями**.



а)

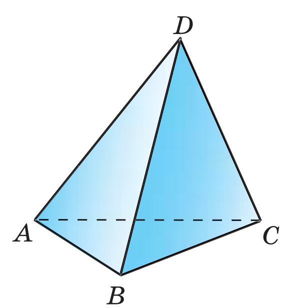
Многоугольник $ABCDE$ — фигура, составленная из отрезков



б)

Многоугольник $ABCDE$ — часть плоскости, ограниченная линией $ABCDE$

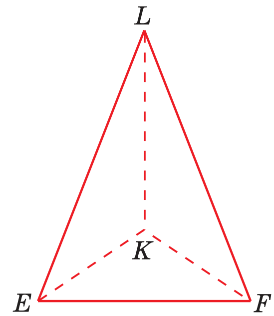
Рис. 33



Тетраэдр $DABC$

Рис. 34

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырёхугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются невидимые рёбра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 — рёбра EK, KF и KL.



Тетраэдр $LKEF$

Рис. 35

13 Параллелепипед

Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны (рис. 36, *а*). Четырёхугольники

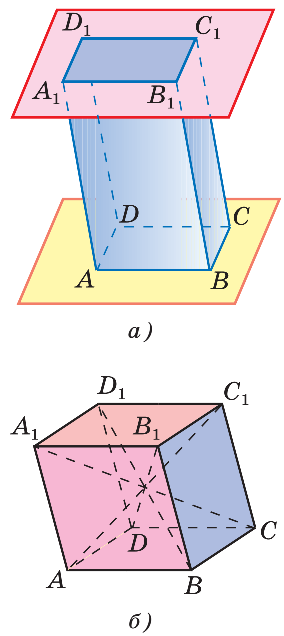
$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны, например, в четырёхугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 1^0, п. 11). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырёх параллелограммов (1), называется **параллелепипедом** и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **рёбрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих рёбер — **противоположными**. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**.

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, *б* диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями паралле-**



Параллелепипед

Рис. 36

лепипеда. Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами.** Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми рёбрами — отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, *б*. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые рёбра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями[1].

Докажем два утверждения о свойствах параллелепипеда.

1^0. Противоположные грани параллелепипеда параллельны[2] и равны.

Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37, *а*). Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то $AB = DC$ и $AA_1 = DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.

2^0. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырёхугольник A_1D_1CB, диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями парал-

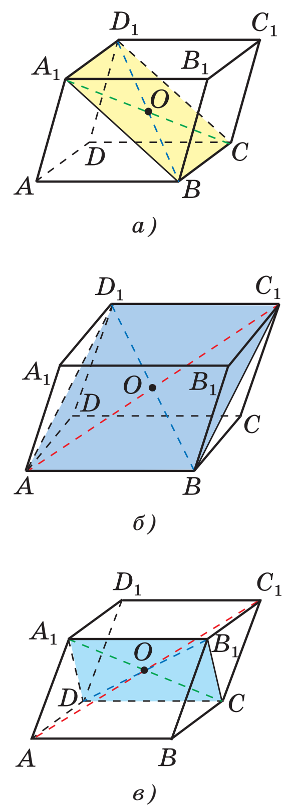


Рис. 37

[1] Более подробно об изображении пространственных фигур на плоскости, в частности параллелепипеда, рассказано в приложении 1.

[2] Две грани параллелепипеда называются **параллельными**, если их плоскости параллельны.

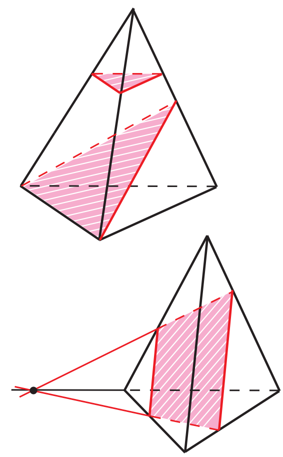
лелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 37, *а*). Так как $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$ (объясните почему), то A_1D_1CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

Далее рассмотрим четырёхугольник AD_1C_1B (рис. 37, *б*). Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD (рис. 37, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

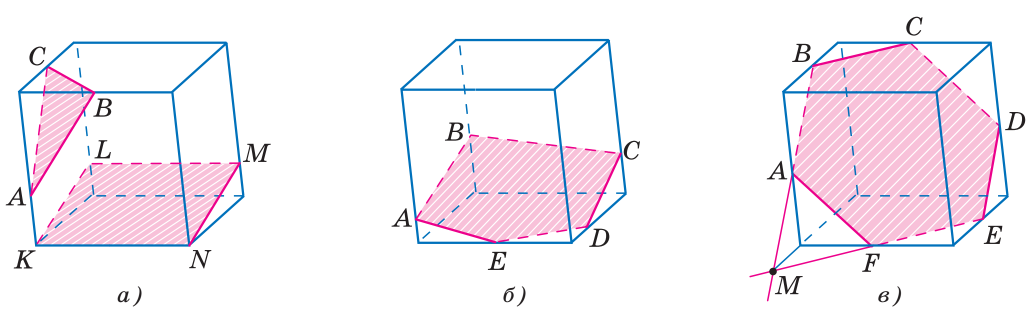
14 Задачи на построение сечений

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их **сечения** различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовём **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением тетраэдра**



Сечения тетраэдра

Рис. 38



Сечения параллелепипеда

Рис. 39

(параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники (рис. 39, *а*), пятиугольники (рис. 39, *б*) и шестиугольники (рис. 39, *в*).

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1^0, п. 11). Так, на рисунке 39, *б* секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) — по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \parallel CD$ и $AE \parallel BC$. По той же причине на рисунке 39, *в* $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остаётся провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

Рассмотрим примеры построения сечений тетраэдра и параллелепипеда.

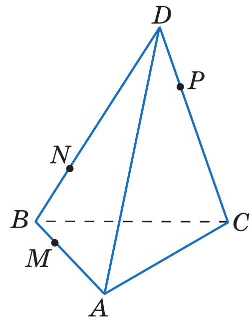
Задача 1

На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P (рис. 40, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

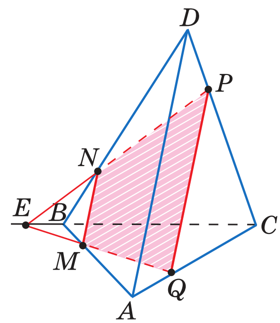
Решение

Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырёхугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

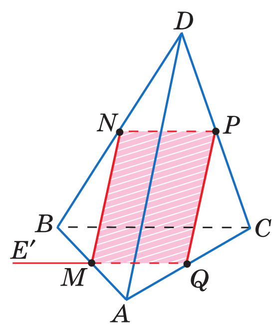
Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, *в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.



а)



б)



в)

Построение сечения тетраэдра плоскостью MNP

Рис. 40

Задача 2

Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра $DABC$ (рис. 41, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

Решение

Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC (п. 6, утверждение 1^0). Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами DA и DB (рис. 41, *б*). Затем через точку P проведём прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR — искомое сечение.

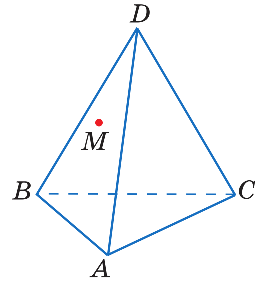
Задача 3

На рёбрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

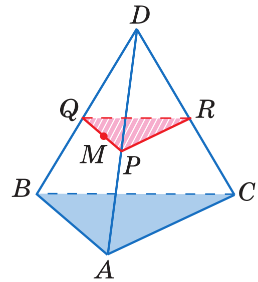
Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, *а*), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение — треугольник ABC. Если точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *б*, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D. Остаётся провести отрезок ED, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *в*. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведём прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же



а)



б)

Рис. 41

грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведём прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

Задачи

66 Назовите все пары скрещивающихся (т. е. принадлежащих скрещивающимся прямым) рёбер тетраэдра $ABCD$. Сколько таких пар рёбер имеет тетраэдр?

67 В тетраэдре $DABC$ дано: $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см. Найдите: а) рёбра основания ABC данного тетраэдра; б) площади всех боковых граней.

68 Точки M и N — середины рёбер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD.

69 Через середины рёбер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

70 Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB, AC и AD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости BCD.

71 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на рёбрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

72 Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC, если: а) точка M является серединой ребра AD; б) точка M лежит внутри грани ABD.

73 В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и P являются серединами рёбер AB, BC и CD, $AC = 10$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD, и найдите периметр четырёхугольника, получившегося при пересечении тетраэдра с плоскостью MNP.

74 Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC.
а) Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC.
б) Найдите отношение площадей сечения и треугольника ABC.

75 Изобразите тетраэдр $KLMN$. а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN. б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F

отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна 24 см^2.

76 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$ и $BD \parallel B_1D_1$.

77 Сумма всех рёбер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.

78 На рисунке 42 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на рёбрах которого отмечены точки M, N, M_1 и N_1 так, что $AM = CN = A_1M_1 = C_1N_1$. Докажите, что $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

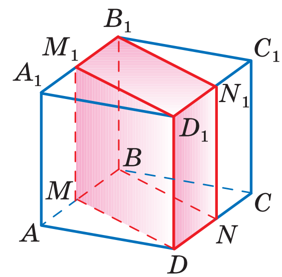


Рис. 42

79 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1; б) плоскостью ACC_1. Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

80 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

81 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на рёбрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

82 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани AA_1B_1B. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M параллельно: а) плоскости основания $ABCD$; б) грани BB_1C_1C; в) плоскости BDD_1.

83 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D; б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

84 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

85 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где точка K — середина ребра AA_1, а точка L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

86 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно диагонали BD_1. Докажите, что если основание параллелепипеда — ромб и углы ABB_1 и CBB_1 прямые, то построенное сечение — равнобедренный треугольник.

87 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

Вопросы к главе I

1 Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?

2 Точка M не лежит на прямой a. Сколько прямых, не пересекающих прямую a, проходит через точку M? Сколько из этих прямых параллельны прямой a?

3 Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?

4 Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая:
а) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α;
б) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;
в) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?

5 Прямая a параллельна плоскости α. Сколько прямых, лежащих в плоскости α, параллельны прямой a? Параллельны ли друг другу эти прямые, лежащие в плоскости α?

6 Прямая a пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная a?

7 Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

8 Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?

9 Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые: а) пересекаться; б) быть скрещивающимися?

10 Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c?

11 Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость трапеции?

12 Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость параллелограмма?

13 Могут ли быть равны два непараллельных отрезка, заключённых между параллельными плоскостями?

14 Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые?

15 Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань — прямоугольник; б) только две смежные грани — ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?

16 Какие многоугольники могут получиться в сечении: а) тетраэдра; б) параллелепипеда?

Дополнительные задачи

88 Параллельные прямые AC и BD пересекают плоскость α в точках A и B. Точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$ см.
а) Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E.
б) Найдите отрезок BE.

89 Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны.

90 Вершины A и B трапеции $ABCD$ лежат в плоскости α, а вершины C и D не лежат в этой плоскости. Как расположена прямая CD относительно плоскости α, если отрезок AB является:
а) основанием трапеции;
б) боковой стороной трапеции?

91 Через каждую из двух параллельных прямых a и b и точку M, не лежащую в плоскости этих прямых, проведена плоскость. Докажите, что эти плоскости пересекаются по прямой, параллельной прямым a и b.

92 Плоскость α и прямая a параллельны прямой b. Докажите, что прямая a либо параллельна плоскости α, либо лежит в ней.

93 Прямые a и b параллельны. Через точку M прямой a проведена прямая MN, отличная от прямой a и не пересекающая прямую b. Каково взаимное расположение прямых MN и b?

94 Даны две скрещивающиеся прямые и точка B, не лежащая на этих прямых. Пересекаются ли плоскости, каждая из которых проходит через одну из прямых и точку B? Ответ обоснуйте.

95 Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что если плоскость β пересекает прямую a, то она пересекает и плоскость α.

96 Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между плоскостью и параллельной ей прямой, равны.

97 Докажите, что два угла с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна $180°$.

98 Прямая a параллельна плоскости α. Существует ли плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α? Если существует, то сколько таких плоскостей? Ответ обоснуйте.

99 Докажите, что три параллельные плоскости отсекают на любых двух пересекающих эти плоскости прямых пропорциональные отрезки.

100 Даны две скрещивающиеся прямые и точка A. Докажите, что через точку A проходит, и притом только одна, плоскость, которая либо параллельна данным прямым, либо проходит через одну из них и параллельна другой.

101 Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

102 Докажите, что плоскость α, проходящая через середины двух рёбер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую основанию, параллельна третьему ребру основания. Найдите периметр и площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если длины всех рёбер тетраэдра равны 20 см.

103 На рёбрах DA, DB и DC тетраэдра $DABC$ отмечены точки M, N и P так, что $DM : MA = DN : NB = DP : PC$. Докажите, что плоскости MNP и ABC параллельны. Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна 10 см^2 и $DM : MA = 2 : 1$.

104 Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно прямым AC и BD.

105 Изобразите тетраэдр $DABC$ и отметьте точки M и N на рёбрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

106 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точку K на ребре DC и точки M и N граней ABC и ACD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

107 Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани BDC.

108 В тетраэдре $DABC$ биссектрисы трёх углов при вершине D пересекают отрезки BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

109 Две плоскости, каждая из которых содержит два боковых ребра параллелепипеда, не принадлежащих одной грани, пересекаются по прямой a. Докажите, что прямая a параллельна боковым рёбрам параллелепипеда и пересекает все его диагонали.

110 Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость A_1DB параллельна плоскости D_1CB_1.

111 Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трёх рёбер, имеющих общую вершину.

112 Докажите, что сумма квадратов четырёх диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его рёбер.

113 По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

114 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте на ребре AB точку M. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости ACC_1.

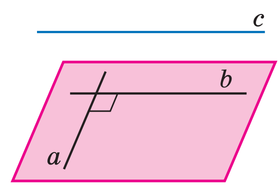
115 Точка M лежит на ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1.

Глава II
Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

15 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.



$a \perp b$ и $a \perp c$

Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

▼ **Доказательство**

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана. △

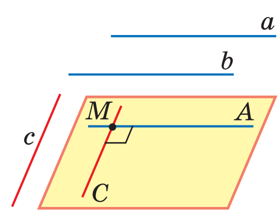


Рис. 44

16 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Определение

Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что **плоскость α перпендикулярна к прямой a**.

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например, прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

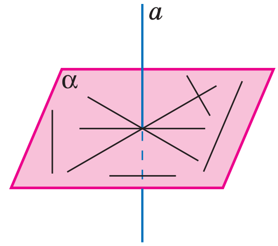


Рис. 45

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

Окружающая нас обстановка даёт много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$. Проведём какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

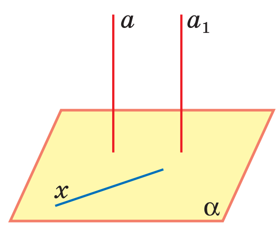


Рис. 46

Докажем обратную теорему.

Теорема

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 47, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведём прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 47, *б*). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана. △

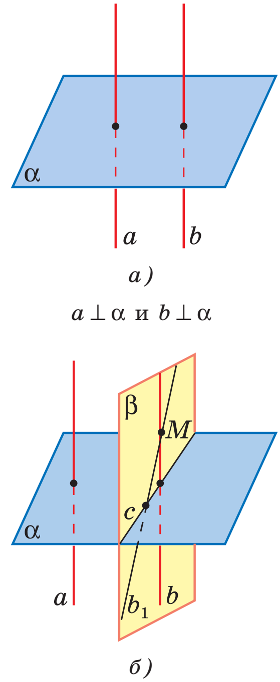


Рис. 47

17 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Как проверить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение, например, при установке мачт, колонн зданий и т. д., которые нужно поставить прямо, т. е. перпендикулярно к той плоскости, на которую они ставятся. Оказывается, что для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой, как о том говорится в определении, а достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

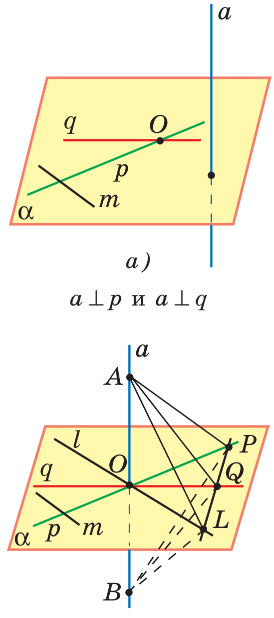
Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 48, *а*). Докажем, что $a \perp \alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, *б*). Проведём через точку O прямую l, параллельную прямой m (если прямая m проходит через точку O, то в качестве l возьмём саму прямую m). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведём в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определённости, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, *б*).



а)

$a \perp p$ и $a \perp q$

б)

Рис. 48

Так как прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то $AP = BP$ и $AQ = BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трём сторонам. Поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

Сравним треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP = BP$, PL — общая сторона, $\angle APL = \angle BPL$), поэтому $AL = BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. $l \perp a$. Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то $m \perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т. е. $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведём через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что $a \perp \alpha$. Теорема доказана.

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задачи.

Задача

Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

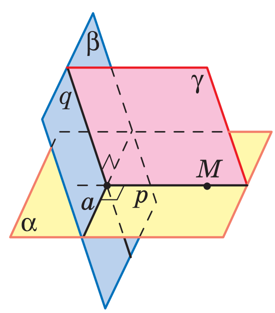


Рис. 49

Проведём через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$ (рис. 49)[1]. В плоскости α через точку M проведём прямую p, перпен-

[1] На рисунке 49 изображён тот случай, когда точка M не лежит на прямой a. Однако приведённое решение задачи пригодно и для того случая, когда точка M лежит на прямой a.

дикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведём прямую q, перпендикулярную к прямой a. Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.

Замечание

Можно доказать, что γ — единственная плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a (задача 133).

18 Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

▼ **Доказательство**

Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что: 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

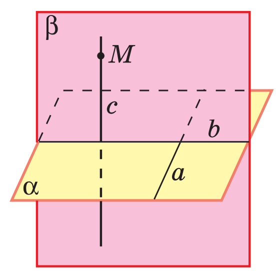


Рис. 50

1) Проведём в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку M проведём прямую c, перпендикулярную к прямой b. Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp a$).

2) Предположим, что через точку M проходит ещё одна прямая (обозначим её через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 16) $c_1 \parallel c$, что невозможно, так как прямые c_1 и c пересекаются в точке M. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана. △

Задачи

116 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что:
а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$, если $\angle BAD = 90°$;
б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$, если $AB \perp DD_1$.

117 В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N — середины рёбер AB и AC.

118 Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

119 Прямая OA перпендикулярна к плоскости OBC, и точка O является серединой отрезка AD. Докажите, что:
а) $AB = DB$;
б) $AB = AC$, если $OB = OC$;
в) $OB = OC$, если $AB = AC$.

120 Через точку O пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна a, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки K до вершин квадрата, если $OK = b$.

121 В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причём $CK = 12$ см. Найдите KM.

122 Прямая CD перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что $AB = 16\sqrt{3}$ см, $OK = 12$ см, $CD = 16$ см. Найдите расстояния от точек D и K до вершин A и B треугольника.

123 Докажите, что если две плоскости α и β перпендикулярны к прямой a, то они параллельны.

Решение

Проведём какую-нибудь прямую, параллельную прямой a, так, чтобы она пересекала плоскости α и β в различных точках A и B. По первой теореме п. 16 плоскости α и β перпендикулярны к прямой AB.

Если допустить, что плоскости α и β не параллельны, т. е. имеют хотя бы одну общую точку M, то получим треугольник ABM с двумя прямыми углами при вершинах A и B, что невозможно. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$.

124 Прямая PQ параллельна плоскости α. Через точки P и Q проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α, которые пересекают эту плоскость соответственно в точках P_1 и Q_1. Докажите, что $PQ = P_1Q_1$.

125 Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие её соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21{,}5$ см, $QQ_1 = 33{,}5$ см.

126 Прямая MB перпендикулярна к сторонам AB и BC треугольника ABC. Определите вид треугольника MBD, где D — произвольная точка прямой AC.

127 В треугольнике ABC сумма углов A и B равна $90°$. Прямая BD перпендикулярна к плоскости ABC. Докажите, что $CD \perp AC$.

128 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

129 Прямая AM перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что:
а) прямая BD перпендикулярна к плоскости AMO;
б) $MO \perp BD$.

130 Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BM. Известно, что $\angle MBA = \angle MBC = 90°$, $MB = m$, $AB = n$. Найдите расстояния от точки M до:
а) вершин квадрата;
б) прямых AC и BD.

131 В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.

132 Докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна к прямой, то и другая плоскость перпендикулярна к этой прямой.

133 Докажите, что через любую точку пространства проходит только одна плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Согласно задаче п. 17 через данную точку M проходит плоскость α, перпендикулярная к данной прямой a. Предположим, что через точку M проходит ещё одна плоскость α_1, перпендикулярная к этой прямой. Тогда плоскости α и α_1 параллельны (см. задачу 123). Но это невозможно, так как эти плоскости имеют общую точку M. Следовательно, наше предположение неверно, и через точку M проходит только одна плоскость, перпендикулярная к прямой a.

134 Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку M прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой a.

135 Прямая a перпендикулярна к плоскости α и перпендикулярна к прямой b, не лежащей в этой плоскости. Докажите, что $b \parallel \alpha$.

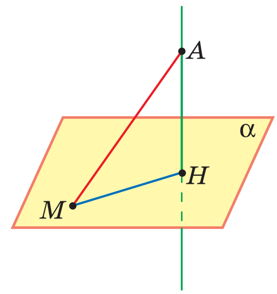
136 Докажите, что если точка X равноудалена от концов данного отрезка AB, то она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной к прямой AB.

137 Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой.

§ 2 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

19 Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведём через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведённым из точки A к плоскости** α, а точка H — **основанием перпендикуляра.** Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведём отрезок AM. Он называется **наклонной, проведённой из точки A к плоскости** α, а точка M — **основанием наклонной.** Отрезок HM называется **проекцией наклонной на плоскость** α. Сравним перпендикуляр AH и наклонную AM: в прямоугольном треугольнике AMH сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Итак, **перпендикуляр, проведённый из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой плоскости.**



$AH \perp \alpha$

Рис. 51

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости α, называется **расстоянием от точки A до плоскости** α. Когда мы говорим, что некоторый предмет, например лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем, 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведённому от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

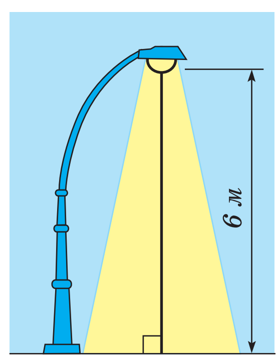


Рис. 52

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В самом деле, рассмотрим перпендикуляры AA_0 и MM_0, проведённые из двух произвольных точек A и M плоскости α к параллельной ей плоскости β. Так как $AA_0 \perp \beta$ и $MM_0 \perp \beta$, то $AA_0 \parallel MM_0$. Отсюда следует, что $MM_0 = AA_0$ (свойство 2^0, п. 11), т. е. расстояние от любой точки M плоскости α до плоскости β равно длине от-

резка AA_0. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями.**

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (задача 144). В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.**

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**

20 Теорема о трёх перпендикулярах

Теорема

Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Доказательство

Обратимся к рисунку 53, на котором отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведённая в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции HM наклонной. Докажем, что $a \perp AM$.

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и MH, лежащим в плоскости AMH ($a \perp HM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой

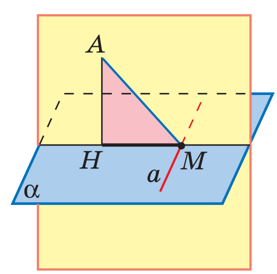


Рис. 53

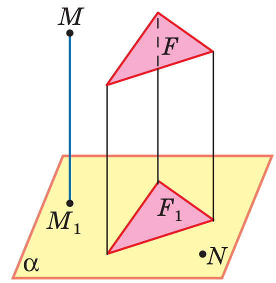
прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp AM$. Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой о трёх перпендикулярах**, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также **обратная теорема: прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.** По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно (задача 153).

21 Угол между прямой и плоскостью

В п. 19 было дано определение проекции наклонной на плоскость. Введём теперь понятие проекции[1] произвольной фигуры. **Проекцией точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 54 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).



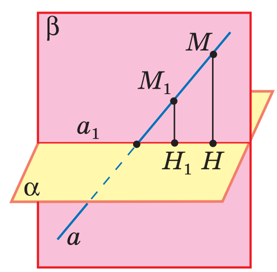
$MM_1 \perp \alpha$

Рис. 54

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется **проекцией фигуры *F* на данную плоскость.** На рисунке 54 треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α.

Докажем теперь, что **проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.**

Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости α, — буквой a (рис. 55). Из какой-нибудь точки M прямой a проведём перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через a и MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α. В самом деле, возьмём произвольную точку M_1 прямой a и проведём в плоскости β пря-



$MH \perp \alpha$, $M_1H_1 \parallel MH$

Рис. 55

[1] В данном пункте речь идёт о **прямоугольной** (или **ортогональной)** проекции фигуры. Более общее понятие параллельной проекции фигуры рассматривается в приложении 1.

мую M_1H_1, параллельную прямой MH (H_1 — точка пересечения прямых M_1H_1 и a_1). По первой теореме п. 16 $M_1H_1 \perp \alpha$, и, значит, точка H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α. Мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1. Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a. Следовательно, a_1 — проекция прямой a на плоскость α.

Из доказанного утверждения следует, что проекцией отрезка AB, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек A и B. Поэтому определение проекции наклонной (п. 19) полностью согласуется с общим определением проекции фигуры. Используя понятие проекции прямой на плоскость, дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Можно доказать, что угол φ_0 между данной прямой AM и плоскостью α (рис. 56) является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведёнными в плоскости α через точку A (задача 162).

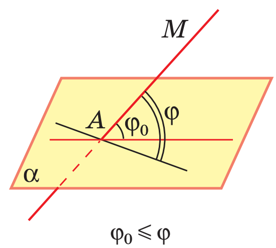


Рис. 56

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то её проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. В таком случае угол между прямой и плоскостью считается равным $90°$.

Если данная прямая параллельна плоскости, то её проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной. В этом случае понятие угла между прямой и плоскостью мы не вводим. (Иногда договариваются считать, что угол между параллельными прямой и плоскостью равен $0°$.)

▼ **Замечание**

Наряду с рассмотренной в этом пункте прямоугольной проекцией и параллельной проекцией, речь о которой пойдёт в приложении 1, иногда используется центральная проекция. Она определяется так. Рассмотрим произвольную плоскость α и какую-нибудь точку O, не лежащую в этой плоскости. Пусть β — плоскость, проходящая через точку O и параллельная плоскости α. **Центральной проекцией** (с центром O) **точки** M, не лежащей в плоскости β, **на плоскость** α называется точка M_1 пересечения прямой OM с плоскостью α. **Центральной проекцией фигуры на плоскость** α называется множество центральных проекций на плоскость α всех точек этой фигуры, не лежащих в плоскости β. Примером центральной проекции фигуры является её фотографический снимок. △

Задачи

138 Из некоторой точки проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен φ. а) Найдите наклонную и её проекцию на данную плоскость, если перпендикуляр равен d. б) Найдите перпендикуляр и проекцию наклонной, если наклонная равна m.

139 Из некоторой точки проведены к плоскости две наклонные. Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны и наклонные; в) если наклонные не равны, то бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию.

140 Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

141 Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от неё на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

142 Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

143 Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см.

144 Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что все точки прямой a равноудалены от плоскости α.

Решение

Через какую-нибудь точку прямой a проведём плоскость β, параллельную плоскости α (задача 59). Прямая a лежит в плоскости β, так как в противном случае она пересекала бы плоскость β, а значит, пересекала бы и плоскость α (задача 55), что невозможно. Все точки плоскости β равноудалены от плоскости α, поэтому и все точки прямой a, лежащей в плоскости β, равноудалены от плоскости α, что и требовалось доказать.

145 Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный. б) Найдите BD, если $BC = a$, $DC = b$.

146 Прямая a пересекает плоскость α в точке M и не перпендикулярна к этой плоскости. Докажите, что в плоскости α через точку M проходит прямая, перпендикулярная к прямой a, и притом только одна.

147 Из точки M проведён перпендикуляр MB к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что треугольники AMD и MCD прямоугольные.

148 Прямая AK перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, а точка M — середина стороны BC. Докажите, что $MK \perp BC$.

149 Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, $AD = 12$ см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

150 Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см. Найдите: а) расстояние от точки K до плоскости прямоугольника $ABCD$; б) расстояние между прямыми AK и CD.

151 Прямая CD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Докажите, что: а) треугольник ABC является проекцией треугольника ABD на плоскость ABC; б) если CH — высота треугольника ABC, то DH — высота треугольника ABD.

152 Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если $BF = 8$ дм, $AB = 4$ дм.

153 Докажите, что прямая a, проведённая в плоскости α через основание M наклонной AM перпендикулярно к ней, перпендикулярна к её проекции HM (см. рис. 53).

Решение

Прямая a перпендикулярна к плоскости AMH, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($a \perp AM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp HM$, что и требовалось доказать.

154 Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см. Найдите: а) расстояние от точки D до прямой AC; б) площадь треугольника ACD.

155 Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если $AC = 4$ см, а $CM = 2\sqrt{7}$ см.

156 Один из катетов прямоугольного треугольника ABC равен m, а острый угол, прилежащий к этому катету, равен φ. Через вершину прямого угла C проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника, $CD = n$. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

157 Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. а) Докажите, что расстояния от точки K до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны. б) Найдите это расстояние, если $OK = 4{,}5$ дм, $AC = 6$ дм, $BD = 8$ дм.

158 Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

159 Прямая BM перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, по которой пересекаются плоскости ADM и BCM, перпендикулярна к плоскости ABM.

160 Концы отрезка AB лежат на двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно d, причём $d < AB$. Докажите, что проекции отрезка AB на эти плоскости равны. Найдите эти проекции, если $AB = 13$ см, $d = 5$ см.

161 Луч BA не лежит в плоскости неразвёрнутого угла CBD. Докажите, что если $\angle ABC = \angle ABD$, причём $\angle ABC < 90°$, то проекцией луча BA на плоскость CBD является биссектриса угла CBD.

162 Прямая MA проходит через точку A плоскости α и образует с этой плоскостью угол $\varphi_0 \neq 90°$. Докажите, что φ_0 является наименьшим из всех углов, которые прямая MA образует с прямыми, проведёнными в плоскости α через точку A.

Решение

Обозначим буквой H основание перпендикуляра, проведённого из точки M к плоскости α, и рассмотрим произвольную прямую p в плоскости α, проходящую через точку A и отличную от прямой AH. Угол между прямыми AM и p обозначим через φ (рис. 57) и докажем, что $\varphi > \varphi_0$. Из точки M проведём перпендикуляр MN к прямой p. Если точка N совпадает с точкой A, то $\varphi = 90°$ и поэтому $\varphi > \varphi_0$. Рассмотрим случай, когда точки A и N не совпадают (см. рис. 57). Отрезок AM — общая гипотенуза прямоугольных треугольников ANM и AHM, поэтому $\sin\varphi = \dfrac{MN}{AM}$, $\sin\varphi_0 = \dfrac{MH}{AM}$. Так как $MN > MH$ (MN — наклонная, MH — перпендикуляр), то из этих равенств следует, что $\sin\varphi > \sin\varphi_0$, и поэтому $\varphi > \varphi_0$.

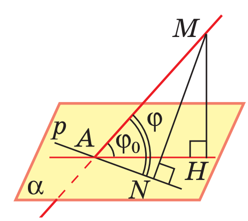


Рис. 57

163 Наклонная AM, проведённая из точки A к данной плоскости, равна d. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен: а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$?

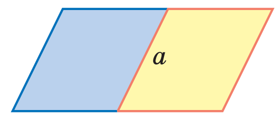
164 Под углом φ к плоскости α проведена наклонная. Найдите φ, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.

165 Из точки A, удалённой от плоскости γ на расстояние d, проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом $30°$ к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в $120°$. Найдите BC.

§3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

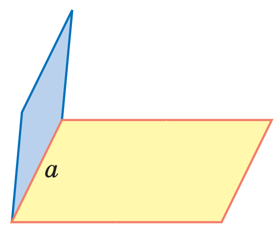
22 Двугранный угол

Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается ещё один вид углов — **двугранные углы.** Чтобы ввести понятие двугранного угла, напомним, что любая прямая, проведённая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости (рис. 58, *а*). Представим себе, что мы перегнули плоскость по прямой a так, что две полуплоскости с границей a оказались уже не лежащими в одной плоскости (рис. 58, *б*). Полученная фигура и есть двугранный угол.



а)

Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости



б)

Двугранный угол

Рис. 58

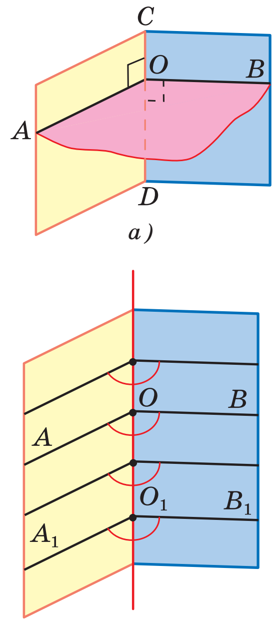
Таким образом, можно дать такое определение двугранного угла: **двугранным углом называется фигура, образованная прямой *a* и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.** Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями.** У двугранного угла две грани, отсюда и название — двугранный угол. Прямая a — общая граница полуплоскостей — называется **ребром** двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, называют двугранным углом $CABD$.

В обыденной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла. Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом и т. д.

Мы знаем, что углы на плоскости (обычные углы) измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы? Это делается следующим образом. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проведём луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется **линейным углом двугранного угла**. На рисунке 59, *а* угол AOB — линейный угол двугранного угла с ребром CD.

Так как $OA \perp CD$ и $OB \perp CD$, то плоскость AOB перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов (рис. 59, *б*).



б)

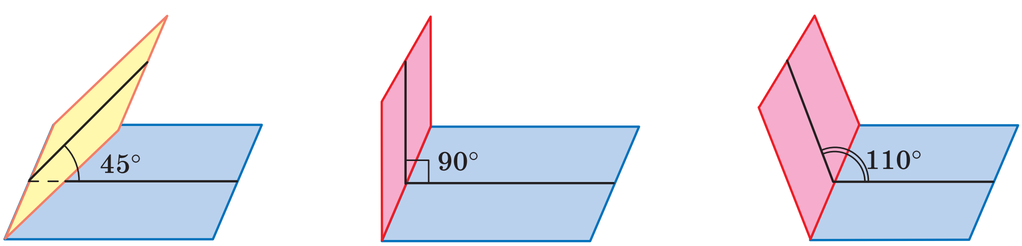
Линейные углы двугранного угла

Рис. 59

Докажем, что **все линейные углы двугранного угла равны друг другу**. Рассмотрим два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ (см. рис. 59, *б*). Лучи OA и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O_1B_1. Поэтому $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (как углы с сонаправленными сторонами).

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 60, *а* градусная мера двугранного угла равна 45°. Обычно говорят коротко: «Двугранный угол равен 45°».

Двугранный угол называется **прямым (острым, тупым)**, если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°). Двугранный угол, изображённый на рисунке 60, *б*, прямой, на рисунке 60, *а* — острый, а на рисунке 60, *в* — тупой.



а) *б)* *в)*

Рис. 60

23 Признак перпендикулярности двух плоскостей

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 61, *а*). Если один из этих двугранных углов равен φ, то другие три угла равны соответственно $180° - \varphi$, φ и $180° - \varphi$. В частности, если один из углов прямой ($\varphi = 90°$), то и остальные три угла прямые. Если φ — тот из четырёх углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что **угол между пересекающимися плоскостями равен** φ. Очевидно, $0° < \varphi \leqslant 90°$.

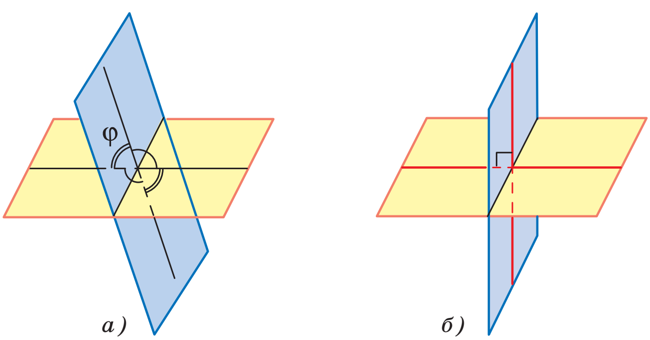
Определение

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° (рис. 61, *б*).

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты. Ясно, что все четыре двугранных угла, образованных взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые. Рассмотрим **признак перпендикулярности двух плоскостей.**

Теорема

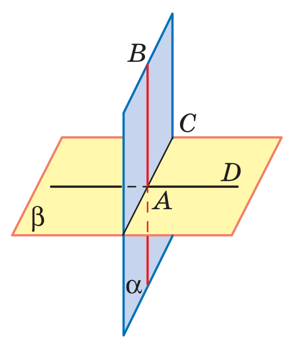
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.



а)   *б)*

Взаимно перпендикулярные плоскости

Рис. 61



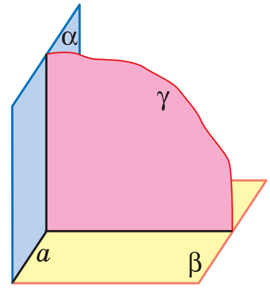
$AB \perp \beta$

Рис. 62

Доказательство

Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A (рис. 62). Докажем, что $\alpha \perp \beta$. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причём $AB \perp AC$, так как по условию $AB \perp \beta$, т. е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведём в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но $\angle BAD = 90°$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен $90°$, т. е. $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.



Если $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$

Рис. 63

Следствие

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 63).

24 Прямоугольный параллелепипед

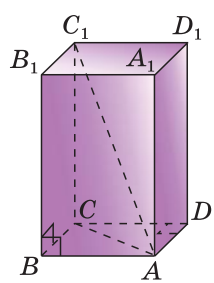
Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые рёбра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют многие предметы: коробки, ящики, комнаты и т. д. На рисунке 64 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основаниями служат прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AB$, т. е. боковая грань AA_1B_1B — прямоугольник. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях. Таким образом, мы обосновали свойство прямоугольного параллелепипеда:

1^0. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.

Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются **двугранными углами параллелепипеда**.

Докажите самостоятельно, что:

2^0. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.



Прямоугольный параллелепипед

Рис. 64

Рассмотрим одно из самых замечательных свойств прямоугольного параллелепипеда.

Длины трёх рёбер, имеющих общую вершину, назовём **измерениями** прямоугольного параллелепипеда. Например, у параллелепипеда, изображённого на рисунке 64, в качестве измерений можно взять длины рёбер AB, AD и AA_1.

В обыденной практике, говоря о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вместо слова «измерения» используют обычно слова «длина», «ширина» и «высота» комнаты. Ясно, что длина, ширина и высота комнаты — это и есть её измерения.

Прежде чем сформулировать свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями, вспомним, что в прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов смежных сторон.

Длины смежных сторон можно назвать измерениями прямоугольника, и поэтому **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений**. Оказывается, аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед.

Теорема

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Доказательство

Обратимся к рисунку 64, на котором изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1 прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$. Теорема доказана.

Следствие

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом.** Все грани куба — равные друг другу квадраты.

25* Трёхгранный угол

Рассмотрим три луча с общим началом O — лучи OA, OB и OC, не лежащие в одной плоскости. Фигура, состоящая из углов AOB, BOC, COA и их внутренних областей, называется **трёхгранным углом** $OABC$, а указанные углы — **плоскими углами** этого **трёхгранного угла**.

Докажем, что **каждый плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других плоских углов**. Рассмотрим трёхгранный угол $OABC$ и для определённости будем считать, что $\angle BOC \geqslant \angle AOC \geqslant \angle AOB$. Достаточно доказать, что $\angle BOC < \angle AOB + \angle AOC$ (объясните почему). Если $\angle BOC = \angle AOB$, то справедливость этого неравенства очевидна. В противном случае ($\angle BOC > \angle AOB$) поступим так.

На луче BC выберем точку M так, чтобы угол MOB оказался равным углу AOB (рис. 65, *а*). Поскольку $\angle BOC > \angle AOB$, то точка M будет лежать между точками B и C. Далее, на луче OA отложим отрезок $ON = OM$. Треугольники BON и BOM равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $BN = BM$.

В треугольнике BCN имеем:

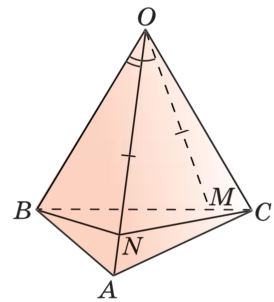
$$BM + MC = BC < BN + NC = BM + NC,$$

откуда находим: $MC < NC$.

Разогнём двугранный угол с ребром OC так, чтобы точки M, N, O и C оказались лежащими в одной плоскости, и проведём биссектрису OD треугольника MON (рис. 65, *б*). Поскольку треугольник MON — равнобедренный, то отрезок OD является его медианой и высотой: $MD = DN$, $OD \perp MN$. Таким образом, прямая OD проходит через середину стороны MN треугольника MNC и перпендикулярна к этой стороне. Следовательно, она пересекает большую из сторон MC и NC (докажите это), т. е. сторону NC. Поэтому $\angle MOC < \angle NOC$. Обратимся теперь к рисунку 65, *а*. Мы видим, что

$$\angle BOC = \angle MOB + \angle MOC = \\ = \angle AOB + \angle MOC < \angle AOB + \angle NOC = \angle AOB + \angle AOC,$$

что и требовалось доказать.



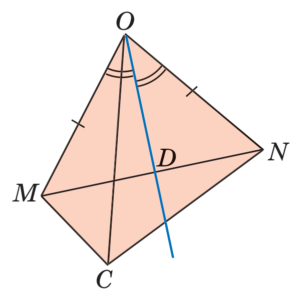


Рис. 65

26* Многогранный угол

Рассмотрим фигуру, составленную из углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1 и их внутренних областей так, что смежные углы (т. е. углы A_1OA_2 и A_2OA_3, ..., A_nOA_1 и A_1OA_2) не лежат в одной плоскости, а несмежные углы (с их внутренними областями) не имеют общих точек. Такая фигура называется **многогранным углом** $OA_1A_2 \dots A_n$, углы, из которых составлен этот многогранный угол, — **плоскими углами**, лучи OA_1, OA_2, ..., OA_n — **рёбрами**, а точка O — **вершиной** этого многогранного угла. Примером многогранного угла является трёхгранный угол.

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости каждого из своих плоских углов. В частности, трёхгранный угол — выпуклый (объясните почему).

Докажем, что **для любого выпуклого многогранного угла существует плоскость, пересекающая все его рёбра**. Рассмотрим рёбра OA_1 и OA_2 многогранного угла $OA_1A_2 \dots A_n$. Поскольку данный многогранный угол — выпуклый, то точки A_3, ..., A_n лежат по одну сторону от плоскости OA_1A_2.

Проведём среднюю линию BC треугольника OA_1A_2 (рис. 66) и выберем из рёбер OA_3, ..., OA_n то ребро OA_i, для которого величина двугранного угла $OBCA_i$ имеет наименьшее значение (на рисунке грани этого двугранного угла закрашены). Рассмотрим полуплоскость с границей BC, делящую двугранный угол $OBCA_i$ на два двугранных угла (на рисунке эта полуплоскость не изображена). Все вершины A_1, ..., A_n лежат по одну сторону от плоскости α, содержащей эту полуплоскость, а точка O — по другую сторону от плоскости α (объясните почему). Следовательно, плоскость α пересекает все рёбра OA_1, ..., OA_n. Утверждение доказано.

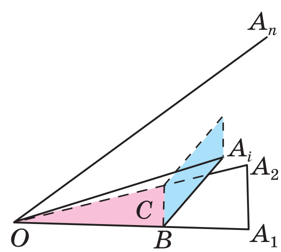


Рис. 66

Выпуклые многогранные углы обладают ещё одним важным свойством.

Теорема

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство

Рассмотрим выпуклый многогранный угол с вершиной O и проведём плоскость, пересекающую все его рёбра в некоторых точках A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (рис. 67). Ясно, что многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ — выпуклый. Имеем

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_nOA_1 =$$
$$= (180^\circ - \angle OA_1A_2 - \angle OA_2A_1) +$$
$$+ (180^\circ - \angle OA_2A_3 - \angle OA_3A_2) + \ldots$$
$$\ldots + (180^\circ - \angle OA_nA_1 - \angle OA_1A_n) =$$
$$= 180^\circ \cdot n - (\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2) -$$
$$- (\angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3) - \ldots - (\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1).$$

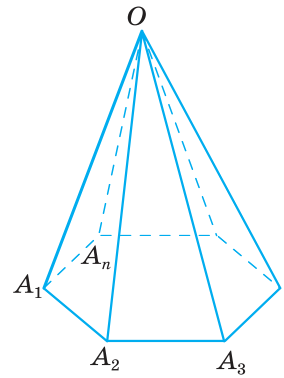


Рис. 67

Но сумма двух плоских углов трёхгранного угла больше третьего плоского угла (см. п. 25), поэтому

$$\angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2 > \angle A_nA_1A_2, \ \ldots,$$
$$\angle OA_nA_{n-1} + \angle OA_nA_1 > \angle A_{n-1}A_nA_1.$$

Следовательно, искомая сумма меньше, чем

$$180^\circ \cdot n - (\angle A_nA_1A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \ldots + \angle A_{n-1}A_nA_1) =$$
$$= 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ.$$

Теорема доказана.

Задачи

166 Неперпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой MN. В плоскости β из точки A проведён перпендикуляр AB к прямой MN и из той же точки A проведён перпендикуляр AC к плоскости α. Докажите, что $\angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $AMNC$.

167 В тетраэдре $DABC$ все рёбра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.

168 Двугранный угол равен φ. На одной грани этого угла лежит точка, удалённая на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

169 Даны два двугранных угла, у которых одна грань общая, а две другие грани являются различными полуплоскостями одной плоскости. Докажите, что сумма этих двугранных углов равна 180°.

170 Из вершины B треугольника ABC, сторона AC которого лежит в плоскости α, проведён к этой плоскости перпендикуляр BB_1. Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости α, если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45°.

171 Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонён к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

172 Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен $60°$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см.

173 Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

174 Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

175 Докажите, что если все рёбра тетраэдра равны, то все его двугранные углы также равны. Найдите эти углы.

176 Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен $60°$. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$.

177 Докажите, что плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

178 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Докажите, что любая прямая плоскости α, перпендикулярная к прямой c, перпендикулярна к плоскости β.

Решение

Проведём в плоскости α произвольную прямую AC, перпендикулярную к прямой c, $C \in c$. Докажем, что $CA \perp \beta$.

В плоскости β через точку C проведём прямую CB, перпендикулярную к прямой c. Так как $CA \perp c$ и $CB \perp c$, то $\angle ACB$ — линейный угол одного из двугранных углов, образованных плоскостями α и β. По условию задачи $\alpha \perp \beta$, поэтому $\angle ACB$ — прямой, т. е. $CA \perp CB$. Таким образом, прямая CA перпендикулярна к двум пересекающимся прямым c и CB плоскости β, поэтому $CA \perp \beta$.

179 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Через некоторую точку плоскости α проведена прямая, перпендикулярная к плоскости β. Докажите, что эта прямая лежит в плоскости α.

180 Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая, перпендикулярные к одной и той же плоскости, параллельны.

181 Плоскости α и β пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB соответственно к плоскостям α и β. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. Докажите, что $MC \perp a$.

182 Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой a. Из точки M проведены перпендикуляры MA и MB к этим плоскостям. Прямая a пересекает плоскость AMB в точке C. а) Докажите, что четырёхугольник $ACBM$ является прямоугольником. б) Найдите расстояние от точки M до прямой a, если $AM = m$, $BM = n$.

183 Плоскости α и β пересекаются по прямой a и перпендикулярны к плоскости γ. Докажите, что прямая a перпендикулярна к плоскости γ.

184 Общая сторона AB треугольников ABC и ABD равна 10 см. Плоскости этих треугольников взаимно перпендикулярны. Найдите CD, если треугольники: а) равносторонние; б) прямоугольные равнобедренные с гипотенузой AB.

185 Прямая a не перпендикулярна к плоскости α. Докажите, что существует плоскость, проходящая через прямую a и перпендикулярная к плоскости α.

Решение

Через произвольную точку M прямой a проведём прямую p, перпендикулярную к плоскости α, и рассмотрим плоскость β, проходящую через прямые a и p. Плоскость β является искомой, так как она проходит через прямую a и по признаку перпендикулярности двух плоскостей перпендикулярна к плоскости α.

186 Докажите, что существует, и притом только одна, прямая, пересекающая две данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярная к каждой из них.

Решение

Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямую a и параллельную прямой b. Через прямые a и b проведём плоскости β и γ так, чтобы $\beta \perp \alpha$ и $\gamma \perp \alpha$ (задача 185). Докажите самостоятельно, что прямая p, по которой пересекаются плоскости β и γ, искомая.

Докажем, что p — единственная прямая, удовлетворяющая условию задачи. Предположим, что существуют две прямые A_1B_1 и A_2B_2, пересекающие данные скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярные к каждой из них (рис. 68). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 перпендикулярны к плоскости α (объясните почему), поэтому они параллельны. Отсюда следует, что скрещивающиеся прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых.

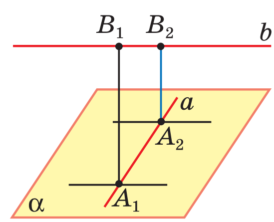


Рис. 68

187 Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

188 Ребро куба равно a. Найдите диагональ куба.

189 Найдите расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если: а) диагональ грани куба равна m; б) диагональ куба равна d.

190 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите следующие двугранные углы: а) ABB_1C; б) ADD_1B; в) A_1BB_1K, где K — середина ребра A_1D_1.

191 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны.

192 Найдите тангенс угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

193 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано: $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = n$. Найдите расстояние между: а) прямой A_1C_1 и плоскостью ABC; б) плоскостями ABB_1 и DCC_1; в) прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

194 Ребро куба равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими: а) диагональ куба и ребро куба; б) диагональ куба и диагональ грани куба.

195 Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в 30°, а с ребром DD_1 — угол в 45°.

196 Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро AA_1 и перпендикулярной к плоскости BB_1D_1; б) ребро AB и перпендикулярной к плоскости CDA_1.

Вопросы к главе II

1 Верно ли утверждение: если две прямые в пространстве перпендикулярны к третьей прямой, то эти прямые параллельны? Верно ли это утверждение при условии, что все три прямые лежат в одной плоскости?

2 Параллельные прямые b и c лежат в плоскости α, а прямая a перпендикулярна к прямой b. Верно ли утверждение: а) прямая a перпендикулярна к прямой c; б) прямая a пересекает плоскость α?

3 Прямая a перпендикулярна к плоскости α, а прямая b не перпендикулярна к этой плоскости. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

4 Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Верно ли утверждение, что прямые a и b взаимно перпендикулярны?

5 Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b перпендикулярна к этой плоскости. Существует ли прямая, перпендикулярная к прямым a и b?

6 Верно ли утверждение, что все прямые, перпендикулярные к данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости?

7 Могут ли две плоскости, каждая из которых перпендикулярна к третьей плоскости, быть: а) параллельными плоскостями; б) перпендикулярными плоскостями?

8 Можно ли через точку пространства провести три плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны?

9 Диагональ квадрата перпендикулярна к некоторой плоскости. Как расположена другая диагональ квадрата по отношению к этой плоскости?

10 Сколько двугранных углов имеет: а) тетраэдр; б) параллелепипед?

Дополнительные задачи

197 Отрезок BM перпендикулярен к плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD перпендикулярна к плоскости MBC.

198 Точка A лежит в плоскости α, а точка B удалена от этой плоскости на расстояние 9 см. Точка M делит отрезок AB в отношении $4:5$, считая от точки A. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

199 Точка S равноудалена от вершин прямоугольного треугольника и не лежит в плоскости этого треугольника. Докажите, что прямая SM, где M — середина гипотенузы, перпендикулярна к плоскости треугольника.

200 Докажите, что любая точка прямой, которая проходит через центр окружности, описанной около многоугольника, и перпендикулярна к плоскости многоугольника, равноудалена от вершин этого многоугольника.

201 Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если точки P и Q равноудалены от концов отрезка AB.

202 Точка удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника на расстояние 10 см. На каком расстоянии от плоскости треугольника находится эта точка, если медиана, проведённая к гипотенузе, равна 5 см?

203 Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, проведена прямая OK, перпендикулярная к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до сторон треугольника, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $OK = 4$ см.

204 Прямая OM перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC и проходит через центр O этого треугольника, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. Найдите: а) расстояние от точки M до каждой из вершин треугольника ABC и до прямых AB, BC и CA; б) длину окружности, описанной около треугольника ABC; в) площадь треугольника ABC.

205 Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника. Найдите площадь треугольника ABD, если $CA = 3$ дм, $CB = 2$ дм, $CD = 1$ дм.

206 Стороны треугольника равны 17 см, 15 см и 8 см. Через вершину A меньшего угла треугольника проведена прямая AM, перпендикулярная к его плоскости. Определите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, если известно, что $AM = 20$ см.

207 В треугольнике ABC дано: $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Точка M удалена от прямых AB, BC и AC на $8\frac{2}{3}$ см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если её проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.

208 Из точки K, удалённой от плоскости α на 9 см, проведены к плоскости α наклонные KL и KM, образующие между собой прямой угол, а с плоскостью α — углы в $45°$ и $30°$ соответственно. Найдите отрезок LM.

209 Углы между равными отрезками AB и AC и плоскостью α, проходящей через точку A, равны соответственно $40°$ и $50°$. Сравните расстояния от точек B и C до плоскости α.

210 На рисунке 69 двугранные углы $HABP$ и $PABQ$ равны. Докажите, что каждая точка плоскости ABP равноудалена от плоскостей ABH и ABQ.

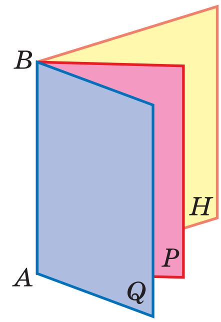


Рис. 69

211 Плоскости правильного треугольника KDM и квадрата $KMNP$ взаимно перпендикулярны. Найдите DN, если $KM = a$.

212 Точка C является проекцией точки D на плоскость треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника ABD равна $\frac{S}{\cos\alpha}$, где S — площадь треугольника ABC, а α — угол между плоскостями ABC и ABD.

213 Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что вершина D проектируется в центр треугольника ABC. Вычислите угол между плоскостями этих треугольников.

214 Проекцией прямоугольника $ABCD$ на плоскость α является квадрат ABC_1D_1. Вычислите угол φ между плоскостью α и плоскостью прямоугольника $ABCD$, если $AB : BC = 1 : 2$.

215 Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, равного $60°$. Точки A и D удалены от ребра двугранного угла соответственно на 8 см и 6,5 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

216 Точки A и B лежат на ребре данного двугранного угла, равного $120°$. Отрезки AC и BD проведены в разных гранях и перпендикулярны к ребру двугранного угла. Найдите отрезок CD, если $AB = AC = BD = a$.

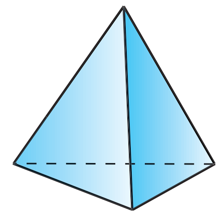
217 Сумма площадей трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его рёбра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

Глава III
Многогранники

§ 1 Понятие многогранника. Призма

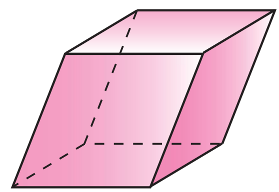
27 Понятие многогранника

В главе I мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр — поверхность, составленная из четырёх треугольников (рис. 70, *а*), параллелепипед — поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 70, *б*). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства.



а)

Тетраэдр

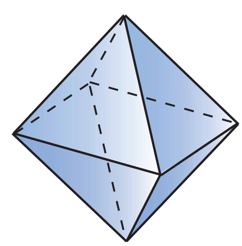


б)

Параллелепипед

Рис. 70

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или **многогранником**. Тетраэдр и параллелепипед — примеры многогранников. На рисунке 71 изображён ещё один многогранник — **октаэдр**. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником, часто также называют многогранником.



Октаэдр

Рис. 71

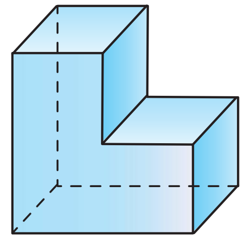
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**[1]. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, *а* и 71), гранями параллелепипеда — параллелограммы (рис. 70, *б*). Стороны граней называются **рёбрами**, а концы рёбер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости — **сечением** многогранника.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоско-

[1] При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости.

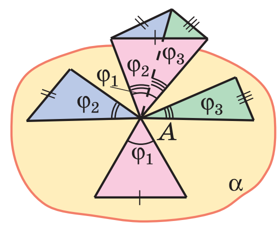
сти каждой его грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр — выпуклые многогранники. На рисунке 72 изображён **невыпуклый** многогранник.

Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Отметим также, что в **выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°** (см. п. 26). Рисунок 73 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль рёбер и все его грани с общей вершиной A развёрнуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е. $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$, меньше 360°.



Невыпуклый многогранник

Рис. 72



$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360°$

Рис. 73

28* Геометрическое тело

Мы отметили, что многогранник ограничивает некоторое геометрическое тело. Уточним понятие геометрического тела.

Точка M называется **граничной** точкой данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней точек (включая её саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется её **границей**. Так, например, границей шара является сфера.

Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется **внутренней** точкой фигуры. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре. Так, любая точка шара, не лежащая на сфере — его границе, является внутренней точкой шара.

Фигура называется **ограниченной**, если её можно заключить в какую-нибудь сферу. Очевидно, шар, тетраэдр, параллелепипед — ограниченные фигуры, а прямая и плоскость — неограниченные.

Фигура называется **связной**, если любые две её точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Примерами связных фигур являются тетраэдр (см. рис. 70, *а*), параллелепипед (см. рис. 70, *б*), октаэдр (см. рис. 71), плоскость. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическим телом (или просто телом) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причём сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его **поверхностью** и говорят, что поверхность **ограничивает** тело.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью**. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется **сечением** тела.

29* Теорема Эйлера

Сейчас мы докажем удивительную теорему, связанную с именем выдающегося математика Леонарда Эйлера (1707—1783), швейцарца по происхождению, большую часть жизни работавшего в России.

Теорема

В любом выпуклом многограннике сумма числа граней и числа вершин больше числа рёбер на 2.

Доказательство

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, имеющий e вершин, f граней и k рёбер. Докажем, что $f + e - k = 2$.

Выберем произвольную грань G, отметим какую-нибудь точку M её внутренней области и проведём из неё луч h, перпендикулярный к плоскости этой грани и лежащий по ту сторону от неё, по которую нет точек многогранника. Если плоскости каких-либо других граней пересекают луч h, то выберем на нём точку O, лежащую между M и ближайшей к M точкой пересечения; в противном случае возьмём в качестве точки O произвольную точку луча h (рис. 74). Тогда точка O окажется лежащей по ту же сторону от плоскости каждой грани многогранника, отличной от G, что и сам многогранник.

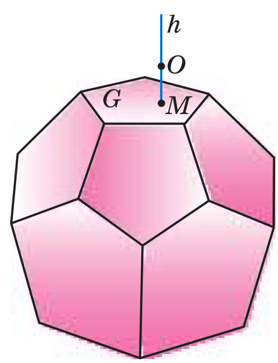


Рис. 74

Удалим теперь грань G. В результате получим многогранную поверхность F, имеющую те же рёбра и вершины, что и исходный многогранник, число граней которой равно $f-1$. Любой луч с началом O пересекает поверхность F не более чем в одной точке (поскольку после пересечения лучом поверхности F он «уходит» в то полупространство, в котором точек поверхности F нет). Примем точку O за центр проектирования и рассмотрим центральную проекцию поверхности F на плоскость грани G (рис. 75; грань G на этом рисунке изображена в увеличенном масштабе). Она представляет собой грань G, составленную из $f-1$ выпуклых многоугольников — проекций остальных граней (докажите, что эти многоугольники — выпуклые). Число вершин этих многоугольников равно e, а число сторон равно k. Если провести диагональ какого-нибудь из них, то число вершин не изменится, число многоугольников увеличится на 1, число сторон также увеличится на 1, поэтому разность числа многоугольников и числа сторон не изменится (см. рис. 75). Следовательно, если каждый многоугольник разделить диагоналями на треугольники, то грань G окажется разделённой на f' треугольников с e' вершинами и k' сторонами, причём

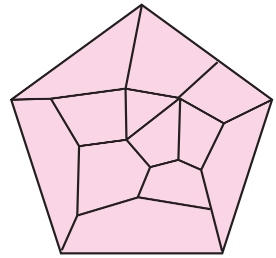


Рис. 75

$$f' + e' - k' = (f-1) + e - k.$$

Пусть n — число сторон грани G. Каждый из треугольников имеет три стороны, поэтому число k' меньше числа $3f'$ на число сторон, каждая из которых принадлежит одновременно двум треугольникам, т. е. на $k'-n$:

$$k' = 3f' - (k' - n).$$

Отсюда получаем:

$$n = 2k' - 3f'.$$

Сумма углов всех треугольников, с одной стороны, равна $f' \cdot 180°$, с другой — сумме углов n-угольника G плюс $360°$, умноженных на число $e'-n$ вершин, лежащих внутри G:

$$f' \cdot 180° = (n-2) \cdot 180° + 360° \cdot (e' - n).$$

Отсюда находим $f' = 2e' - n - 2 = 2e' - (2k' - 3f') - 2$,

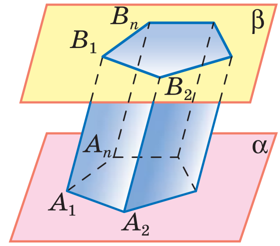
т. е. $f' + e' - k' = 1$.

Но $f' + e' - k' = (f-1) + e - k$. Следовательно,

$$f + e - k = 2.$$

Теорема доказана.

30 Призма



Призма. Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ — основания призмы. Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — боковые грани

Рис. 76

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырёхугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \dots,\ A_nA_1B_1B_n \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 — по свойству параллельных плоскостей, пересечённых третьей плоскостью (п. 11).

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой** (см. рис. 76).

Многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются **основаниями**, а параллелограммы (1) — **боковыми гранями** призмы.

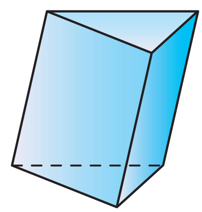
Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** призмы. Эти рёбра как противоположные стороны параллелограммов (1), последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны.

Призму с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ и называют ***n*-угольной призмой**. На рисунке 77 изображены треугольная и шестиугольная призмы, а на рисунке 70, *б* — четырёхугольная призма, являющаяся параллелепипедом.

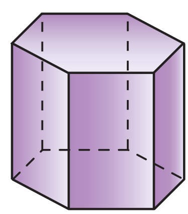
Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** призмы.

Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противном случае — **наклонной**. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.



Наклонная треугольная призма



Правильная шестиугольная призма

Рис. 77

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней, а **площадью боковой поверхности призмы** — сумма площадей её боковых граней. Площадь $S_{\text{полн}}$ полной поверхности выражается через площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности и площадь $S_{\text{осн}}$ основания призмы формулой

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы — прямоугольники, основания которых — стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак,

$$S_{\text{бок}} = Ph.$$

Теорема доказана.

31* Пространственная теорема Пифагора

Решим сначала такую задачу.

Задача

Найти площадь S_1 прямоугольной проекции многоугольника с площадью S на плоскость α, если угол между плоскостью многоугольника и плоскостью α равен φ $(0° < \varphi < 90°)$.

Решение

а) Начнём с того случая, когда данный многоугольник является треугольником, одна из сторон которого лежит в плоскости α. Обратимся к рисунку 78, *а*, на котором сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, отрезок CC_1 — перпендикуляр, проведённый из точки C к плоскости α, и, следовательно, треугольник ABC_1 — проекция треугольника ABC на эту плоскость. Пусть отрезок C_1H — высота треугольника ABC_1. Тогда отрезок CH — высота треугольника ABC (по теореме о трёх перпендикулярах), а $\angle CHC_1 = \varphi$ (объясните почему). Так как

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot C_1H,$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH,$$

$$C_1H = CH \cdot \cos\varphi,$$

то

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi. \qquad (2)$$

б) Если сторона AB данного треугольника ABC параллельна плоскости α (рис. 78, *б*; на этом рисунке треугольник $A_1B_1C_1$ — проекция треугольника ABC, плоскость ABC_2 параллельна плоскости α), то, согласно доказанному, площадь треугольника ABC_2 равна $S \cdot \cos\varphi$.

Но треугольник ABC_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ (докажите это), поэтому его площадь равна S_1. Таким образом, и в этом случае площадь S_1 проекции треугольника ABC с площадью S выражается формулой (2).

в) Рассмотрим, наконец, произвольный многоугольник с площадью S. Разобьём его на треугольники.

Если ни одна из сторон какого-то из них не параллельна плоскости α и не лежит в ней, то разобьём этот треугольник на два треугольника отрезком, проведённым через одну из его вершин параллельно плоскости α (рис. 78, *в*), либо в самой плоскости α (рис. 78, *г*).

Выразим площадь проекции каждого треугольника по формуле (2) и сложим эти площади. Вынеся за скобки общий множитель $\cos\varphi$, получим в скобках сумму площадей треугольников, т. е. площадь S данного многоугольника.

Таким образом, площадь S_1 проекции многоугольника выражается формулой (2).

Воспользуемся этим для доказательства утверждения, получившего название **пространственная теорема Пифагора**.

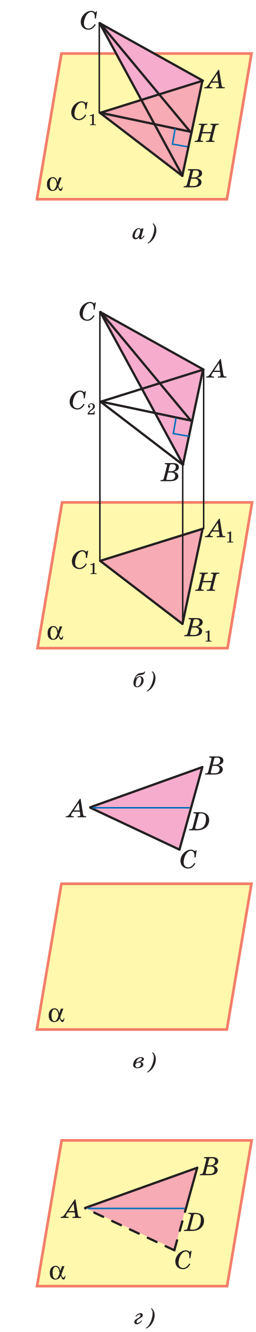


Рис. 78

Теорема

Если все плоские углы при одной из вершин тетраэдра — прямые, то квадрат площади грани, противолежащей этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней.

Доказательство

Рассмотрим тетраэдр $OABC$, в котором $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$. Пусть S_C, S_A, S_B и S — площади треугольников OAB, OBC, OCA и ABC, α, β, γ — величины двугранных углов с рёбрами AB, BC, CA, точка D — проекция точки O на плоскость грани ABC (рис. 79). Поскольку $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$ (докажите это), то точка D лежит внутри треугольника ABC. Треугольники OAB, OBC и OCA являются проекциями треугольника ABC, поэтому

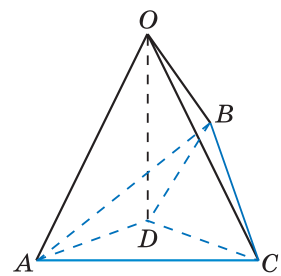


Рис. 79

$$S_C = S\cos\alpha,\ S_A = S\cos\beta,\ S_B = S\cos\gamma.$$

Треугольники DAB, DBC и DCA являются проекциями треугольников OAB, OBC и OCA на плоскость грани ABC, причём сумма площадей этих треугольников равна площади S треугольника ABC. Таким образом,

$$(S\cos\alpha)\cdot\cos\alpha + (S\cos\beta)\cdot\cos\beta + (S\cos\gamma)\cdot\cos\gamma =$$
$$= S(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S.$$

Следовательно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Поэтому

$$S_C^2 + S_A^2 + S_B^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S^2.$$

Теорема доказана.

Задачи

218 Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани — прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

219 В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

220 Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

221 Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

222 Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двугранные углы при боковых рёбрах призмы.

223 Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.

224 Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону нижнего основания и противолежащую сторону верхнего основания, если диагональ основания равна $4\sqrt{2}$ см.

225 Диагональ правильной четырёхугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол в 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

226 В правильной четырёхугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а её высота равна 4 см.

227 Основание призмы — правильный треугольник ABC. Боковое ребро AA_1 образует равные углы со сторонами основания AC и AB. Докажите, что: а) $BC \perp AA_1$; б) CC_1B_1B — прямоугольник.

228 Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см, а боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол в 45°. Проекцией вершины A_1 является точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите площадь грани CC_1B_1B.

229 В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: а) $n = 3$, $a = 10$ см, $h = 15$ см; б) $n = 4$, $a = 12$ дм, $h = 8$ дм; в) $n = 6$, $a = 23$ см, $h = 5$ дм; г) $n = 5$, $a = 0{,}4$ м, $h = 10$ см.

230 Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

231 Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений[1] равна 130 см^2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

232 Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из боковых граней — угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

---

[1] Сечение параллелепипеда называется диагональным, если оно содержит какую-нибудь его диагональ и боковое ребро.

233 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Через ребро BB_1 проведено сечение BB_1D_1D, перпендикулярное к плоскости грани AA_1C_1C. Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см.

234 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

235 Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с острым углом φ. Через катет, противолежащий этому углу, и через противоположную этому катету вершину основания проведено сечение, составляющее угол θ с плоскостью основания. Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади сечения.

236 Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения[1] на боковое ребро.

237 Боковое ребро наклонной четырёхугольной призмы равно 12 см, а перпендикулярным сечением является ромб со стороной 5 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

238 В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро, отстоящее от двух других боковых рёбер на 12 см и 35 см, равно 24 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

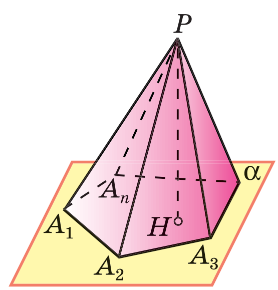
§ 2 Пирамида

32 Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис. 80):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ \ldots,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$

Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и n треугольников (1), называется **пирамидой**. Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ называется **основанием**, а треугольники (1) — **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной**

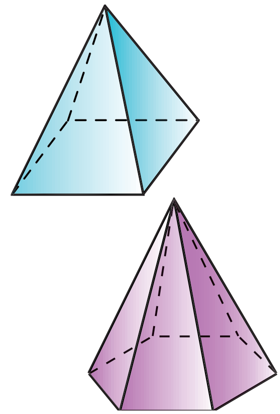


Пирамида. Многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — основание пирамиды. Треугольники A_1PA_2, A_2PA_3, …, A_nPA_1 — боковые грани, P — вершина пирамиды

Рис. 80

[1] Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется её сечение плоскостью, перпендикулярной к боковым рёбрам и пересекающей их.

пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — её **боковыми рёбрами**. Пирамиду с основанием $A_1A_2 \ldots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2 \ldots A_n$ — и называют n-угольной пирамидой. На рисунке 81 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида — это тетраэдр.



Четырёхугольная и шестиугольная пирамиды

Рис. 81

Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется **высотой** пирамиды. На рисунке 80 отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т. е. основания и боковых граней), а **площадью боковой поверхности пирамиды** — сумма площадей её боковых граней. Очевидно, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

33 Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания[1], является её высотой (рис. 82).

Докажем, что **все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.**

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2 \ldots A_n$ (см. рис. 82). Сначала докажем, что все боковые рёбра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота PO пирамиды, а другим — радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 — гипотенуза треугольника OPA_1, в котором $OP = h$, $OA_1 = R$). По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 + R^2}$, поэтому

$$PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n.$$

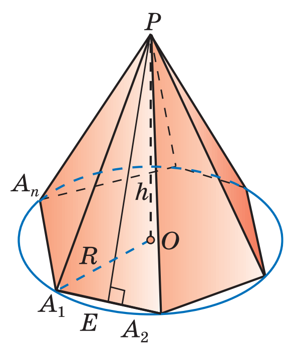


Рис. 82

Мы доказали, что боковые рёбра правильной пирамиды $PA_1A_2 \ldots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани — равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный многоугольник. Следовательно, боковые гра-

[1] Напомним, что центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него окружности.

ни равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**. На рисунке 82 отрезок PE — одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $\frac{1}{2}d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр. Теорема доказана.

34 Усечённая пирамида

Возьмём произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ и проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра в точках $B_1, B_2, \dots, B_n$ (рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ **(нижнее и верхнее основания)**, расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ **(боковые грани)**, называется **усечённой пирамидой**.

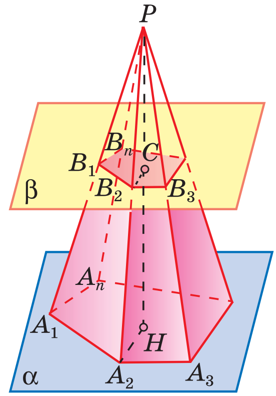
Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** усечённой пирамиды.

Усечённую пирамиду с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают так:

$$A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n.$$

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой** усечённой пирамиды. На рисунке 83 отрезок CH является высотой усечённой пирамиды.

Докажем, что **боковые грани усечённой пирамиды — трапеции**. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β. Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P. Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции.



Усечённая пирамида

Рис. 83

Усечённая пирамида называется **правильной**, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются **апофемами. Площадью боковой поверхности усечённой пирамиды** называется сумма площадей её боковых граней.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

▼ Докажите эту теорему самостоятельно. △

Задачи

239 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если высота её проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

240 Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

241 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

242 Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Наибольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

243 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см; ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

244 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, а катет AC равен 21 см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

245 Основанием пирамиды является прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Плоскости двух боковых граней перпендикулярны к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с основанием углы в 30° и 45°. Найдите площадь поверхности пирамиды.

246 Высота треугольной пирамиды равна 40 см, а высота каждой боковой грани, проведённая из вершины пирамиды, равна 41 см. а) Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в её основание. б) Найдите площадь основания пирамиды, если его периметр равен 42 см.

247 Двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды; б) высоты всех боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны; в) площадь боковой поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани, проведённую из вершины пирамиды.

248 Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань пирамиды наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

249 В пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Докажите, что: а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания; б) все боковые рёбра пирамиды составляют равные углы с плоскостью основания.

250 Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом 120°. Боковые рёбра образуют с её высотой, равной 16 см, углы в 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

251 Основанием пирамиды $DABC$ является прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Боковые рёбра пирамиды равны друг другу, а её высота равна 12 см. Найдите боковое ребро пирамиды, если $BC = 10$ см.

252 Основанием пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором стороны AB и AC равны, $BC = 6$ см, высота AH равна 9 см. Известно также, что $DA = DB = DC = 13$ см. Найдите высоту пирамиды.

253 Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 6 см и $4\sqrt{6}$ см и высотой 5 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите её высоту.

254 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, высота равна H. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды; в) угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) угол между боковой гранью и основанием пирамиды; д) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

255 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту этой пирамиды.

256 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α. Найдите: а) высоту пирамиды; б) боковое ребро пирамиды; в) угол между боковой гранью и плоскостью основания; г) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

257 Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при стороне основания равен $45°$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

258 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды образует угол в $60°$ с плоскостью основания. Найдите площадь поверхности пирамиды, если боковое ребро равно 12 см.

259 В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $60°$. Найдите боковое ребро пирамиды.

260 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро DC и высоту DO пирамиды проведена плоскость α. Докажите, что: а) ребро AB перпендикулярно к плоскости α; б) перпендикуляр, проведённый из вершины C к апофеме грани ADB, является перпендикуляром к плоскости ADB.

261 Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра взаимно перпендикулярны.

262 Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

263 В правильной пирамиде $MABCD$ точки K, L и N лежат соответственно на рёбрах BC, MC и AD, причём $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLN и определите вид сечения. б) Докажите, что плоскость KLN параллельна плоскости AMB.

264 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведённого через вершину пирамиды и большую диагональ основания.

265 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Через сторону основания проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь получившегося сечения, если сторона основания пирамиды равна 12 см.

266 Основанием пирамиды, высота которой равна 2 дм, а боковые рёбра равны друг другу, является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Найдите площадь сечения, проведённого через диагональ основания параллельно боковому ребру.

267 Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Докажите, что боковые рёбра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части.

268 Плоскость, параллельная плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды. Апофема полученной усечённой пирамиды равна 4 дм, а площадь её полной поверхности равна 186 дм^2. Найдите высоту усечённой пирамиды.

269 Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.

270 Основаниями усечённой пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см соответственно. Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно к плоскостям оснований и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.

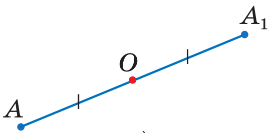
§ 3 Правильные многогранники

35 Симметрия в пространстве

В планиметрии мы рассматривали фигуры, симметричные относительно точки и относительно прямой. В стереометрии рассматривают симметрию относительно точки, прямой и плоскости.

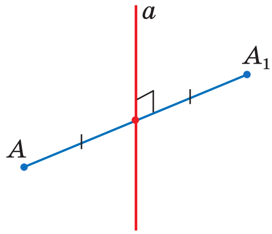
Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки O (центр симметрии)**, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 84, *а*). Точка O считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a (ось симметрии)**, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *б*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.



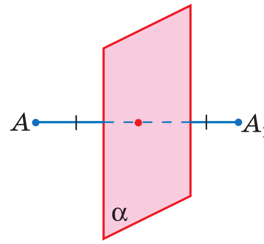
а)

Точки A и A_1 симметричны относительно точки O



б)

Точки A и A_1 симметричны относительно прямой a



в)

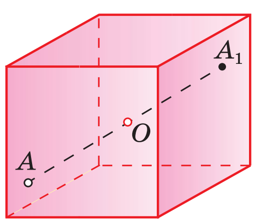
Точки A и A_1 симметричны относительно плоскости α

Рис. 84

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии)**, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *в*). Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

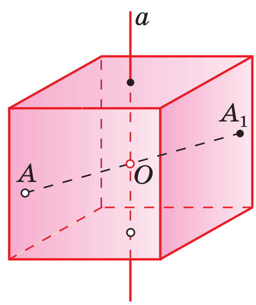
Введём понятия центра, оси и плоскости симметрии фигуры. **Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно неё некоторой точке той же фигуры.** Если фигура имеет центр (ось, плоскость симметрии), то говорят, что она обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией.

На рисунках 85, *а*, *б*, *в* показаны центр O, ось a и плоскость α симметрии прямоугольного параллелепипеда. Параллелепипед, не



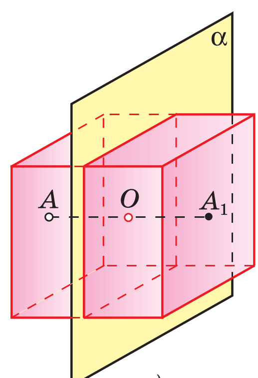
а)

Точка O — центр симметрии прямоугольного параллелепипеда



б)

Прямая a — ось симметрии прямоугольного параллелепипеда



в)

Плоскость α — плоскость симметрии прямоугольного параллелепипеда

Рис. 85

являющийся прямоугольным, но являющийся прямой призмой, имеет плоскость (или плоскости, если его основание — ромб), ось и центр симметрии.

Фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей, плоскостей симметрии). Например, куб имеет только один центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров, осей или плоскостей симметрии. Простейшими из таких фигур являются прямая и плоскость. Любая точка плоскости является её центром симметрии. Любая прямая (плоскость), перпендикулярная к данной плоскости, является её осью (плоскостью) симметрии. С другой стороны, существуют фигуры, не имеющие центров, осей или плоскостей симметрии. Например, параллелепипед, не являющийся прямой призмой, не имеет оси симметрии, но имеет центр симметрии и может иметь (подумайте, в каком случае) плоскость симметрии; призма и пирамида в общем случае не имеют ни плоскости, ни оси, ни центра симметрии (плоскость, ось или центр симметрии у этих многогранников могут быть лишь в некоторых частных случаях).

С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту. Так, многие здания симметричны относительно плоскости, например главное здание Московского государственного университета (рис. 86), некоторые виды деталей имеют ось симметрии. Почти все кристаллы, встречающиеся в природе, имеют центр, ось или плоскость симметрии (рис. 87). В геометрии центр, оси и плоскости симметрии многогранника называются **элементами симметрии** этого многогранника.

Главное здание МГУ им. М. В. Ломоносова

Рис. 86

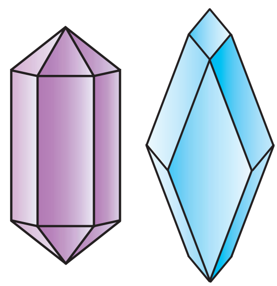
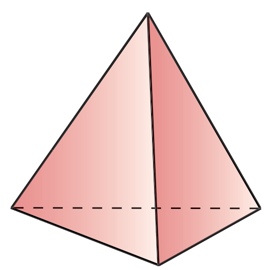


Рис. 87

36 Понятие правильного многогранника

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер. Примером правильного многогранника является куб. Все его грани — равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

Очевидно, все рёбра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны также все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.



Правильный тэтраэдр

Рис. 88

Докажем, что **не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n \geqslant 6$**. В самом деле, угол правильного n-угольника при $n \geqslant 6$ не меньше $120°$ (объясните почему). С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трёх плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани — правильные n-угольники при $n \geqslant 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем $120° \cdot 3 = 360°$. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше $360°$ (п. 27).

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трёх, четырёх или пяти равносторонних треугольников, либо трёх квадратов, либо трёх правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

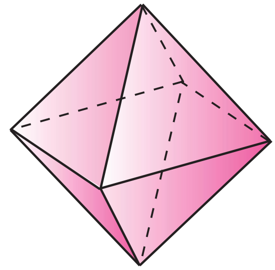
В соответствии с этим получаем следующие правильные многогранники:

Правильный тетраэдр[1] (рис. 88) составлен из четырёх равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $180°$.

Правильный октаэдр (рис. 89) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырёх треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $240°$.

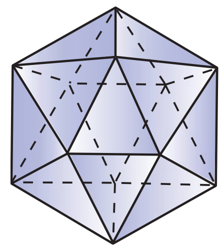
Правильный икосаэдр (рис. 90) составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $300°$.

Куб (рис. 91) составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трёх квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна $270°$.



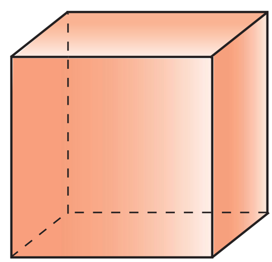
Правильный октаэдр

Рис. 89



Правильный икосаэдр

Рис. 90

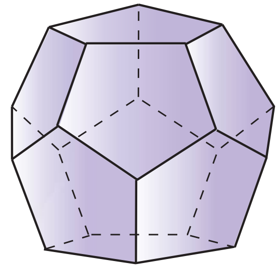


Куб

Рис. 91

[1] Мы различаем правильный тетраэдр и правильную треугольную пирамиду. В отличие от правильного тэтраэдра, все рёбра которого равны, в правильной треугольной пирамиде боковые рёбра равны друг другу, но они могут быть не равны рёбрам основания пирамиды.

Правильный додекаэдр (рис. 92) составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°.



Правильный додекаэдр

Рис. 92

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

Замечания

1. Число граней f, рёбер k и вершин e каждого из правильных многогранников можно найти с помощью теоремы Эйлера. В самом деле, пусть n — число рёбер каждой грани, m — число рёбер, сходящихся к каждой вершине. Поскольку каждое ребро принадлежит двум граням, то $nf = 2k$. Кроме того, $me = 2k$ (так как каждое ребро содержит две вершины) и по теореме Эйлера $f + e - k = 2$. Из этих трёх равенств находим:

$$f = \frac{4m}{2m + 2n - mn}, \quad k = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}, \quad e = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

Таким образом,

у правильного тетраэдра ($n = 3,\ m = 3$):

$$f = 4,\ k = 6,\ e = 4;$$

у правильного октаэдра ($n = 3,\ m = 4$):

$$f = 8,\ k = 12,\ e = 6;$$

у правильного икосаэдра ($n = 3,\ m = 5$):

$$f = 20,\ k = 30,\ e = 12;$$

у куба ($n = 4,\ m = 3$):

$$f = 6,\ k = 12,\ e = 8;$$

у правильного додекаэдра ($n = 5,\ m = 3$):

$$f = 12,\ k = 30,\ e = 20.$$

2. Мы доказали, что существует не более пяти видов правильных многогранников, но не доказали, что каждый из указанных многогранников действительно существует.

Существование правильного тетраэдра (правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и высотой, равной $\frac{\sqrt{6}}{3}a$) и куба очевидно.

Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра (докажите это), поэтому существование правильного октаэдра не вызывает сомнений.

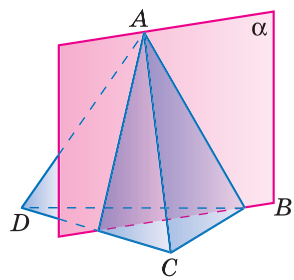
Правильный икосаэдр составлен из двух правильных пятиугольных пирамид и многогранника, отдалённо напоминающего пятиугольную призму. Высоты пирамид и этого многогранника легко выражаются через ребро a (как?), поэтому существование правильного икосаэдра также не вызывает сомнений.

Наконец, центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра (убедитесь в этом), поэтому правильный додекаэдр тоже существует.

Отметим, что в существовании всех пяти правильных многогранников можно убедиться воочию, если склеить их из развёрток (задания 271—275). △

37 Элементы симметрии правильных многогранников

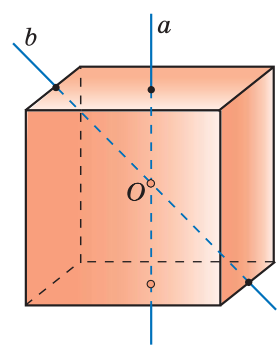
Рассмотрим элементы симметрии правильных многогранников. **Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.** Прямая, проходящая через середины двух противоположных рёбер, является его осью симметрии. Плоскость α, проходящая через ребро AB перпендикулярно к противоположному ребру CD правильного тетраэдра $ABCD$, является плоскостью симметрии (рис. 93). **Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.**



Плоскость α — плоскость симметрии правильного тетраэдра

Рис. 93

Куб имеет один центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Прямые a и b, проходящие соответственно через центры противоположных граней и середины двух противоположных рёбер, не принадлежащих одной грани, являются его осями симметрии (рис. 94). **Куб имеет девять осей симметрии.** Все оси симметрии проходят через центр симметрии. Плоскостью симметрии куба является плоскость, проходящая через любые две оси симметрии. **Куб имеет девять плоскостей симметрии.**



Прямые a и b — оси симметрии куба

Рис. 94

Правильный октаэдр, правильный икосаэдр и правильный додекаэдр имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Попробуйте подсчитать их число.

Практические задания

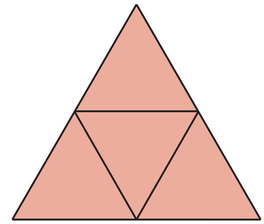
271 Перерисуйте развёртку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из неё тетраэдр.

272 Перерисуйте развёртку куба (рис. 96) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё куб.

273 Перерисуйте развёртку правильного октаэдра (рис. 97) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё октаэдр.

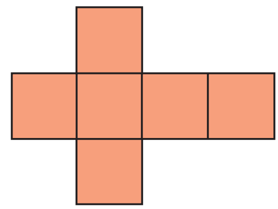
274 Перерисуйте развёртку правильного додекаэдра (рис. 98) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё додекаэдр.

275 Перерисуйте развёртку правильного икосаэдра (рис. 99) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развёртку и склейте из неё икосаэдр.



Развёртка правильного тетраэдра

Рис. 95



Развёртка куба

Рис. 96

Вопросы и задачи

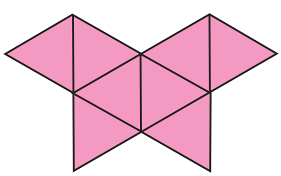
276 Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?

277 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?

278 Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырёхугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырёхугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

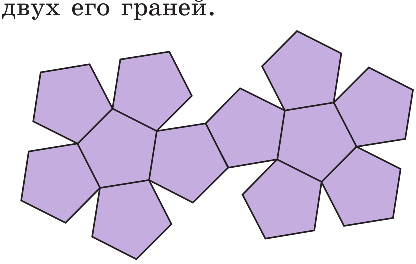
279 Найдите угол между двумя диагоналями граней куба, имеющими общий конец.

280 Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагонали двух его граней.



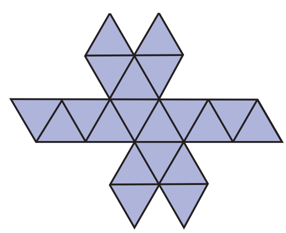
Развёртка правильного октаэдра

Рис. 97



Развёртка правильного додекаэдра

Рис. 98



Развёртка правильного икосаэдра

Рис. 99

281 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ из вершины D_1 проведены диагонали граней D_1A, D_1C и D_1B_1 и концы их соединены отрезками. Докажите, что многогранник D_1AB_1C — правильный тетраэдр. Найдите отношение площадей поверхностей куба и тетраэдра.

282 Найдите угол между двумя рёбрами правильного октаэдра, которые имеют общую вершину, но не принадлежат одной грани (см. рис. 89).

283 В правильном тетраэдре $DABC$ ребро равно a. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через центр грани ABC: а) параллельно грани BDC; б) перпендикулярно к ребру AD.

284 От каждой вершины правильного тетраэдра с ребром 2 отсекают тетраэдр с ребром 1. Какая фигура получится в результате?

285 Докажите, что в правильном тетраэдре отрезки, соединяющие центры граней, равны друг другу.

286 В правильном тетраэдре h — высота, m — ребро, а n — расстояние между центрами его граней. Выразите: а) m через h; б) n через m.

287 Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между: а) двумя его противоположными вершинами; б) центрами двух смежных граней; в) противоположными гранями.

Вопросы к главе III

1 Какое наименьшее число рёбер может иметь многогранник?

2 Призма имеет n граней. Какой многоугольник лежит в её основании?

3 Является ли призма прямой, если две её смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?

4 В какой призме боковые рёбра параллельны её высоте?

5 Является ли призма правильной, если все её рёбра равны друг другу?

6 Может ли высота одной из боковых граней наклонной призмы являться и высотой призмы?

7 Существует ли призма, у которой: а) боковое ребро перпендикулярно только одному ребру основания; б) только одна боковая грань перпендикулярна к основанию?

8 Правильная треугольная призма разбивается плоскостью, проходящей через средние линии оснований, на две призмы. Как относятся площади боковых поверхностей этих призм?

9 Будет ли пирамида правильной, если её боковыми гранями являются правильные треугольники?

10 Сколько граней, перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида?

11 Существует ли четырёхугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

12 Могут ли все грани треугольной пирамиды быть прямоугольными треугольниками?

13 Можно ли из куска проволоки длиной 66 см изготовить каркасную модель правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания, равной 10 см?

14 На какие многогранники рассекается треугольная призма плоскостью, проходящей через вершину верхнего основания и противолежащую ей сторону нижнего основания?

Дополнительные задачи

288 Докажите, что число вершин любой призмы чётно, а число рёбер кратно 3.

289 Докажите, что площадь полной поверхности куба равна $2d^2$, где d — диагональ куба.

290 Угол между диагональю основания прямоугольного параллелепипеда, равной l, и одной из сторон основания равен φ. Угол между этой стороной и диагональю параллелепипеда равен θ. Найдите площадь боковой поверхности данного параллелепипеда.

291 В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с плоскостью основания угол φ, а с одной из сторон основания — угол θ. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

292 В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 6 см, боковое ребро равно 8 см. Найдите расстояние от стороны основания до не пересекающей её диагонали призмы.

293 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали B_1D и D_1B взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между диагоналями A_1C и B_1D призмы равен $60°$.

294 Правильная четырёхугольная призма пересечена плоскостью, содержащей две её диагонали. Площадь сечения равна S_0, а сторона основания a. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.

295 Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб. Боковое ребро CC_1 составляет равные углы со сторонами основания CD и CB. Докажите, что: а) $CC_1 \perp BD$; б) BB_1D_1D — прямоугольник; в) $BD \perp AA_1C_1$; г) $AA_1C_1 \perp BB_1D_1$.

296 Высота правильной треугольной призмы равна h. Плоскость α, проведённая через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол φ. Найдите площадь сечения призмы плоскостью α.

297 Основанием треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC, BD — высота этого треугольника, а вершина A_1 проектируется в его центр. Докажите, что: а) $A_1BD \perp AA_1C_1$; б) $AA_1O \perp BB_1C$; в) грань BB_1C_1C — прямоугольник.

298 Основание параллелепипеда с боковым ребром b — квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания равноудалена от вершин нижнего основания. Найдите площадь полной поверхности.

299 Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна m, а площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания.

300 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, F и P — середины сторон BC, AB и AD. Определите вид сечения, проходящего через эти точки, и найдите его площадь, если сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b.

301 Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды $DABC$ равен $120°$. Расстояние от вершины B до бокового ребра DA равно 16 см. Найдите апофему пирамиды.

302 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 3 см и 7 см и одной из диагоналей 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найдите боковые рёбра пирамиды.

303 Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол в $120°$, а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в $30°$. Найдите площадь поверхности пирамиды, если её высота равна 12 см.

304 В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $60°$. Докажите, что двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды вдвое меньше двугранного угла при боковом ребре.

305 В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна h, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности.

306 Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h и составляет угол φ с плоскостью боковой грани. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

307 В правильной пирамиде $MABCD$ $AM = b$, $AD = a$. а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через диагональ BD основания параллельно ребру MA, и найдите площадь сечения. б) Докажите, что точки M и C равноудалены от плоскости α.

308 Основанием пирамиды является ромб со стороной 5 см и меньшей диагональю 6 см. Высота пирамиды, равная 3,2 см, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите высоты боковых граней пирамиды, проведённые из её вершины.

309 Основанием пирамиды с равными боковыми рёбрами является прямоугольник со сторонами 6 дм и 8 дм. Высота пирамиды равна 6 дм. Найдите площадь сечения, проведённого через меньшую сторону и середину высоты.

310 В пирамиде $DABC$ ребро DA перпендикулярно к плоскости ABC. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB = AC = 25$ см, $BC = 40$ см, $DA = 8$ см.

311 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник со сторонами $AC = 13$ см, $AB = 15$ см, $CB = 14$ см. Боковое ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. а) Найдите площадь полной поверхности пирамиды. б) Докажите, что основание перпендикуляра, проведённого из вершины A к плоскости грани BDC, лежит на высоте этой грани, и найдите длину этого перпендикуляра.

312 В правильной n-угольной пирамиде боковые грани составляют с плоскостью основания угол φ. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и боковым ребром.

313 Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 12 дм и 6 дм, а её высота 1 дм. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

314 В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде высота равна 63 см, апофема — 65 см, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Найдите стороны оснований пирамиды.

315 Докажите, что центры граней правильного октаэдра являются вершинами куба.

316 Докажите, что центры граней правильного тетраэдра являются вершинами другого правильного тетраэдра.

317 Докажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра.

318 Докажите, что сумма двугранного угла правильного тетраэдра и двугранного угла правильного октаэдра равна 180°.

319 Сколько плоскостей симметрии, проходящих через данную вершину, имеет правильный тетраэдр?

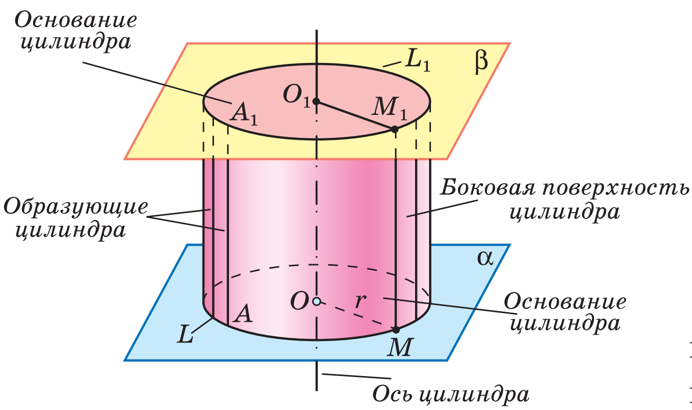
Глава IV
Цилиндр, конус и шар

§ 1 Цилиндр

38 Понятие цилиндра

Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **цилиндрической поверхностью**, а сами прямые — **образующими цилиндрической поверхности**. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, называется **осью цилиндрической поверхности**. Поскольку все образующие и ось перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны друг другу (см. п. 16).

Рассмотрим теперь плоскость β, параллельную плоскости α (рис. 100). Отрезки образующих, заключённые между плоскостями α и β, параллельны и равны друг другу (см. п. 11). По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же, расположенные в плоскости β, заполняют окруж-



Цилиндр

Рис. 100

ность L_1 с центром O_1 радиуса r, где O_1 — точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности. В самом деле, рассмотрим, например, отрезок MM_1 образующей (см. рис. 100). Так как $OO_1 \perp OM$, $MM_1 \perp OM$ и $OO_1 = MM_1$, то четырёхугольник OMM_1O_1 — прямоугольник, поэтому $O_1M_1 = OM = r$, а это означает, что точка M_1 лежит на окружности L_1 с центром O_1 радиуса r.

Очевидно, верно и обратное: любая точка M_1 окружности L_1 является концом отрезка MM_1 образующей, проходящей через точку M окружности L и перпендикулярной к плоскости α. Таким образом, цилиндрическая поверхность пересекается с плоскостью β по окружности L_1.

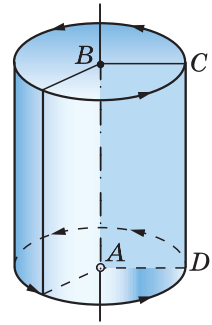
Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (см. рис. 100). Круги называются **основаниями цилиндра**, отрезки образующих, заключённые между основаниями, — **образующими цилиндра**, а образованная ими часть цилиндрической поверхности — **боковой поверхностью цилиндра**. Ось цилиндрической поверхности называется **осью цилиндра**.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой цилиндра**, а радиус основания — **радиусом цилиндра**.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 101 изображён цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания — вращением сторон BC и AD.

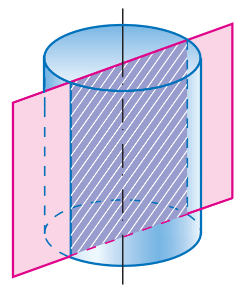
Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник (рис. 102), две стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом. В самом деле, такая секущая плоскость (плоскость γ на рисунке 103) отсекает от данного цилиндра тело, также являющееся цилиндром. Его основаниями служат два круга, один из которых и есть рассматриваемое сечение.



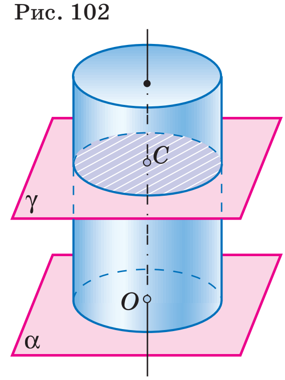
Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB

Рис. 101



Осевое сечение цилиндра — прямоугольник

Рис. 102



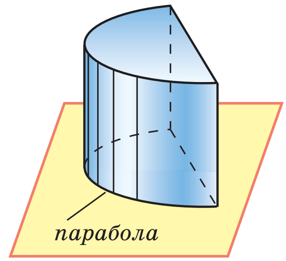
Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, — круг

Рис. 103

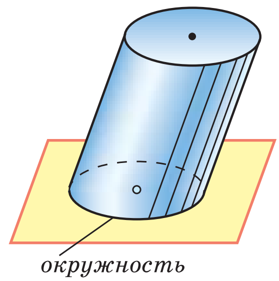
Замечание

На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров. На рисунке 104, *а* изображён цилиндр, каждое основание которого представляет собой фигуру, ограниченную частью параболы и отрезком. На рисунке 104, *б* изображён цилиндр, основаниями которого являются круги, но образующие цилиндра не перпендикулярны к плоскостям оснований (наклонный цилиндр).

Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндры, которые были определены в этом пункте. Их называют иногда **прямыми круговыми цилиндрами**.



а)



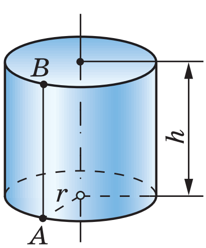
б)

Рис. 104

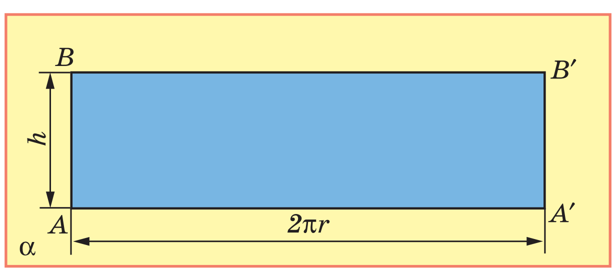
39 Площадь поверхности цилиндра

На рисунке 105, *а* изображён цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (рис. 105, *б*). В результате в плоскости α получится прямоугольник $ABB'A'$. Стороны AB и $A'B'$ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей AB. Этот прямоугольник называется **развёрткой боковой поверхности цилиндра**. Основание AA' прямоугольника является развёрткой окружности основания цилиндра, а высота AB — образующей цилиндра, поэтому $AA' = 2\pi r$, $AB = h$, где r — радиус цилиндра, h — его высота.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развёртки.



а)



б)

Развёртка боковой поверхности цилиндра

Рис. 105

Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi rh$, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{бок} = 2\pi rh.$$

Итак, **площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.**

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу

$$S_{цил} = 2\pi r(r + h).$$

Задачи

320 Докажите, что осевое сечение цилиндра является прямоугольником, две противоположные стороны которого — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра. Найдите диагональ осевого сечения, если радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота равна 4 м.

321 Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите: а) высоту цилиндра; б) радиус цилиндра; в) площадь основания цилиндра.

322 Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

323 Осевые сечения двух цилиндров равны. Верно ли, что высоты двух цилиндров равны, если равны их осевые сечения?

324 Площадь осевого сечения цилиндра равна 10 м^2, а площадь основания равна 5 м^2. Найдите высоту цилиндра.

325 Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\sqrt{3}\pi : 4$. Найдите: а) угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания; б) угол между диагоналями осевого сечения.

326 Концы отрезка AB лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен r, его высота — h, а расстояние между прямой AB и осью цилиндра равно d. Найдите: а) h, если $r = 10$ дм, $d = 8$ дм, $AB = 13$ дм; б) d, если $h = 6$ см, $r = 5$ см, $AB = 10$ см.

327 Докажите, что если секущая плоскость параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра меньше его радиуса, то сечение цилиндра представляет собой прямоугольник, две противоположные стороны которого — образующие цилиндра.

328 Высота цилиндра равна 8 см, радиус равен 5 см. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 3 см.

329 Высота цилиндра равна 12 см, а радиус основания равен 10 см. Цилиндр пересечён плоскостью, параллельной его оси, так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости.

330 Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удалённой на 9 дм от неё, равна 240 дм^2. Найдите радиус цилиндра.

331 Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ.

332 Высота цилиндра равна h, а площадь осевого сечения равна S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между осью цилиндра и плоскостью сечения равно d.

333 Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна h, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно d.

334 Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $60°$. Образующая цилиндра равна $10\sqrt{3}$ см, расстояние от оси до секущей плоскости равно 2 см. Найдите площадь сечения.

335 Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

336 Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

337 Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

338 Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания 1,5 м и высотой 3 м, если на один квадратный метр расходуется 200 г краски?

339 Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

340 Сколько квадратных метров листовой жести пойдёт на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади её боковой поверхности?

341 Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения равен φ, площадь основания цилиндра равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

342 Угол между диагоналями развёртки боковой поверхности цилиндра равен φ, диагональ равна d. Найдите площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

343 Из квадрата, диагональ которого равна d, свёрнута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.

344 Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите площадь:
а) осевого сечения цилиндра; б) боковой поверхности цилиндра; в) полной поверхности цилиндра.

345 Один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр — вращением этого же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB = a$, $BC = b$.

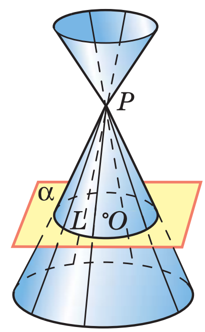
§ 2 Конус

40 Понятие конуса

Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP, перпендикулярную к плоскости α этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведём прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **конической поверхностью** (рис. 106), а сами прямые — **образующими конической поверхности**. Точка P называется **вершиной**, а прямая OP — **осью конической поверхности**.

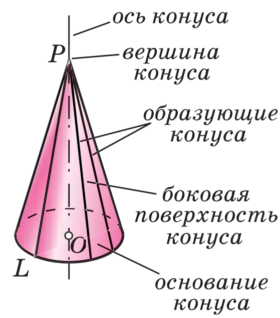
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом** (рис. 107). Круг называется **основанием конуса**, вершина конической поверхности — **вершиной конуса**, отрезки образующих, заключённые между вершиной и основанием, — **образующими конуса**, а образованная ими часть конической поверхности — **боковой поверхностью конуса**. Ось конической поверхности называется **осью конуса**, а её отрезок, заключённый между вершиной и основанием, — **высотой конуса**. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу (обоснуйте это).

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке 108 изображён конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC, а основание — вращением катета BC.



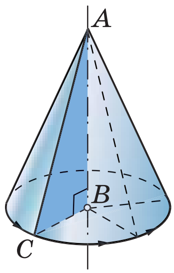
Коническая поверхность

Рис. 106



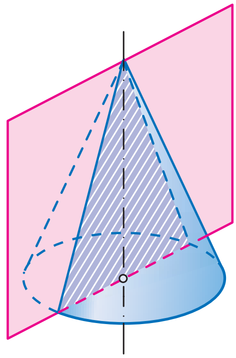
Конус

Рис. 107



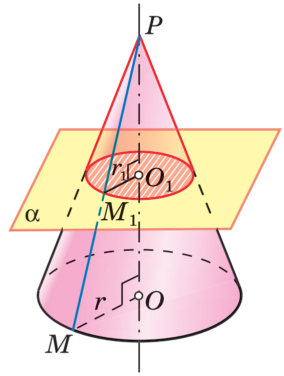
Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB

Рис. 108



Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник

Рис. 109



Сечение конуса плоскостью α, перпендикулярной к его оси, — круг с центром O_1 радиуса $r_1 = \frac{PO_1}{PO}r$

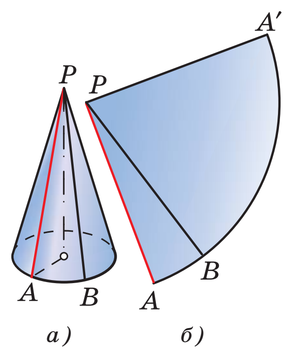
Рис. 110

Рассмотрим сечения конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса (рис. 109), то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого — диаметр основания конуса, а боковые стороны — образующие конуса. Это сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP конуса (рис. 110), то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1, расположенным на оси конуса. Радиус r_1 этого круга равен $\frac{PO_1}{PO}r$, где r — радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1M_1. Доказательство этого факта приведено в решении задачи 355.

41 Площадь поверхности конуса

Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих (рис. 111, *а*, *б*). **Развёрткой боковой поверхности конуса** является круговой сектор (см. рис. 111, *б*), радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.



Развёртка боковой поверхности конуса

Рис. 111

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь её развёртки. Выразим площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности конуса через его образующую l и радиус основания r. Площадь кругового сектора — развёртки боковой поверхности конуса (см. рис. 111, *б*) — равна $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$, где α — градусная мера дуги ABA', поэтому

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha. \qquad (1)$$

Выразим α через l и r. Так как длина дуги ABA' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$, откуда $\alpha = \frac{360r}{l}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l. \qquad (2)$$

Таким образом, **площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.**

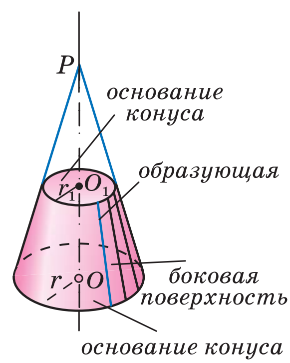
Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{\text{кон}}$ полной поверхности конуса получается формула

$$S_{\text{кон}} = \pi r(l + r).$$

42 Усечённый конус

Возьмём произвольный конус и проведём секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей (верхняя на рисунке 112) представляет собой конус, а другая называется **усечённым конусом.** Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются **основаниями** усечённого конуса, а отрезок, соединяющий их центры,— **высотой** усечённого конуса.

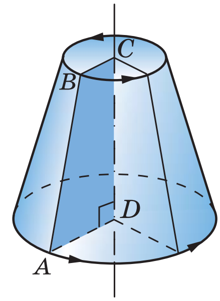
Часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключённые между основаниями, называются **образующими** усечённого конуса. Все образующие усечённого конуса равны друг другу (докажите это самостоятельно).



Усечённый конус

Рис. 112

Усечённый конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной к основаниям. На рисунке 113 изображён усечённый конус, полученный вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD, перпендикулярной к основаниям AD и BC. При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны AB, а основания усечённого конуса — вращением оснований CB и DA трапеции.



Усечённый конус получен вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ вокруг стороны CD

Рис. 113

Докажем, что **площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую, т. е.**

$$\boldsymbol{S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)\,l},$$

где r и r_1 — радиусы оснований, l — образующая усечённого конуса.

▼ Пусть P — вершина конуса, из которого получен усечённый конус, AA_1 — одна из образующих усечённого конуса, $r > r_1$, точки O и O_1 — центры оснований (рис. 114). Используя формулу (2), получаем

$$S_{\text{бок}} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi r(PA_1 + AA_1) - \pi r_1 \cdot PA_1.$$

Отсюда, учитывая, что $AA_1 = l$, находим

$$S_{\text{бок}} = \pi r l + \pi(r - r_1)\,PA_1. \qquad (3)$$

Выразим PA_1 через l, r и r_1. Прямоугольные треугольники PO_1A_1 и POA подобны, так как имеют общий острый угол P, поэтому

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r},$$

или

$$\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}.$$

Отсюда получаем

$$PA_1 = \frac{l r_1}{r - r_1}.$$

Подставив это выражение в формулу (3), приходим к формуле

$$S_{\text{бок}} = \pi(r + r_1)\,l. \quad \triangle$$

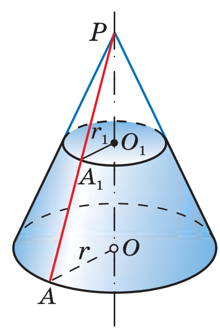


Рис. 114

Задачи

346 Высота конуса равна 15 см, а радиус основания равен 8 см. Найдите образующую конуса.

347 Образующая конуса, равная 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь основания конуса, если: а) $\alpha = 30°$; б) $\alpha = 45°$; в) $\alpha = 60°$.

348 Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна: а) половине площади основания; б) четверти площади основания?

349 Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

350 Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной $2r$. Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие конуса, угол между которыми равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

351 Высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей конуса равен 60°. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

352 Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6 дм^2, а площадь основания равна 8 дм^2.

353 Образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу: а) в 60°; б) в 90°.

354 Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

355 Основанием конуса с вершиной P является круг радиуса r с центром O. Докажите, что если секущая плоскость α перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1 радиуса r_1, где O_1 — точка пересечения плоскости α с осью PO, а $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ (см. рис. 110).

Решение

Докажем сначала, что любая точка M_1, лежащая в плоскости α на окружности радиуса r_1 с центром O_1, лежит на некоторой образующей конуса, т. е. является точкой рассматриваемого сечения. Обозначим буквой M точку пересечения луча PM_1 с плоскостью основания конуса. Из подобия прямоугольных треугольников PO_1M_1 и POM (они подобны, так как имеют общий острый угол P) находим: $OM = \frac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1} r_1 = r$, т. е. точка M лежит на окружности основания конуса. Следовательно, отрезок PM, на котором лежит точка M_1, является образующей конуса.

Докажем теперь, что любая точка M_1, лежащая как в плоскости α, так и на боковой поверхности конуса, лежит на окружности радиуса r_1 с центром O_1. Действительно, из подобия треугольников PO_1M_1 и POM (PM — образующая, проходящая через точку M_1) имеем $O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} r = r_1$. Таким образом, окружность радиуса r_1 с центром O_1 является сечением боковой поверхности конуса плоскостью α, поэтому круг, границей которого является эта окружность, представляет собой сечение конуса плоскостью α.

356 Две секущие плоскости перпендикулярны к оси конуса. Докажите, что площади сечений конуса этими плоскостями относятся как квадраты расстояний от вершины конуса до этих плоскостей.

357 Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой α. Найдите α, если высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см.

358 Найдите дугу сектора, представляющего собой развёртку боковой поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°.

359 Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор с дугой, равной: а) 180°; б) 90°; в) 60°.

360 Вычислите площадь основания и высоту конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а дуга равна 120°.

361 Угол между образующей и осью конуса равен 45°, образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

362 Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.

363 Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

364 Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

365 Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника.

366 Найдите образующую усечённого конуса, если радиусы оснований равны 3 см и 6 см, а высота равна 4 см.

367 Радиусы оснований усечённого конуса равны 5 см и 11 см, а образующая равна 10 см. Найдите: а) высоту усечённого конуса; б) площадь осевого сечения.

368 Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, где $R > r$, а образующая составляет с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите площадь осевого сечения.

369 Площадь боковой поверхности конуса равна 80 см². Через середину высоты конуса проведена плоскость, перпендикулярная к высоте. Найдите площадь боковой поверхности образовавшегося при этом усечённого конуса.

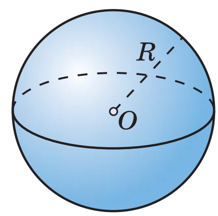
370 Дана трапеция $ABCD$, в которой $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB.

371 Ведро имеет форму усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно взять для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких вёдер, если на 1 м² требуется 150 г краски? (Толщину стенок вёдер в расчёт не принимать.)

§3 Сфера

43 Сфера и шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 115).

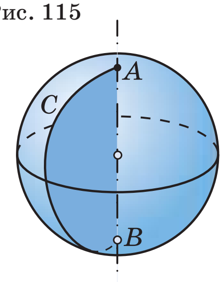


Сфера радиуса R с центром O

Рис. 115

Данная точка называется **центром сферы** (точка O на рисунке 115), а данное расстояние — **радиусом сферы**. Радиус сферы часто обозначают латинской буквой R.

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром сферы**. Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра (рис. 116).



Сфера получена вращением полуокружности ACB вокруг диаметра AB

Рис. 116

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также **центром**, **радиусом** и **диаметром шара**. Очевидно, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и точку O), и не содержит других точек.

44 Взаимное расположение сферы и плоскости

Исследуем взаимное расположение сферы и плоскости в зависимости от соотношения между радиусом сферы и расстоянием от её центра до плоскости.

Радиус сферы обозначим буквой R, а расстояние от её центра (точка O) до плоскости α — буквой d. Если точка O не лежит в плоскости α, то проведём перпендикуляр OA к этой плоскости (рис. 117). Его длина равна расстоянию от точки O до плоскости α, т. е. $OA = d$.

Возможны три случая.

1) $d < R$. Рассмотрим произвольную точку M, лежащую как на сфере, так и в плоскости α (рис. 117, *а*). Так как $OM = R$, $OA = d$ и $OA \perp AM$ (поскольку $OA \perp \alpha$), то по теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Полученное равенство означает, что любая общая точка сферы и плоскости α лежит на расположенной в этой плоскости окружности с центром A и радиусом $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Верно и обратное: любая точка этой окружности лежит на сфере. Действительно, если точка M лежит на указанной окружности, то $AM = \sqrt{R^2 - d^2}$, а так как $OA = d$ и $OA \perp AM$, то по теореме Пифагора

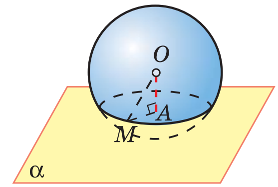
$$OM = \sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{R^2 - d^2 + d^2} = R,$$

т. е. точка M лежит на данной сфере.

Таким образом, **если расстояние d от центра сферы до плоскости меньше радиуса R сферы, то сечение сферы плоскостью** (т. е. множество всех общих точек сферы и плоскости) **есть окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.**

Ясно, что сечение шара плоскостью есть круг. Заметим также, что если плоскость проходит через центр шара (случай $d = 0$), то в сечении шара получится круг радиуса R, т. е. радиус круга равен радиусу шара. Такой круг называется **большим кругом шара** (рис. 118).

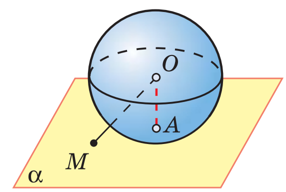
2) $d = R$. В этом случае $OA = R$, откуда следует, что точка A лежит на сфере (рис. 117, *б*),



а)

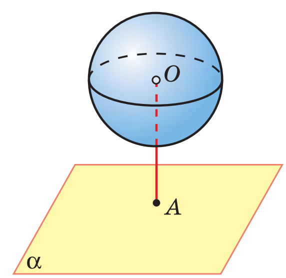
$OM = R$, $OA = d < R$,

$AM = r = \sqrt{R^2 - d^2}$



б)

$OA = d = R$, $OM > R$



в)

$OA = d > R$

Рис. 117

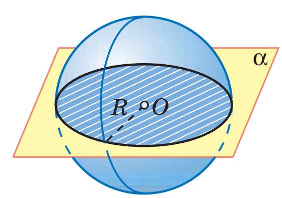


Рис. 118

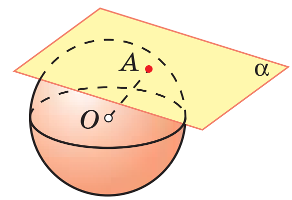
а для любой точки M плоскости α, отличной от точки A, выполняется неравенство $OM > OA$ (наклонная больше перпендикуляра), т. е. $OM > R$ и, следовательно, точка M не лежит на сфере.

Таким образом, **если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.**

3) $d > R$. В этом случае точка A, как и любая другая точка плоскости α, расположена вне сферы (рис. 117, *в*). Следовательно, **если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.**

45 Касательная плоскость к сфере

Рассмотрим более подробно случай, когда сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка называется **точкой касания** плоскости и сферы.



Плоскость α — касательная к сфере

Рис. 119

На рисунке 119 плоскость α — касательная к сфере с центром O, A — точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

Теорема

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A (рис. 119). Докажем, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α.

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от центра сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α — касательная, т. е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α. Теорема доказана.

Докажем обратную теорему.

Теорема

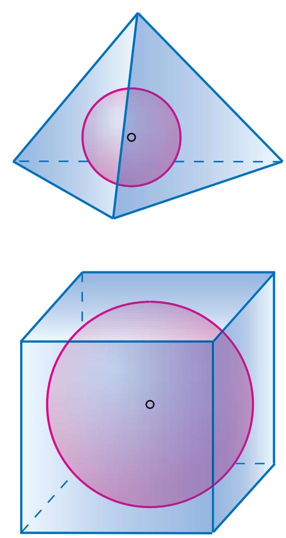
Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Это и означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

46 Площадь сферы

В отличие от боковой поверхности цилиндра или конуса сферу нельзя развернуть на плоскость, и, следовательно, для неё непригоден способ определения и вычисления площади поверхности с помощью развёртки. Для определения площади сферы воспользуемся понятием описанного многогранника. Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней[1]. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**. На рисунке 120 изображены описанные около сферы тетраэдр и куб.



Тетраэдр и куб описаны около сферы

Рис. 120

Рассмотрим последовательность описанных около данной сферы многогранников, в которой число граней многогранника неограниченно возрастает и при этом наибольший размер каждой грани[2] многогранника стремится к нулю. За **площадь сферы** примем предел последовательности площадей поверхностей этих многогранников.

В п. 62 мы докажем, что этот предел существует, и получим следующую формулу для вычисления площади сферы радиуса R:

$$S = 4\pi R^2.$$

---

[1] Говорят, что сфера касается грани многогранника, если плоскость грани является касательной к сфере и точка касания принадлежит грани.

[2] Наибольшим размером грани мы называем наибольшее расстояние между двумя точками грани. Так, например, если грань является прямоугольником, то её наибольший размер равен диагонали.

47* Взаимное расположение сферы и прямой

Исследуем взаимное расположение сферы с центром O и прямой a в зависимости от соотношения между радиусом сферы R и расстоянием d от центра сферы до прямой a.

Проведём через центр сферы и прямую a плоскость α (если центр сферы лежит на прямой a, то в качестве плоскости α возьмём любую плоскость, проходящую через прямую a). Она пересекает сферу по окружности L с центром O радиуса R. Ясно, что все общие точки сферы и прямой a (если они есть) лежат в плоскости α и, следовательно, на окружности L. Возможны три случая:

1) $d > R$. В этом случае окружность L и прямая a не имеют общих точек, поэтому сфера и прямая a также не имеют общих точек (рис. 121, *а*).

2) $d = R$. В этом случае окружность L и прямая a имеют ровно одну общую точку, поэтому сфера и прямая a также имеют ровно одну общую точку (рис. 121, *б*).

3) $d < R$. В этом случае окружность L и прямая a имеют ровно две общие точки, поэтому сфера и прямая a также имеют ровно две общие точки (рис. 121, *в*).

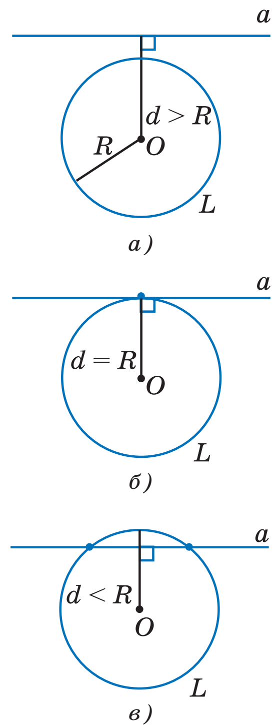


Рис. 121

Прямая, имеющая со сферой ровно одну общую точку, называется **касательной к сфере**, а общая точка — **точкой касания** прямой и сферы.

Докажите самостоятельно, что:

радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и прямой, перпендикулярен к этой прямой;

если радиус сферы перпендикулярен к прямой, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта прямая является касательной к сфере.

Рассмотрим теперь две касательные к сфере с центром O, проходящие через точку A и касающиеся сферы в точках B и C (рис. 122). Отрезки AB и AC назовём отрезками касательных, проведёнными из точки A. Они обладают следующим свойством: **отрезки касательных к сфере, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр сферы.**

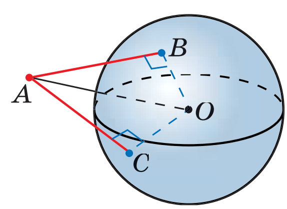


Рис. 122

Это следует из равенства прямоугольных треугольников ABO и ACO (они имеют общую гипотенузу AO и катеты OB и OC, равные радиусу сферы).

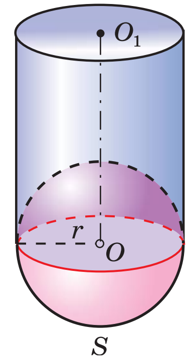
48* Сфера, вписанная в цилиндрическую поверхность

Говорят, что **сфера вписана в цилиндрическую поверхность**, если она касается всех её образующих.

Рассмотрим цилиндр, ограниченный кругами с центрами O и O_1 радиуса r и цилиндрической поверхностью, а также сферу S с центром O радиуса r (рис. 123). Поскольку расстояние от точки O до каждой из образующих равно радиусу сферы, то эта сфера касается всех образующих, т. е. является сферой, вписанной в цилиндрическую поверхность. Отметим также, что множество всех общих точек сферы S и цилиндрической поверхности представляет собой окружность основания цилиндра.

Рассмотрим теперь какую-нибудь плоскость α, пересекающую одну из образующих нашей цилиндрической поверхности и, следовательно, пересекающую все образующие. Докажем, что **существует сфера, касающаяся плоскости α и цилиндрической поверхности.**

Проведём из точки O перпендикуляр OH к плоскости α (случай, когда плоскость α проходит через точку O, рассмотрите самостоятельно) и обозначим буквой A точку пересечения луча OH и сферы S (рис. 124, *а*). Если точки A и H совпадают, то сфера S — искомая (обоснуйте это). Если же точки A и H не совпадают, то проведём через точку A прямую, параллельную образующей, и обозначим буквой B точку её пересечения с плоскостью α. Переместим сферу S вдоль оси OO_1 цилиндрической поверхности так, чтобы точка A перешла в точку B (рис. 124, *б*). При этом перемещении сфера S перейдёт в сферу S' радиуса r с центром O' на прямой OO_1, причём $OO' = AB$ и сфера S' касается цилиндрической поверхности. Расстояние от точки O' до плоскости α равно $O'B = OA$ (объясните почему), т. е. равно радиусу r. Следовательно, сфера S' касается плоскости α, т. е. является искомой. Утверждение доказано.



Сфера вписана в цилиндрическую поверхность

Рис. 123

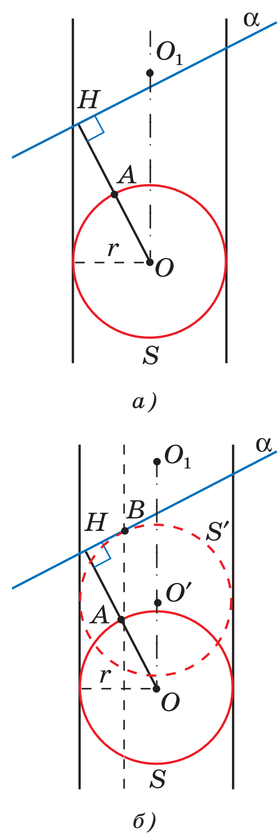
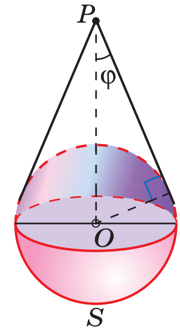


Рис. 124

49* Сфера, вписанная в коническую поверхность

Говорят, что **сфера вписана в коническую поверхность**, если она касается всех её образующих.

Рассмотрим конус с вершиной P, ограниченный кругом с центром O и конической поверхностью (рис. 125). Пусть φ — угол между прямой PO и образующей, S — сфера с центром O радиуса $PO \cdot \sin\varphi$.



Сфера вписана в коническую поверхность

Рис. 125

Поскольку расстояние от точки O до каждой из образующих конуса равно радиусу сферы, то эта сфера касается всех образующих конуса, т. е. является сферой, вписанной в коническую поверхность.

Отметим также, что множество всех общих точек сферы S и конической поверхности представляет собой окружность, лежащую в плоскости, параллельной плоскости основания конуса, и удалённой от вершины конуса на расстояние $PO \cdot \cos^2\varphi$ (пользуясь рисунком 125, докажите это самостоятельно).

Пусть PA — одна из образующих конуса. Рассмотрим какую-нибудь плоскость α, пересекающую образующую PA конической поверхности в точке B, лежащей на луче PA (рис. 126). Докажем, что **существует сфера, касающаяся плоскости α и конической поверхности**.

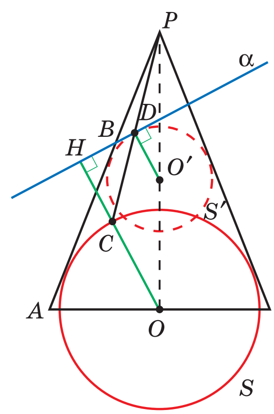


Рис. 126

Проведём из точки O перпендикуляр OH к плоскости α (случай, когда плоскость α проходит через точку O, рассмотрите самостоятельно) и обозначим буквой C точку пересечения луча OH и сферы S (см. рис. 126).

Если точки C и H совпадают, то сфера S — искомая (обоснуйте это).

Если же точки C и H не совпадают, то обозначим буквой D точку пересечения луча PC с плоскостью α. Через точку D проведём прямую, параллельную прямой OH и, следовательно, перпендикулярную к плоскости α. Она пересекается с прямой PO в некоторой точке O'.

Так как $O'D \perp \alpha$, то сфера S' с центром O' радиуса $O'D$ касается плоскости α. Эта сфера касается также конической поверхности (докажите это).

Следовательно, сфера S' — искомая. Утверждение доказано.

50* Сечения цилиндрической поверхности

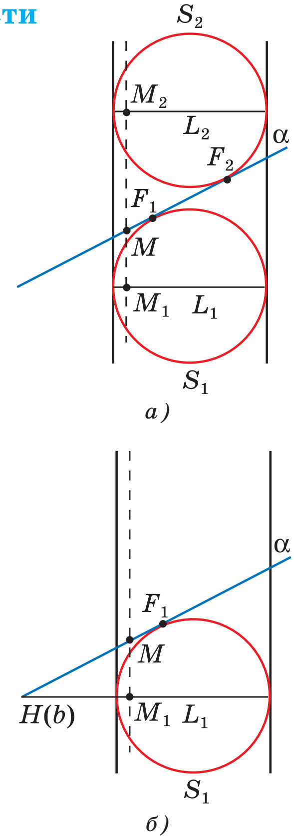


Рис. 127

Мы знаем, что если секущая плоскость перпендикулярна к образующей цилиндрической поверхности, то сечением этой поверхности является окружность. Если секущая плоскость параллельна образующей цилиндрической поверхности, то сечением являются две параллельные прямые (объясните почему). А что представляет собой сечение этой поверхности плоскостью α, проходящей под углом φ к образующей при $0<\varphi<90°$?

Пусть M — произвольная точка сечения, F_1 — точка касания плоскости α и сферы S_1, касающейся цилиндрической поверхности, L_1 — окружность, состоящая из точек касания сферы и цилиндрической поверхности, M_1 — точка окружности L_1, лежащая на одной образующей с точкой M (рис. 127, *а*). Отрезки MF_1 и MM_1 являются отрезками касательных, проведёнными из точки M к сфере S_1, поэтому

$$MF_1=MM_1.$$

Рассмотрим теперь сферу S_2, касающуюся цилиндрической поверхности по окружности L_2, а плоскости α — в некоторой точке F_2 (сфера S_2 расположена по другую сторону от плоскости α, нежели сфера S_1). Пусть M_2 — точка окружности L_2, лежащая на одной образующей с точкой M. Отрезки MF_2 и MM_2, будучи отрезками касательных, проведёнными из точки M к сфере S_2, равны:

$$MF_2=MM_2.$$

Таким образом,

$$MF_1+MF_2=MM_1+MM_2=M_1M_2.$$

Мы видим, что для любой точки M рассматриваемого сечения сумма MF_1+MF_2 равна M_1M_2, т. е. равна расстоянию между параллельными плоскостями окружностей L_1 и L_2, и поэтому не зависит от выбора точки M. Поэтому все точки сечения лежат на эллипсе с фокусами F_1 и F_2, расположенном в плоскости α (см. п. 97).

Докажем теперь, что любая точка N указанного эллипса является точкой сечения. Проведём через точку N какую-нибудь плоскость β, проходящую через две образующие цилиндра (например, плоскость осевого сечения). Она пересекает рассматриваемое сечение в двух точках, лежащих на линии a пересечения плоскостей α и β, причём каждая из этих точек (согласно доказанному) принадлежит эллипсу. Но прямая a не может иметь более двух общих точек с эллипсом (см. п. 97). Следовательно, точка N является одной из этих двух точек, т. е. является точкой сечения.

Итак, **сечением цилиндрической поверхности плоскостью α является эллипс.**

Замечание

Тот факт, что все точки сечения лежат на эллипсе с фокусом F_1, можно установить иначе. Пусть b — линия пересечения плоскости α с плоскостью окружности L_1, MH — перпендикуляр, проведённый из точки M сечения к прямой b (рис. 127, *б*; на этом рисунке изображением прямой b служит точка H). Тогда $\angle HMM_1 = \varphi$ и поэтому

$$\frac{MM_1}{MH} = \cos\varphi.$$

Но $MM_1 = MF_1$. Следовательно, отношение расстояния от каждой точки M сечения до точки F_1 к расстоянию от точки M до прямой b равно числу $\cos\varphi$, не зависящему от точки M и меньшему 1. Иными словами, каждая точка сечения лежит на эллипсе с фокусом F_1, директрисой b и эксцентриситетом, равным $\cos\varphi$.

51* Сечения конической поверхности

Рассмотрим сечения конической поверхности различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, то сечением являются либо две образующие, либо одна образующая, либо одна точка — вершина конической поверхности (объясните почему). А как выглядит сечение плоскостью α, не проходящей через вершину?

Пусть φ — угол между плоскостью α и осью конической поверхности (т. е. осью какого-нибудь конуса, ограниченного кругом и этой поверхностью). Если $\varphi = 90°$, то, как мы знаем, сечением является окружность. Пусть $\varphi \neq 90°$, θ — угол между осью конической поверхности и её образующей, M — произвольная точка сечения, F — точка касания плоскости α и сферы S, касающейся конической поверхности, L — окружность, состоящая из точек касания сферы и конической поверхности, M_1 — точка окружности L, лежащая на одной образующей с точкой M (рис. 128). Отрезки MF и MM_1 являются отрезками касательных, проведёнными из точки M к сфере S, поэтому $MF = MM_1$.

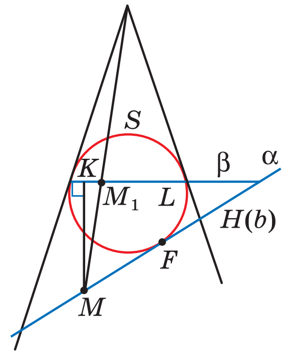


Рис. 128

Проведём из точки M перпендикуляр MK к плоскости β окружности L, обозначим буквой b линию пересечения плоскостей α и β и проведём из точки M перпендикуляр MH к прямой b. Тогда $\angle KMM_1 = \theta$, $\angle KMH = \varphi$ и из прямоугольных треугольников MKM_1 и MKH находим: $MK = MM_1 \cos\theta$, $MK = MH \cos\varphi$. Учитывая, что $MM_1 = MF$, приходим к равенству:

$$\frac{MF}{MH} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}.$$

Мы видим, что если $\cos\varphi < \cos\theta$, то все точки сечения лежат на эллипсе с фокусом F и директрисой b, если $\cos\varphi = \cos\theta$, то на параболе с фокусом F и директрисой b, а если $\cos\varphi > \cos\theta$, то на гиперболе с фокусом F и директрисой b. Доказательство того, что каждая точка указанных линий является точкой сечения (аналогичное соответствующему доказательству в п. 50), проведите самостоятельно.

Итак, **в зависимости от угла между секущей плоскостью и осью конической поверхности сечение может быть эллипсом, параболой или гиперболой**. По этой причине эллипс, параболу и гиперболу часто объединяют общим названием **конические сечения**.

Замечания

1. В случае $\cos\varphi \neq \cos\theta$ можно рассмотреть ещё одну сферу, касающуюся плоскости α и конической поверхности, и привести ещё одно доказательство того, что каждая точка сечения лежит либо на эллипсе, либо на гиперболе. Подумайте, как это сделать.

2. Из доказанного утверждения следует, что центральной проекцией окружности может быть либо эллипс, либо парабола, либо одна из ветвей гиперболы (объясните почему). Этот факт хорошо известен нам из опыта. Так, ближний свет автомобильной фары освещает часть асфальта, ограниченную эллипсом, а дальний — гиперболой.

Задачи

372 Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что: а) если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$; б) если $OM \perp AB$, то M — середина отрезка AB.

373 Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите: а) OM, если $R = 50$ см, $AB = 40$ см; б) OM, если $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм; в) AB, если $R = 10$ дм, $OM = 60$ см; г) AM, если $R = a$, $OM = b$.

374 Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $AB = m$.

375 Шар радиуса 41 дм пересечён плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра шара. Найдите площадь сечения.

376 Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

377 Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.

378 Стороны треугольника касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его стороны равны 10 см, 10 см и 12 см.

379 Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $CA = 15$ см.

380 Все стороны ромба, диагонали которого равны 15 см и 20 см, касаются сферы радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

381 Отрезок OH — высота тетраэдра $OABC$. Выясните взаимное расположение сферы радиуса R с центром O и плоскости ABC, если: а) $R = 6$ дм, $OH = 60$ см; б) $R = 3$ м, $OH = 95$ см; в) $R = 5$ дм, $OH = 45$ см; г) $R = 3{,}5$ дм, $OH = 40$ см.

382 Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислите: а) площадь S сечения, если $R = 12$ см, $d = 8$ см; б) R, если площадь сечения равна 12 см^2, $d = 2$ см.

383 Через точку, делящую радиус сферы пополам, проведена секущая плоскость, перпендикулярная к этому радиусу. Радиус сферы равен R. Найдите: а) радиус получившегося сечения; б) площадь боковой поверхности конуса, вершиной которого является центр сферы, а основанием — полученное сечение.

384 Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении, если: а) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$; б) $R = 5$ м, $\alpha = 45°$.

385 Через точку сферы радиуса R, которая является границей данного шара, проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом φ к касательной плоскости. Найдите площадь сечения данного шара.

386 Сфера касается граней двугранного угла в 120°. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a.

387 Радиус сферы равен 112 см. Точка, лежащая на плоскости, касательной к сфере, удалена от точки касания на 15 см. Найдите расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки сферы.

388 Найдите площадь сферы, радиус которой равен: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

389 Площадь сечения сферы, проходящего через её центр, равна 9 м^2. Найдите площадь сферы.

390 Площадь сферы равна 324 см^2. Найдите радиус сферы.

391 Докажите, что площади двух сфер пропорциональны квадратам их радиусов.

392 Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

393 Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найдите площадь сферы.

394 Радиусы сечений сферы двумя взаимно перпендикулярными плоскостями равны r_1 и r_2. Найдите площадь сферы, если сечения имеют единственную общую точку.

395 Докажите, что площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг одной из его сторон, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата.

Вопросы к главе IV

1 Чему равен угол между плоскостью основания цилиндра и плоскостью, проходящей через образующую цилиндра?

2 Что представляет собой сечение цилиндра плоскостью, параллельной его образующей?

3 На основаниях цилиндра взяты две не параллельные друг другу хорды. Может ли кратчайшее расстояние между точками этих хорд быть: а) равным высоте цилиндра; б) больше высоты цилиндра; в) меньше высоты цилиндра?

4 Две цилиндрические детали покрываются слоем никеля одинаковой толщины. Высота первой детали в два раза больше высоты второй, но радиус её основания в два раза меньше радиуса основания второй детали. На какую из деталей расходуется больше никеля?

5 Равны ли друг другу углы между образующими конуса и: а) плоскостью основания; б) его осью?

6 Что представляет собой сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину?

7 Точки A и B принадлежат шару. Принадлежит ли этому шару любая точка отрезка AB?

8 Могут ли все вершины прямоугольного треугольника с катетами 4 см и $2\sqrt{2}$ см лежать на сфере радиуса $\sqrt{5}$ см?

9 Могут ли две сферы с общим центром и с неравными радиусами иметь общую касательную плоскость?

10 Что представляет собой множество всех точек пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом?

Дополнительные задачи

396 Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через середину радиуса основания перпендикулярно к этому радиусу.

397 Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины C и D — на окружности другого основания. Вычислите радиус цилиндра, если его образующая равна a, $AB = a$, а угол между прямой BC и плоскостью основания равен $60°$.

398 Докажите, что если плоскость параллельна оси цилиндра и расстояние между этой плоскостью и осью равно радиусу цилиндра, то плоскость содержит образующую цилиндра, и притом только одну. (В этом случае плоскость называется **касательной плоскостью** к цилиндру.)

399 При вращении прямоугольника вокруг неравных сторон получаются цилиндры, площади полных поверхностей которых равны S_1 и S_2. Найдите диагональ прямоугольника.

400 Найдите отношение площадей полной и боковой поверхностей цилиндра, если осевое сечение цилиндра представляет собой: а) квадрат; б) прямоугольник $ABCD$, в котором $AB : AD = 1 : 2$.

401 Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади круга, описанного около его осевого сечения. Найдите отношение радиуса цилиндра к его высоте.

402 Найдите высоту и радиус цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметр осевого сечения цилиндра равен $2p$.

403 Толщина боковой стенки и дна стакана цилиндрической формы равна 1 см, высота стакана равна 16 см, а внутренний радиус равен 5 см. Вычислите площадь полной поверхности стакана.

404 Четверть круга свёрнута в коническую поверхность. Докажите, что образующая конуса в четыре раза больше радиуса основания.

405 Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, имеющего три попарно перпендикулярные образующие.

406 Площадь основания конуса равна S_1, а площадь боковой поверхности равна S_0. Найдите площадь осевого сечения конуса.

407 Отношение площадей боковой и полной поверхностей конуса равно $\frac{7}{8}$. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

408 Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в $120°$, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите площадь сечения, если радиус основания равен 4 см.

409 Найдите угол между образующей и высотой конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор с дугой $270°$.

410 Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности полученного тела.

411 Равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 см и 10 см, а острый угол $60°$, вращается вокруг большего основания. Вычислите площадь поверхности полученного тела.

412 Высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см. Вычислите площадь полной поверхности правильной n-угольной пирамиды, вписанной в конус[1], если: а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

413 Диагонали осевого сечения усечённого конуса перпендикулярны. Одно из оснований осевого сечения равно 40 см, а его площадь равна 36 дм^2. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса.

414 Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы; б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

415 Вершины прямоугольного треугольника с катетами 1,8 см и 2,4 см лежат на сфере. а) Докажите, что если радиус сферы равен 1,5 см, то центр сферы лежит в плоскости треугольника. б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 6,5 см.

416 Точка A лежит на радиусе данной сферы с центром O и делит этот радиус в отношении $1 : 2$, считая от центра сферы. Через точку A проведена плоскость α так, что радиус сферы с центром O, касающейся плоскости α, в 6 раз меньше радиуса данной сферы. Найдите: а) угол между прямой OA и плоскостью α; б) отношение площади сечения данной сферы плоскостью α к площади самой сферы.

417 Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.

418 Расстояние между центрами двух равных сфер меньше их диаметра. а) Докажите, что пересечением этих сфер является окружность. б) Найдите радиус этой окружности, если радиусы сфер равны R, а расстояние между их центрами равно $1{,}6R$.

419 Точки A, B, C и D лежат на сфере радиуса R, причём $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$, $AD = BD = CD$. Найдите: а) AB и AD; б) площадь сечения сферы плоскостью ABC.

---

[1] Пирамида называется **вписанной в конус**, если её основание вписано в основание конуса, а вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса.

420 Вне сферы радиуса 10 см дана точка M на расстоянии 16 см от ближайшей точки сферы. Найдите длину такой окружности на сфере, все точки которой удалены от точки M на расстояние 24 см.

421 Тело ограничено двумя сферами с общим центром. Докажите, что площадь его сечения плоскостью, проходящей через центры сфер, равна площади сечения плоскостью, касательной к внутренней сфере.

Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

Поясним некоторые термины, которые встречаются в задачах этого раздела. Напомним, что многогранник называется **описанным около сферы**, если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**. Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

422 Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы[1] проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны.

423 В конус высотой 12 см вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса.

424 В усечённый конус вписана правильная усечённая n-угольная пирамида (т. е. основания пирамиды вписаны в основания усечённого конуса). Радиусы оснований усечённого конуса равны 2 см и 5 см, а высота равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды при: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

425 Докажите, что если в правильную призму можно вписать сферу, то центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы.

426 Докажите, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды.

427 Найдите площадь полной поверхности описанного около сферы радиуса R многогранника, если этот многогранник: а) куб; б) правильная шестиугольная призма; в) правильный тетраэдр.

428 Около сферы радиуса R описана правильная четырёхугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен α.
а) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
б) Вычислите эту площадь при $R = 5$ см, $\alpha = 60°$.

429 Докажите, что если в правильную усечённую четырёхугольную пирамиду можно вписать сферу, то апофема пирамиды равна полусумме сторон оснований её боковой грани.

430 Докажите, что центр сферы, описанной около: а) правильной призмы, лежит в середине отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы; б) правильной пирамиды, лежит на высоте этой пирамиды или её продолжении.

---

[1] Призма называется **вписанной в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра.

431 Докажите, что: а) около любого тетраэдра можно описать сферу; б) в любой тетраэдр можно вписать сферу.

432 Радиус сферы равен R. Найдите площадь полной поверхности: а) вписанного в сферу куба; б) вписанной правильной шестиугольной призмы, высота которой равна R; в) вписанного правильного тетраэдра.

433 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро равно $2a$. Найдите радиусы вписанной и описанной сфер.

434 В правильной четырёхугольной пирамиде радиусы вписанной и описанной сфер равны 2 см и 5 см. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.

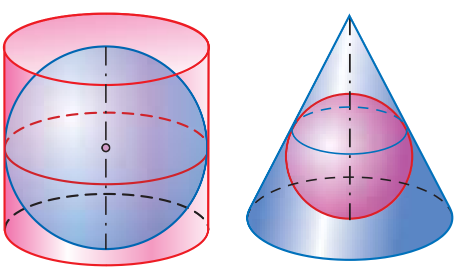
435 Сфера вписана в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей, рис. 129, *а*). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра.

436 В конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписана сфера радиуса R (т. е. сфера касается основания конуса и каждой его образующей, рис. 129, *б*). Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R=1$ см, $r=\sqrt{3}$ см.

437 В конус вписана сфера радиуса r. Найдите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и основанием конуса равен α.

438 Цилиндр вписан в сферу (т. е. основания цилиндра являются сечениями сферы, рис. 130, *а*). Найдите отношение площади полной поверхности цилиндра к площади сферы, если высота цилиндра равна диаметру основания.

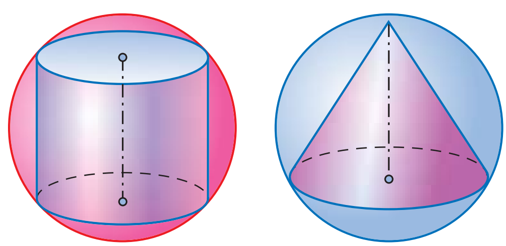
439 Конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан в сферу радиуса R (т. е. вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы, рис. 130, *б*). Найдите: а) r, если известны R и φ; б) R, если известны r и φ; в) φ, если $R=2r$.



а) Сфера вписана в цилиндр

б) Сфера вписана в конус

Рис. 129



а) Цилиндр вписан в сферу

б) Конус вписан в сферу

Рис. 130

Глава V
Объёмы тел

§ 1 Объём прямоугольного параллелепипеда

52 Понятие объёма

Понятие объёма тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Из курса планиметрии известно, что каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объём, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объёмов. За **единицу измерения объёмов** примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называют **кубическим сантиметром** и обозначают см^3. Аналогично определяются **кубический метр** (м^3), **кубический миллиметр** (мм^3) и т. д.

Процедура измерения объёмов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объём каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объёмов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объём тела, зависит от выбора единицы измерения объёмов, и поэтому единица измерения объёмов указывается после этого числа. Например, если в качестве единицы измерения объёмов взят 1 см^3 и при этом объём V некоторого тела оказался равным 2, то пишут $V = 2$ см^3.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объёмов и её частей, сколько и другое тело, т. е. имеет место следующее свойство объёмов:

1^0. Равные тела имеют равные объёмы.

Замечание

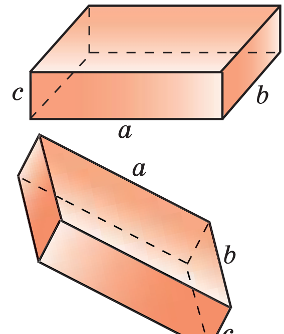
Равенство двух фигур, в частности двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии: два тела называются равными, если их можно совместить наложением. Примерами равных тел являются два прямоугольных параллелепипеда с соответственно равными измерениями (рис. 131, *а*), две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами, две правильные n-угольные пирамиды, у которых соответственно равны стороны оснований и высоты (рис. 131, *б*). В каждом из указанных случаев равенство двух тел можно доказать на основе аксиом наложения и равенства фигур (см. приложение 2).

Рассмотрим ещё одно свойство объёмов. Пусть тело составлено из нескольких тел. При этом мы предполагаем, что любые два из этих тел не имеют общих внутренних точек, но могут иметь общие граничные точки (см. рисунок 132, на котором цилиндр Q и конус F имеют общие граничные точки — точки их общего основания). Ясно, что объём всего тела складывается из объёмов составляющих его тел. Итак,

2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

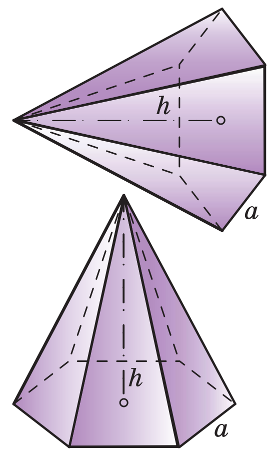
Свойства 1^0 и 2^0 называют **основными свойствами объёмов**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников. В дальнейшем на основе этих свойств мы выведем формулы для вычисления объёмов параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

Предварительно отметим одно следствие из свойств 1^0 и 2^0. Рассмотрим куб, принятый за единицу измерения объёмов. Его ребро равно единице измерения отрезков. Разобьём каждое ребро этого куба на n равных частей (n — произвольное целое число) и проведём через точки разбиения плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Куб разобьётся на n^3 равных маленьких кубов с ребром $\frac{1}{n}$. Так как сумма объёмов всех маленьких кубов равна объёму всего куба (свойство 2^0), т. е. равна 1, то объём каждого из маленьких кубов равен $\frac{1}{n^3}$ (объёмы маленьких кубов равны друг другу по свойству 1^0). Итак, **объём куба с ребром $\frac{1}{n}$ равен $\frac{1}{n^3}$.**



а)

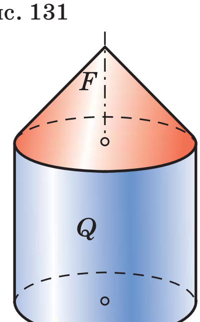
Равные прямоугольные параллелепипеды



б)

Равные пирамиды

Рис. 131



$V = V_F + V_Q$

Рис. 132

Этот факт нам понадобится в следующем пункте при выводе формулы объёма прямоугольного параллелепипеда.

53 Объём прямоугольного параллелепипеда

Теорема

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

Доказательство

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объём буквой V и докажем, что $V = abc$.

Могут представиться два случая.

1) Измерения a, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что $n \geqslant 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьём каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведём плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьётся на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$.

Так как объём каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (см. п. 52), то объём всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$.

Итак, $V = abc$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-й. Очевидно, $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим

$$a_n b_n c_n \leqslant abc \leqslant a'_n b'_n c'_n, \qquad (1)$$

где $b'_n = b_n + \dfrac{1}{10^n}$, $c'_n = c_n + \dfrac{1}{10^n}$.

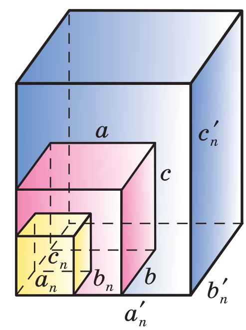


Рис. 133

По доказанному в первом случае левая часть (1) представляет собой объём V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть — объём V'_n прямоугольного параллелепипеда P'_n с измерениями a'_n, b'_n, c'_n. Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P'_n (рис. 133), то объём V параллелепипеда P заключён между $V_n = a_n b_n c_n$ и $V'_n = a'_n b'_n c'_n$, т. е.

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\dfrac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_n b'_n c'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$. Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать. △

Следствие 1

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

В самом деле, примем грань с рёбрами a и b за основание. Тогда площадь S основания равна ab, а высота h параллелепипеда равна c. Следовательно,

$$V = abc = Sh.$$

Следствие 2

Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

Для доказательства этого утверждения дополним прямую треугольную призму с основанием ABC ($\angle A$ прямой) до прямоугольного параллелепипеда так, как показано на рисунке 134. В силу следствия 1 объём этого параллелепипеда равен $2S_{ABC} \cdot h$, где S_{ABC} — площадь треугольника ABC, h — высота призмы. Плоскость B_1BC разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы, одна из которых — данная. (Эти призмы равны, так как имеют равные основания и равные высоты.) Следовательно, объём V данной призмы равен половине объёма параллелепипеда, т. е. $V = S_{ABC} \cdot h$, что и требовалось доказать.

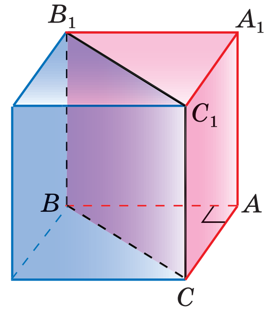


Рис. 134

Замечание

Рассмотрим квадрат со стороной a. По теореме Пифагора его диагональ равна $\sqrt{2}a$, поэтому площадь построенного на ней квадрата вдвое больше площади данного квадрата. Таким образом, не составляет труда построить сторону квадрата, площадь которого вдвое больше площади данного квадрата.

Рассмотрим теперь куб со стороной a. Возникает вопрос: можно ли с помощью циркуля и линейки построить сторону куба, объём которого вдвое больше объёма данного куба, т. е. построить отрезок, равный $\sqrt[3]{2}a$? Эта задача, получившая название **задача об удвоении куба**, была сформулирована ещё в глубокой древности. И лишь в 1837 г. французский математик Пьер Лоран Ванцель (1814—1848) доказал, что такое построение невозможно. Одновременно им была доказана неразрешимость ещё одной задачи на построение — задачи о трисекции угла (произвольный данный угол разделить на три равных угла). Напомним, что к числу классических неразрешимых задач на построение относится также задача о квадратуре круга (построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга). Невозможность такого построения была доказана в 1882 г. немецким математиком Карлом Луизом Фердинандом Линдеманом (1852—1939).

Задачи

440 Тело R состоит из тел P и Q, имеющих соответственно объёмы V_1 и V_2. Выразите объём V тела R через V_1 и V_2, если:
а) тела P и Q не имеют общих внутренних точек;
б) тела P и Q имеют общую часть, объём которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

441 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h, если:
а) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$;
в) $a = 18$, $b = 5\sqrt{3}$, $h = 13$; г) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0{,}96$.

442 Найдите объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC = 12$ см; б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$ м; в) $DE = 1$ см, где E — середина ребра AB.

443 Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

444 Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см^3. Найдите его массу.

445 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 13$ см, $BD = 12$ см и $BC_1 = 11$ см.

446 Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в $30°$ с плоскостью боковой грани и угол в $45°$ с боковым ребром. Найдите объём параллелепипеда.

447 Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найдите объём параллелепипеда, если его высота равна h.

448 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью, содержащей сторону основания, равную b, угол в $30°$. Найдите объём параллелепипеда.

449 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D составляет с плоскостью основания угол в $45°$, а двугранный угол A_1B_1BD равен $60°$. Найдите объём параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см.

450 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC_1 = 1$ м, $\angle C_1AC = 45°$, $\angle C_1AB = 60°$; б) $AC_1 = 24$ см, $\angle C_1AA_1 = 45°$, диагональ AC_1 составляет угол в $30°$ с плоскостью боковой грани.

451 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 90°$, $BC = 37$ см, $AB = 35$ см, $AA_1 = 1{,}1$ дм.

§ 2 Объёмы прямой призмы и цилиндра

54 Объём прямой призмы

Теорема

Объём прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной прямой призмы, а затем — для произвольной прямой призмы.

1. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объёмом V и высотой h. Проведём такую высоту треугольника ABC (отрезок BD на рисунке 135), которая разделяет этот треугольник на два треугольника (по крайней мере, одна высота треугольника этому условию удовлетворяет). Плоскость BB_1D разделяет данную призму на две призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC. Поэтому объёмы V_1 и V_2 этих призм соответственно равны $S_{ABD} \cdot h$ и $S_{BDC} \cdot h$. По свойству 2^0 объёмов $V = V_1 + V_2$, т. е. $V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$. Таким образом,

$$V = S_{ABC} \cdot h. \qquad (1)$$

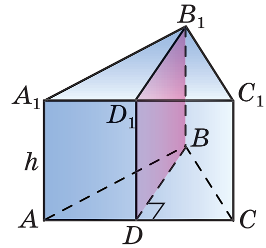


Рис. 135

2. Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h. Например, на рисунке 136 изображена выпуклая пятиугольная призма, которая разбита на три прямые треугольные призмы. Выразим объём каждой треугольной призмы по формуле (1) и сложим эти объёмы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объём исходной призмы равен произведению $S \cdot h$. Теорема доказана. △

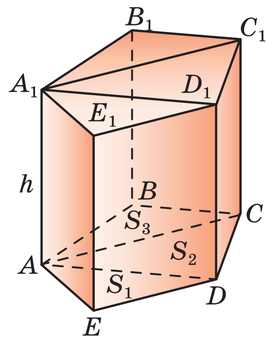


Рис. 136

55 Объём цилиндра

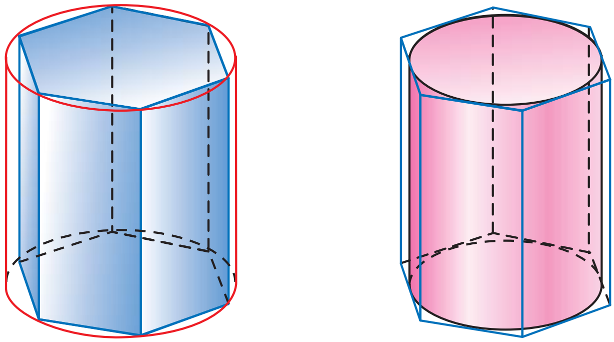
Говорят, что призма **вписана в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра (рис. 137, *а*), и призма **описана около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра (рис. 137, *б*). Ясно, что высота любой призмы, вписанной в цилиндр или описанной около него, равна высоте самого цилиндра.

Теорема

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму P_n



а)
Призма вписана
в цилиндр

б)
Призма описана
около цилиндра

Рис. 137

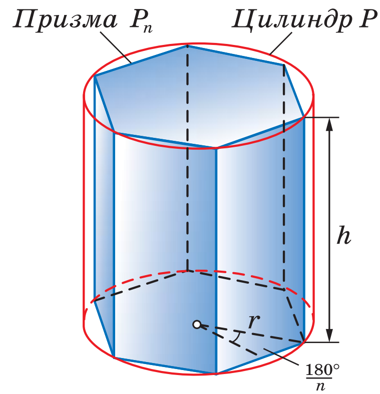


Рис. 138

(рис. 138). Площадь S_n основания этой призмы выражается формулой

$$S_n = nr \sin \frac{180°}{n} r \cos \frac{180°}{n}.$$

Наряду с призмой P_n рассмотрим призму Q_n, описанную около цилиндра P (рис. 139). Площадь её основания равна

$$nr \operatorname{tg} \frac{180°}{n} r = \frac{S_n}{\cos^2 \frac{180°}{n}}.$$

Поскольку призма P_n содержится в цилиндре P, а цилиндр P содержится в призме Q_n, то объём V цилиндра P удовлетворяет неравенствам

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2 \frac{180°}{n}} \cdot h. \qquad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Так как при $n \to \infty$ $\cos \frac{180°}{n} \to 1$, а $S_n \to \pi r^2$, то правая и левая части неравенств (2) стремятся к величине $\pi r^2 h$. Следовательно,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (3)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (3) получим $V = S \cdot h$. Теорема доказана. △

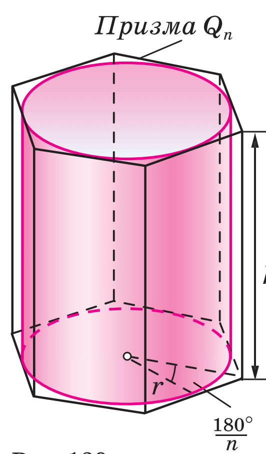


Рис. 139

Вопросы и задачи

452 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если:
а) $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см и наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2;
б) $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$ и двугранный угол с ребром BB_1 прямой.

453 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ и $BB_1 = BD$, где BD — высота треугольника ABC.

454 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, диагональ A_1C равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

455 Основанием прямой призмы является параллелограмм. Через сторону основания, равную a, и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, составляющее угол β с плоскостью основания. Площадь сечения равна Q. Найдите объём призмы.

456 Найдите объём правильной n-угольной призмы, у которой каждое ребро равно a, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

457 В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противолежащую ей вершину верхнего основания проведено сечение, составляющее угол в 60° с плоскостью основания. Найдите объём призмы, если сторона основания равна a.

458 Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30°. Найдите объём призмы.

459 Пусть V, r и h соответственно объём, радиус и высота цилиндра. Найдите:
а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см;
б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см;
в) h, если $r = h$, $V = 8\pi$ см^3.

460 Алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найдите длину провода (плотность алюминия 2,6 г/см^3).

461 Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

462 Площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения равна S. Найдите объём цилиндра.

463 Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если её длина равна 25 м?

464 В цилиндр вписана правильная n-угольная призма. Найдите отношение объёмов призмы и цилиндра, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — произвольное целое число.

465 В цилиндр вписана призма, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом α. Найдите объём цилиндра, если высота призмы равна h.

§3 Объёмы наклонной призмы, пирамиды и конуса

56 Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла

Рассмотрим способ вычисления объёмов тел, основанный на понятии интеграла, которое известно из курса алгебры и начал анализа.

Пусть тело T, объём которого нужно вычислить, заключено между двумя параллельными плоскостями α и β (рис. 140). Введём ось Ox так, чтобы она была перпендикулярна к плоскостям α и β, и обозначим буквами a и b координаты точек пересечения оси Ox с этими плоскостями ($a < b$). Будем считать, что тело таково, что его сечение $\Phi(x)$ плоскостью, проходящей через точку с координатой x и перпендикулярной к оси Ox, является либо кругом, либо многоугольником для любого $x \in [a; b]$ (при $x = a$ и $x = b$ сечение может вырождаться в точку, как, например, при $x = a$ на рисунке 140). Обозначим площадь фигуры $\Phi(x)$ через $S(x)$ и предположим, что $S(x)$ — непрерывная функция на числовом отрезке $[a; b]$.

▼ Разобьём числовой отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ и через точки с координатами x_i проведём плоскости, перпендикулярные к оси Ox (рис. 141). Эти плоскости разбивают тело T на n тел: $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

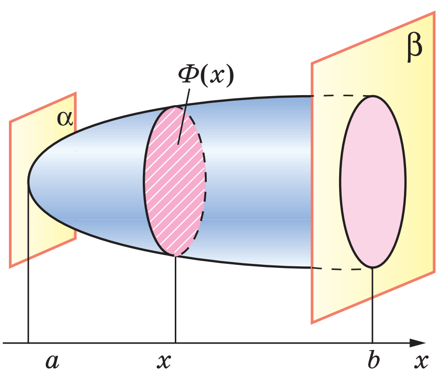


Рис. 140

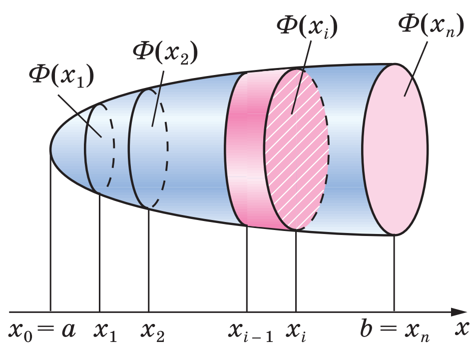


Рис. 141

Если сечение $\Phi(x_i)$ — круг, то объём тела T_i (выделенного красным цветом на рисунке 141) приближённо равен объёму цилиндра с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Если $\Phi(x_i)$ — многоугольник, то объём тела T_i приближённо равен объёму прямой призмы с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой Δx_i.

И в том и в другом случае объём тела T_i приближённо равен $S(x_i) \cdot \Delta x_i$, а объём V всего тела T можно приближённо вычислить по формуле

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i.$$

Приближённое значение V_n объёма тела T тем точнее, чем больше n и, следовательно, меньше Δx_i. Примем без доказательства, что $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ равен объёму тела, т. е. $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

С другой стороны, сумма V_n является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на числовом отрезке $[a; b]$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \int_a^b S(x)\,dx. \quad \triangle$$

В результате получается следующая формула для вычисления объёма тела с помощью интеграла:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Назовём её **основной формулой для вычисления объёмов тел.** Пользуясь этой формулой, вычислим объёмы некоторых тел, изученных нами в главах III и IV.

57 Объём наклонной призмы

Теорема

Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

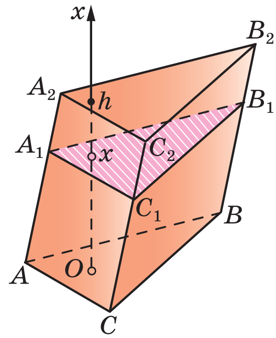
Докажем сначала теорему для треугольной призмы, а затем — для произвольной призмы.

1. Рассмотрим треугольную призму с объёмом V, площадью основания S и высотой h. Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям (рис. 142, *а*). Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x координату точки пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь получившегося сечения.

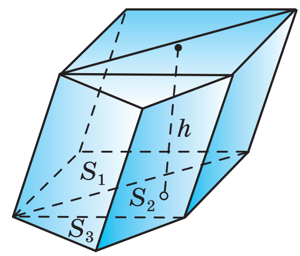
Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC (основание призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырёхугольник AA_1B_1B — параллелограмм (отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны), поэтому $A_1B_1 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1 = BC$ и $A_1C_1 = AC$.

Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трём сторонам. Следовательно, $S(x) = S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = 0$ и $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h S\,dx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$



а)



$V = (S_1 + S_2 + S_3)h = Sh$

б)

Рис. 142

2. Докажем теперь теорему для произвольной призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на треугольные призмы с общей высотой h (на рисунке 142, *б* показано разбиение для выпуклой пятиугольной призмы). Выразим объём каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объёмы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объём исходной призмы равен $S \cdot h$. Теорема доказана. △

Замечание

Для наклонной призмы существует и другой способ вычисления объёма, а именно: объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым рёбрам и пересекающей их. Коротко говорят так: **объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения** (см. задачу 475).

58 Объём пирамиды

Теорема

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

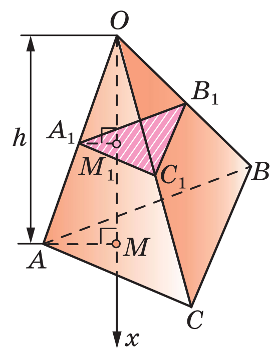
1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объёмом V, площадью основания S и высотой h. Проведём ось Ox (рис. 143, *а*, где OM — высота пирамиды) и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через x координату точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$. Следовательно, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OM_1}{OM} = \dfrac{x}{h}$. Таким образом, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{x}{h}$ и $\dfrac{C_1A_1}{CA} = \dfrac{x}{h}$.

Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{x}{h}$. Следовательно, $\dfrac{S(x)}{S} = \left(\dfrac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \dfrac{S}{h^2}x^2$.

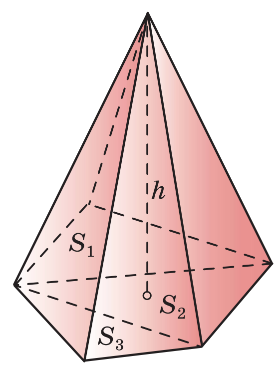
Применяя теперь основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S \cdot h.$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной пирамиды с высотой h и площадью основания S. Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой h (на ри-



а)



$V = \dfrac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)h = \dfrac{1}{3}Sh$

б)

Рис. 143

сунке 143, *б* показано разбиение для выпуклой пятиугольной пирамиды). Выразим объём каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объёмы. Вынося за скобки общий множитель $\frac{1}{3}h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т. е. площадь S основания исходной пирамиды. Таким образом, объём исходной пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

Следствие

Объём V усечённой пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$

Пользуясь тем, что усечённая пирамида получается из обычной пирамиды путём отсечения от неё меньшей пирамиды и, следовательно, объём усечённой пирамиды равен разности объёмов данной пирамиды и отсечённой, выведите эту формулу самостоятельно.

59 Объём конуса

Теорема

Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим конус с объёмом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введём ось Ox так, как показано на рисунке 144 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 40). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — координата точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

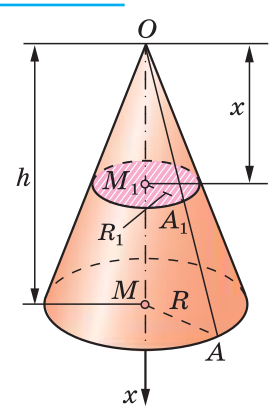


Рис. 144

откуда $R_1 = \frac{R}{h}x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V = \frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

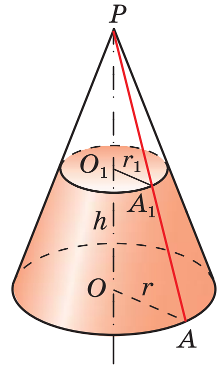


Рис. 145

Следствие

Объём V усечённого конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$

Пользуясь рисунком 145, выведите эту формулу самостоятельно.

Задачи

466 Сечение тела, изображённого на рисунке 146, плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку с абсциссой x, является квадратом, сторона которого равна $\frac{1}{x}$. Найдите объём этого тела.

467 Фигура, заштрихованная на рисунке 147, вращается вокруг оси Ox. Найдите объём полученного тела.

468 Фигура, заштрихованная на рисунке 148, вращается вокруг оси Oy. Найдите объём полученного тела.

469 Найдите объём наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см, а боковое ребро, равное 8 см, составляет с плоскостью основания угол в 60°.

470 Найдите объём наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — ромб, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, двугранный угол с ребром AB прямой.

471 Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной m. Вершина A_1 проектируется в центр этого основания, а ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объём призмы.

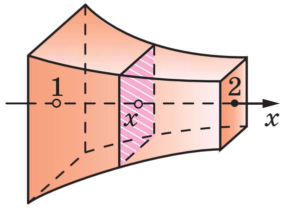


Рис. 146

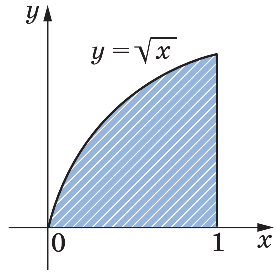


Рис. 147

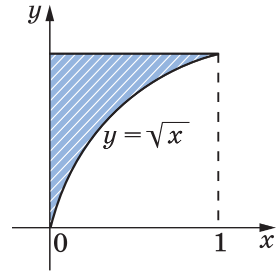


Рис. 148

472 Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 7$ см и $AC = 24$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите объём призмы, если ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°.

473 Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами a и b. Боковое ребро длины c составляет со смежными сторонами основания углы, равные φ. Найдите объём параллелепипеда.

474 Все грани параллелепипеда — равные ромбы, диагонали которых равны 6 см и 8 см. Найдите объём параллелепипеда.

475 Докажите, что объём наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым рёбрам и пересекающей их.

476 Найдите объём наклонной треугольной призмы, если расстояния между её боковыми рёбрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2.

477 Найдите объём пирамиды с высотой h, если:
а) $h = 2$ м, а основанием служит квадрат со стороной 3 м;
б) $h = 2{,}2$ м, а основанием служит треугольник ABC, в котором $AB = 20$ см, $BC = 13{,}5$ см, $\angle ABC = 30°$.

478 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

479 Найдите объём правильной треугольной пирамиды с боковым ребром l, если:
а) боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ;
б) боковое ребро составляет с прилежащей стороной основания угол α;
в) плоский угол при вершине равен β.

480 В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен φ, а сторона основания равна a. Найдите объём пирамиды.

481 Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если:
а) её высота равна H, а двугранный угол при основании равен β;
б) сторона основания равна m, а плоский угол при вершине равен α.

482 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно m и составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объём пирамиды.

483 Найдите объём и площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если её боковое ребро равно 13 см, а диаметр круга, вписанного в основание, равен 6 см.

484 Основание пирамиды — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Каждое боковое ребро пирамиды образует с её высотой угол в $30°$. Вычислите объём пирамиды.

485 Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами a и b. Каждое её боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом φ. Найдите объём пирамиды.

486 Докажите, что если в пирамиду можно вписать шар, то объём V пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} S \cdot r$, где S — площадь полной поверхности пирамиды, а r — радиус вписанного в пирамиду шара.

487 Основанием пирамиды является ромб со стороной 6 см. Каждый из двугранных углов при основании равен $45°$. Найдите объём пирамиды, если её высота равна 1,5 см.

488 Найдите объём треугольной пирамиды $SABC$, если:
а) $\angle CAB = 90°$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ и каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол θ;
б) $AB = 12$ см, $BC = CA = 10$ см и двугранные углы при основании равны $45°$;
в) боковые рёбра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c.

489 Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник, в котором $AB = 20$ см, $AC = 29$ см, $BC = 21$ см. Грани DAB и DAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол в $60°$. Найдите объём пирамиды.

490 Стороны оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны a и $0{,}5a$, апофема боковой грани равна a. Найдите объём усечённой пирамиды.

491 Основания усечённой пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n ($m > n$). Две боковые грани, содержащие катеты, перпендикулярны к основанию, а третья составляет с ним угол φ. Найдите объём усечённой пирамиды.

492 Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны 24 дм и 18 дм. Каждое боковое ребро равно 25 дм. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной плоскости основания и делящей боковое ребро пополам. Найдите объём полученной усечённой пирамиды.

493 В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 4 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 15 см^2. Найдите объём усечённой пирамиды.

494 Пусть h, r и V соответственно высота, радиус основания и объём конуса. Найдите:
а) V, если $h=3$ см, $r=1{,}5$ см;
б) h, если $r=4$ см, $V=48\pi$ см^3;
в) r, если $h=m$, $V=p$.

495 Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём исходного конуса, если объём меньшего конуса, отсекаемого от исходного, равен 24 см^3.

496 Найдите объём конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P.

497 Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите объём конуса, если его высота равна H.

498 Найдите объём конуса, если его образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения равна 60 см^2.

499 Высота конуса равна 12 см, а его объём равен 324π см^3. Найдите угол сектора, который получится, если боковую поверхность конуса развернуть на плоскость.

500 Площадь полной поверхности конуса равна 45π дм^2. Развёрнутая на плоскость боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом в $60°$. Найдите объём конуса.

501 Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 м и 6 м, а образующая равна 5 м. Найдите объём усечённого конуса.

502 В усечённом конусе известны высота h, образующая l и площадь S боковой поверхности. Найдите площадь осевого сечения и объём усечённого конуса.

§ 4 Объём шара и площадь сферы

60 Объём шара

Теорема

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 149). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — координата точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \qquad (1)$$

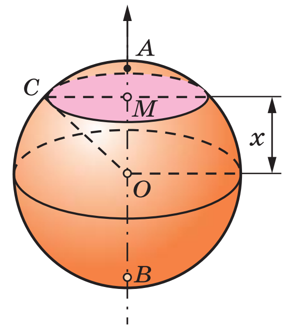


Рис. 149

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

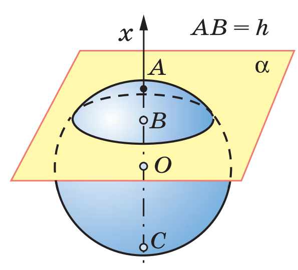
Теорема доказана. △

61 Объёмы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

а) **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. На рисунке 150 секущая плоскость α, проходящая через точку B, разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется **основанием** каждого из этих сегментов, а длины отрезков AB и BC диаметра AC, перпендикулярного к секущей плоскости, называются **высотами** сегментов.

Если радиус шара равен R, а высота сегмента равна h (на рисунке 150 $h = AB$), то объём V шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$



Шаровой сегмент

Рис. 150

▼ Действительно, проведём ось Ox перпендикулярно к плоскости α (см. рис. 150). Тогда площадь $S(x)$ произвольного сечения шарового сегмента плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, выражается формулой (1) при $R - h \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объёмов тел при $a = R - h$, $b = R$, получаем:

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{R-h}^{R} =$$

$$= \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right). \quad \triangle$$

б) **Шаровым слоем** называется часть шара, заключённая между двумя параллельными секущими плоскостями (рис. 151). Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями** шарового слоя, а расстояние между плоскостями — **высотой** шарового слоя.

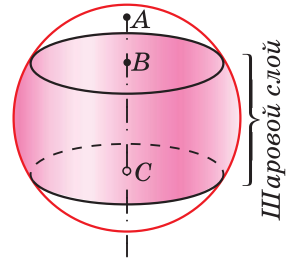
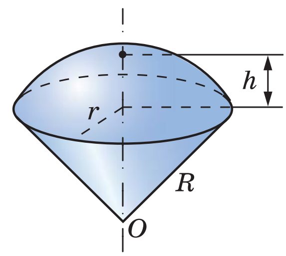


Рис. 151

Объём шарового слоя можно вычислить как разность объёмов двух шаровых сегментов. Например, объём шарового слоя, изображённого на рисунке 151, равен разности объёмов шаровых сегментов, высоты которых равны AC и AB.

в) **Шаровым сектором** называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим $90°$, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов (рис. 152). Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен R, а высота шарового сегмента равна h, то объём V шарового сектора вычисляется по формуле



Шаровой сектор

Рис. 152

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Выведите эту формулу самостоятельно.

62* Площадь сферы

В п. 46 мы привели без доказательства формулу для вычисления площади S сферы радиуса R:

$$S = 4\pi R^2.$$

Выведем эту формулу, пользуясь формулой для объёма шара.

Рассмотрим сферу радиуса R с центром в точке O и описанный около неё многогранник, имеющий n граней. Занумеруем грани в произвольном порядке и обозначим через S_i площадь i-й грани ($i = 1, 2, \ldots, n$). Соединив центр O сферы отрезками со всеми вершинами многогранника, получим n пирамид с общей вершиной O, основаниями которых являются грани многогранника, а высотами — радиусы сферы, проведённые в точки касания граней многогранника со сферой. Следовательно, объём i-й пирамиды равен $\frac{1}{3}S_iR$, а объём V_n всего описанного многогранника равен:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}S_iR = \frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n} S_i = \frac{1}{3}RP_n,$$

где $P_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$ — площадь поверхности многогранника. Отсюда получаем:

$$P_n = \frac{3V_n}{R}. \tag{2}$$

Будем теперь неограниченно увеличивать n таким образом, чтобы наибольший размер каждой грани описанного многогранника стремился к нулю. При этом объём V_n описанного многогранника будет стремиться к объёму шара. В самом деле, если наибольший размер каждой грани описанного многогранника не превосходит δ, то описанный многогранник содержится в шаре радиуса $R+\delta$ с центром в точке O. С другой стороны, описанный многогранник содержит исходный шар радиуса R. Поэтому

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3.$$

Так как $\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$, то и $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\delta \to 0$ $(n \to \infty)$.

Переходя затем к пределу в равенстве (2), получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R}\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3}{R}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2.$$

По определению площади сферы $S = \lim_{n\to\infty} P_n$, следовательно,

$$S = 4\pi R^2.$$

Вопросы и задачи

503 Пусть V — объём шара радиуса R, а S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V, если $R=4$ см; б) R и S, если $V=113{,}04$ см^3; в) R и V, если $S=64\pi$ см^2.

504 Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвёртую часть диаметра Земли. Сравните объёмы Луны и Земли, считая их шарами.

505 Шар и цилиндр имеют равные объёмы, а диаметр шара равен диаметру основания цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

506 Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

507 В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 4 равных металлических шарика диаметром 1 см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?

508 Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см?

509 Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объём общей части шаров к объёму одного шара?

510 Найдите объём шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

511 Диаметр шара разделён на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к диаметру. Найдите объём получившегося шарового слоя, если радиус шара равен R.

512 В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части 6 см и 12 см. Найдите объёмы двух полученных частей шара.

513 Найдите объём шарового сектора, если радиус окружности основания соответствующего шарового сегмента равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

514 Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается вокруг одного из ограничивающих его радиусов. Найдите объём получившегося шарового сектора.

515 Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Радиус Земли считать равным 6375 км.)

516 Сколько кожи пойдёт на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см? (На швы добавить 8% от площади поверхности мяча.)

517 Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

Вопросы к главе V

1 Каким соотношением связаны объёмы V_1 и V_2 тел P_1 и P_2, если: а) тело P_1 содержится в теле P_2;
б) каждое из тел P_1 и P_2 составлено из n кубов с ребром 1 см?

2 Какую часть объёма данной прямой треугольной призмы составляет объём треугольной призмы, отсечённой от данной плоскостью, проходящей через средние линии оснований?

3 Изменится ли объём цилиндра, если диаметр его основания увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 4 раза?

4 Как изменится объём правильной пирамиды, если её высоту увеличить в n раз, а сторону основания уменьшить в n раз?

5 Основаниями двух пирамид с равными высотами являются четырёхугольники с соответственно равными сторонами. Равны ли объёмы этих пирамид?

6 Как относятся объёмы двух конусов, если их высоты равны, а отношение радиусов оснований равно 2?

7 Из каких тел состоит тело, полученное вращением равнобедренной трапеции вокруг большего основания?

8 Один конус получен вращением неравнобедренного прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов, а другой конус — вращением вокруг другого катета. Равны ли объёмы этих конусов?

9 Диаметр одного шара равен радиусу другого. Чему равно отношение: а) радиусов этих шаров; б) объёмов шаров?

10 Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объёмов равнялась объёму шара радиуса 6 см?

11 Во сколько раз объём шара, описанного около куба, больше объёма шара, вписанного в этот же куб?

12 Как изменится площадь сферы, если её радиус:
а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза?

13 Отношение объёмов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

14 В каком отношении находятся объёмы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как $m^2 : n^2$?

Дополнительные задачи

518 Площади трёх попарно смежных граней прямоугольного параллелепипеда равны S_1, S_2, S_3. Выразите объём этого параллелепипеда через S_1, S_2, S_3 и вычислите его при $S_1 = 6$ дм^2, $S_2 = 12$ дм^2, $S_3 = 18$ дм^2.

519 В прямоугольном параллелепипеде диагонали трёх граней, выходящие из одной вершины, равны 7 см, 8 см и 9 см. Найдите объём параллелепипеда.

520 Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда равно a. Сечение, проведённое через две стороны разных оснований, является квадратом с площадью Q. Найдите объём параллелепипеда.

521 Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол основания равен 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол в 45° с плоскостью основания. Найдите объём параллелепипеда.

522 В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали BD_1 и A_1C взаимно перпендикулярны и равны 6 см и 8 см, $AB = 3$ см. Найдите объём параллелепипеда.

523 В прямой призме, основанием которой является прямоугольный треугольник, пять рёбер равны a, а остальные четыре ребра равны друг другу. Найдите объём призмы.

524 Объём прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен 3 м^3, а наименьшая и наибольшая из площадей боковых граней равны 3 м^2 и $3\sqrt{5}$ м^2. Найдите длины рёбер призмы.

525 Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна d и составляет угол φ с плоскостью другой боковой грани. Найдите объём призмы.

526 Докажите, что объём треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.

527 На трёх данных параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, отложены три равных отрезка AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что объём призмы, боковыми рёбрами которой являются эти отрезки, не зависит от положения отрезков на данных прямых.

528 Площади боковых граней наклонной треугольной призмы пропорциональны числам 20, 37, 51. Боковое ребро равно 0,5 дм, а площадь боковой поверхности равна 10,8 дм^2. Найдите объём призмы.

529 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, если боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ, а не лежащая в этой грани вершина основания находится на расстоянии m от неё.

530 Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с основанием угол φ, а середина этого ребра удалена от основания пирамиды на расстояние, равное m. Найдите объём пирамиды.

531 Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол, ребром которого является боковое ребро пирамиды, равен 2φ. Найдите объём пирамиды.

532 В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а сторона основания равна a. Найдите объём пирамиды.

533 Основанием пирамиды является треугольник, два угла которого равны φ_1 и φ_2. Высота пирамиды равна h, а каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ_3. Найдите объём пирамиды.

534 Основанием четырёхугольной пирамиды, высота которой равна H, является параллелограмм. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом α. Попарно равные противоположные боковые рёбра пирамиды образуют с плоскостью основания углы β и γ. Найдите объём пирамиды.

535 Основанием пирамиды является ромб со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют тупой двугранный угол φ. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания двугранные углы θ. Найдите объём пирамиды.

536 Два ребра тетраэдра равны b, а остальные четыре ребра равны a. Найдите объём тетраэдра, если рёбра длины b: а) имеют общие точки; б) не имеют общих точек.

537 В усечённой пирамиде соответственные стороны оснований относятся как $2 : 5$. В каком отношении делится её объём плоскостью, проходящей через середину высоты этой пирамиды параллельно основаниям?

538 Найдите объём цилиндра, если: а) площадь боковой поверхности равна S, а площадь основания равна Q; б) осевое сечение является квадратом, а высота равна h; в) осевое сечение является квадратом, а площадь полной поверхности равна S.

539 Докажите, что объёмы двух цилиндров, у которых площади боковых поверхностей равны, относятся как их радиусы.

540 Конический бак имеет глубину 3 м, а его круглый верх имеет радиус 1,5 м. Сколько литров жидкости он вмещает?

Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар

541 В конус вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник. Меньшая сторона прямоугольника равна a, а острый угол между его диагоналями равен φ_1. Боковая грань, содержащая меньшую сторону основания, составляет с плоскостью основания двугранный угол φ_2. Найдите объём конуса.

542 Основанием пирамиды является ромб со стороной a и острым углом φ. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол θ. Найдите объём конуса.

543 В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объёмов цилиндра и шара.

544 Найдите объём конуса, если радиус его основания равен 6 дм, а радиус вписанной в конус сферы равен 3 дм.

545 В конус, радиус основания которого равен r, а образующая равна l, вписана сфера. Найдите длину линии, по которой сфера касается боковой поверхности конуса.

546 В усечённый конус, радиусы оснований которого равны r и r_1, вписан шар. Найдите отношение объёмов усечённого конуса и шара.

547 В правильную треугольную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан шар объёма V. Найдите объём пирамиды.

548 В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α, вписан шар. Найдите объём шара, если каждая боковая грань пирамиды составляет с основанием угол β.

549 В сферу радиуса R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого составляет с основанием угол α. Найдите объём цилиндра.

550 В шар вписан цилиндр, в котором угол между диагоналями осевого сечения равен α. Образующая цилиндра равна l. Найдите объём шара.

551 В шар вписан конус, радиус основания которого равен r, а высота равна H. Найдите площадь поверхности и объём шара.

552 В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите площадь поверхности и объём шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α.

553 В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10 см. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол β. Найдите площадь поверхности и объём шара.

554 Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого присоединены равные шаровые сегменты. Радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота сегмента равна 0,5 м. Какой длины должна быть образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны равнялась 50 $м^3$?

555 Куб, шар, цилиндр и конус (у двух последних тел диаметры оснований равны высоте) имеют равные площади поверхностей. Какое из этих тел имеет наибольший объём и какое — наименьший?

556 Будет ли плавать в воде полый медный шар, диаметр которого равен 10 см, а толщина стенки: а) 2 мм; б) 1,5 мм? (Плотность меди 8,9 $г/см^3$.)

Глава VI
Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

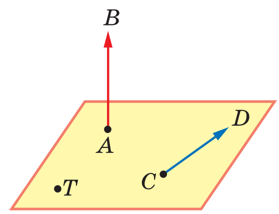
63 Понятие вектора

В курсе планиметрии мы познакомились с векторами на плоскости и действиями над ними. Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

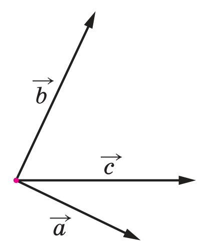
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определённого направления. На рисунке 153, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{TT}$, а на рисунке 153, *б* — ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.

Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными**. Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$



а)



б)

Рис. 153

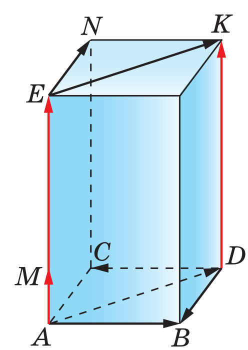
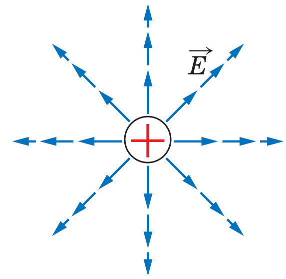


Рис. 154

обозначает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а запись $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ — что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены. На рисунке 154 изображён параллелепипед. На этом рисунке $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$; векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}$ не являются ни сонаправленными, ни противоположно направленными, так как они не коллинеарны.

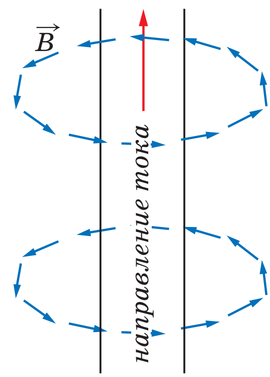
Изучая векторы на плоскости, мы отмечали, что многие физические величины, например сила, перемещение, скорость, являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин. Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряжённости электрического поля. На рисунке 155, *а* изображены векторы напряжённости электрического поля положительного точечного заряда.

Электрический ток, т. е. направленное движение зарядов, создаёт в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции. На рисунке 155, *б* изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.



а)

Электрическое поле $\vec{E}$



б)

Магнитное поле $\vec{B}$

Рис. 155

64 Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. На рисунке 154 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки A. Нетрудно доказать, что **от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один**. В самом деле, пусть $\vec{a}$ — данный вектор, M — данная точка (рис. 156). Проведём через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M плоскость и в этой плоскости построим вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Очевидно, что вектор $\overrightarrow{MN}$ искомый. Из построения ясно также, что $\overrightarrow{MN}$ — единственный вектор с началом M, равный вектору $\vec{a}$.

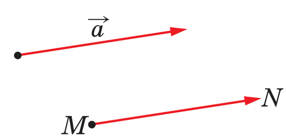


Рис. 156

Вопросы и задачи

557 В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и K — середины рёбер AC, BC и CD соответственно, $AB=3$ см, $BC=4$ см, $BD=5$ см. Найдите длины векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$;

б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$.

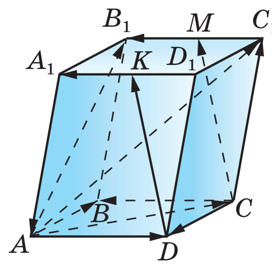


Рис. 157

558 Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют следующие значения: $AD=8$ см, $AB=9$ см и $AA_1=12$ см. Найдите длины векторов:

а) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$.

559 На рисунке 157 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и K — середины рёбер B_1C_1 и A_1D_1. Укажите на этом рисунке все пары:

а) сонаправленных векторов;

б) противоположно направленных векторов;

в) равных векторов.

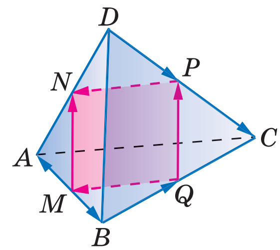


Рис. 158

560 На рисунке 158 изображён тетраэдр $ABCD$, рёбра которого равны. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, AD, DC, BC.

а) Выпишите все пары равных векторов, изображённых на этом рисунке.

б) Определите вид четырёхугольника $MNPQ$.

561 Справедливо ли утверждение:

а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой;

б) два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены;

в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены?

562 Известно, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Как расположены по отношению друг к другу:

а) прямые AB и A_1B_1;

б) прямая AB и плоскость, проходящая через точки A_1 и B_1;

в) плоскости, одна из которых проходит через точки A и B, а другая проходит через точки A_1 и B_1?

563 На рисунке 157 изображён параллелепипед, точки M и K — середины рёбер B_1C_1 и A_1D_1. Назовите вектор, который получится, если отложить:

а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$;

б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$;

в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$;

г) от точки C_1 вектор, равный $\overrightarrow{CB}$;

д) от точки M вектор, равный $\overrightarrow{KA_1}$.