# § 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

## 65 Сложение и вычитание векторов

Введём правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 159). Затем от точки $B$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Это правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 159, *а* поясняет это название. Отметим, что по этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника. Рисунки 159, *б*, *в* иллюстрируют сложение коллинеарных векторов.

Точно так же, как в планиметрии, доказывается, что **сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки $A$, от которой при сложении откладывается вектор $\vec{a}$**. Иными словами, если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника точку $A$ заменить другой точкой $A_1$, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 160). Докажите это утверждение самостоятельно.

Правило треугольника можно сформулировать в такой форме: **для любых трёх точек $A$, $B$ и $C$ имеет место равенство**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

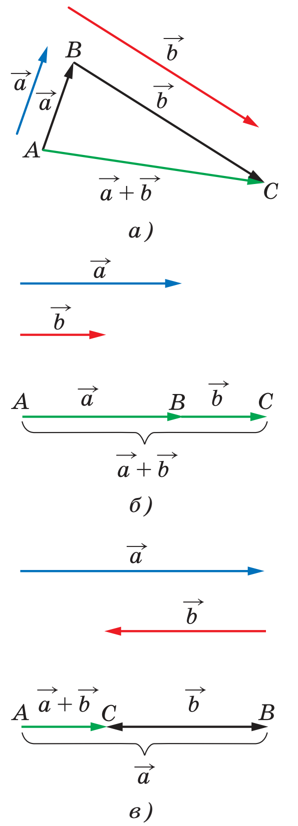
Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также **правилом параллелограмма**, известным из курса планиметрии. Это правило пояснено на рисунке 161.

Свойства сложения векторов, изученные в планиметрии, имеют место и для векторов в пространстве. Напомним их.

**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:**

**$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);**

**$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).**




Сложение векторов

Рис. 159

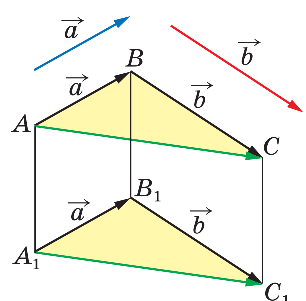
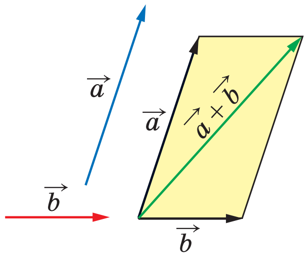
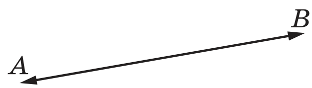


Рис. 160



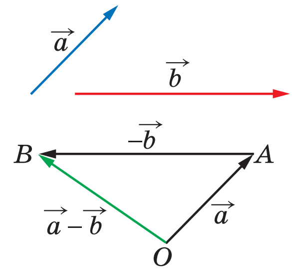

Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов

Рис. 161




$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — противоположные векторы

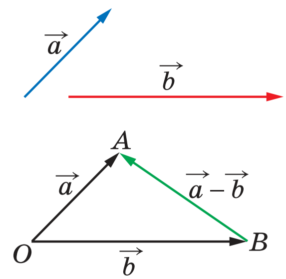
Рис. 162




$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=-\vec{b}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

*а)*




$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

*б)*

Разность векторов

Рис. 163

Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор. Очевидно, вектор $\overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ (рис. 162).

**Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.** Разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}), \qquad \textbf{(1)}$$

где $(-\vec{b})$ — вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

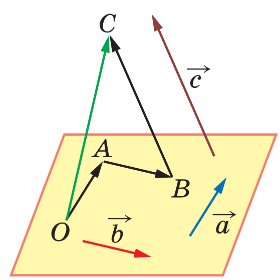
На рисунках 163, *а*, *б* представлены два способа построения разности двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказательства справедливости законов сложения и равенства (1) для векторов в пространстве ничем не отличаются от доказательств для векторов на плоскости.

## 66 Сумма нескольких векторов

Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**

На рисунке 164 показано построение суммы трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: от произвольной




$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Рис. 164

точки $O$ отложен вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, затем от точки $A$ отложен вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, и, наконец, от точки $B$ отложен вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{OC}$, равный $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Аналогично можно построить сумму любого числа векторов. На рисунке 165 построена сумма $\overrightarrow{OE}$ пяти векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Заметим, однако, что, в отличие от случая векторов на плоскости, «многоугольник», который получается при построении суммы векторов в пространстве, может оказаться пространственным, т. е. таким, у которого не все вершины лежат в одной плоскости. Таковым является, например, «четырёхугольник» $OABC$ на рисунке 164, с помощью которого построен вектор $\overrightarrow{OC}$.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ — произвольные точки, то

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Это правило проиллюстрировано на рисунке 166 для $n=7$. Отметим, что если точки $A_1$ и $A_n$, т. е. начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.

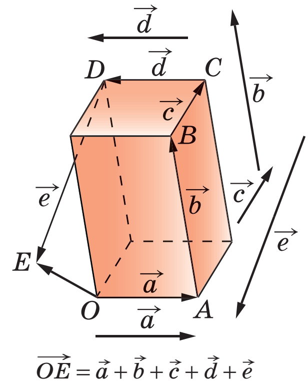



Рис. 165

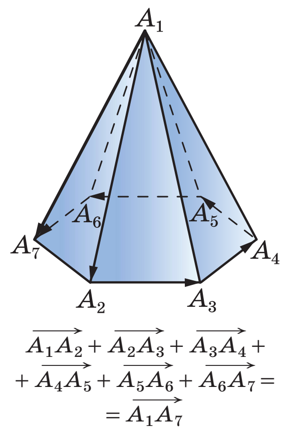



Рис. 166

## 67 Умножение вектора на число

**Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k$ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.**

Произведение вектора $\vec{a}$ на число $k$ обозначается так: $k\vec{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что **для любого числа $k$ и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.** Из этого определения следует также, что **произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.**

Напомним основные свойства умножения вектора на число, известные нам для векторов на плоскости. Они имеют место и для векторов в пространстве.

**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел $k$, $l$ справедливы равенства:**
**$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);**
**$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$ (первый распределительный закон);**
**$(k+l)\vec{a} = k\vec{a}+l\vec{a}$ (второй распределительный закон).**

Отметим, что $(-1)\vec{a}$ является вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, т. е. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Действительно, длины векторов $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ равны: $|(-1)\vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Кроме того, если вектор $\vec{a}$ ненулевой, то векторы $(-1)\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены.

Точно так же, как в планиметрии, можно доказать, что **если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число $k$ такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.**

## Задачи

**564** На рисунке 157 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

**565** Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

**566** Назовите все векторы, образованные рёбрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$.

**567** Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{c}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $\vec{c} - \vec{b}$; д) $\vec{c} - \vec{a}$.

**568** Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а $O$ — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

**569** На рисунке 157 изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Представьте векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DK}$ в виде разности двух векторов, начала и концы которых совпадают с отмеченными на рисунке точками.

**570** В пространстве даны четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов: а) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$; б) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC}$.

571 Дан прямоугольный параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Докажите, что: а) $|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}|$; б) $|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}|=|\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}|$; в) $|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}|=|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}|$.

572 Упростите выражение: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}$; б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}$; в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}$; г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$.

573 Даны точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов: а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$.

574 Упростите выражение: а) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KA}$; б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}$; в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}$.

575 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$, где $O$ — произвольная точка пространства.

576 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, такой, что: а) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{CD_1}+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA}+\vec{x}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$.

577 Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что: а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{BB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AC}-\vec{x}+\overrightarrow{BC_1}$.

578 Основанием четырёхугольной пирамиды с вершиной $P$ является трапеция $ABCD$. Точка $O$ — середина средней линии трапеции. Докажите, что $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}$.

579 Точка $P$ — вершина правильной шестиугольной пирамиды. Докажите, что сумма всех векторов с началом в точке $P$, образованных боковыми рёбрами пирамиды, равна сумме всех векторов с началом в точке $P$, образованных апофемами.

580 Известно, что $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что точки $A$ и $B$ симметричны относительно точки $O$.

581 Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке $O$. Найдите число $k$, такое, что: а) $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC_1}=k\cdot\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OB_1}=k\cdot\overrightarrow{B_1D}$.

582 Точки $E$ и $F$ — середины оснований $AB$ и $BC$ параллелограмма $ABCD$, а $O$ — произвольная точка пространства. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ через вектор $\overrightarrow{EF}$; б) вектор $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}$ через вектор $\overrightarrow{DC}$.

583 Точки $M$ и $N$ — середины сторон $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$, а $O$ — произвольная точка пространства. Выразите вектор $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$ через векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

584 Упростите: а) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}$; б) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})$.

585 Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=2\overrightarrow{BC}$.

**586** Три точки $A$, $B$ и $M$ удовлетворяют условию $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$, где $\lambda\neq-1$. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой и для любой точки $O$ пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

**Решение**

Из равенства $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$ следует, что векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ коллинеарны, поэтому прямые $AM$ и $MB$ либо параллельны, либо совпадают. Так как эти прямые имеют общую точку $M$, то они совпадают, и, следовательно, точки $A$, $B$ и $M$ лежат на одной прямой. Поскольку $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$, то из равенства $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$ имеем $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$, или $(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}$. Отсюда, разделив на $1+\lambda$, получаем искомое равенство.

**587** Известно, что $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, причём векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно не сонаправлены. Докажите, что $|\vec{p}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

**588** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Докажите, что коллинеарны векторы: а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

**589** Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

**590** Векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

**591** Докажите, что если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ и не коллинеарны, то не коллинеарны и векторы: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$.

# § 3 Компланарные векторы

## 68 Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

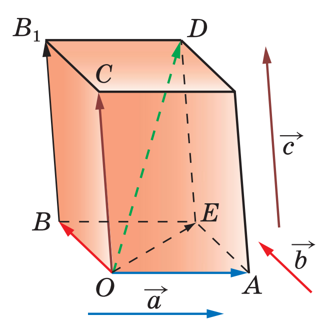


Рис. 167

Ясно, что любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны (объясните почему), а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке 167 изображён параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны, так как если отложить от точки $O$ вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в одной плоскости $OCE$. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости $OAB$. Рассмотрим признак компланарности трёх векторов.

**Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде**

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \tag{1}$$

**где $x$ и $y$ — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.**

Докажем это утверждение. Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна). Отложим от произвольной точки $O$ векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 168). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости $OAB$. Очевидно, в этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, а следовательно, и их сумма — вектор $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$. Итак, векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

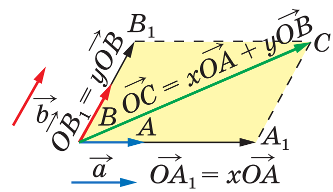



Рис. 168

Справедливо и обратное утверждение: **если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$** (т. е. представить в виде (1)), **причём коэффициенты разложения** (т. е. числа $x$, $y$ в формуле (1)) **определяются единственным образом.** Пользуясь теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, известной из курса планиметрии, докажите это утверждение самостоятельно.

## 69 Правило параллелепипеда

Для сложения трёх некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым **правилом параллелепипеда.** Опишем его. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки $O$ пространства векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки $OA$, $OB$ и $OC$ были его рёбрами (см. рис. 167). Тогда диагональ $OD$ этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Действительно,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \\ = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

## 70 Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (2)$$

где $x$, $y$ и $z$ — некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.** Числа $x$, $y$, $z$ называются **коэффициентами разложения.**

Докажем теорему о разложении вектора по трём некомпланарным векторам.

**Теорема**

**Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.**

**Доказательство**

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — данные некомпланарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде (2).

Отметим произвольную точку $O$ и отложим от этой точки векторы (рис. 169):

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}. \qquad (3)$$

Через точку $P$ проведём прямую, параллельную прямой $OC$, и обозначим через $P_1$ точку пересечения этой прямой с плоскостью $AOB$ (если $P \in OC$, то в качестве точки $P_1$ возьмём точку $O$). Затем через точку $P_1$ проведём прямую, параллельную прямой $OB$, и обозначим через $P_2$ точку пересечения этой прямой с прямой $OA$ (если $P_1 \in OB$, то в качестве точки $P_2$ возьмём точку $O$). По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (4)$$

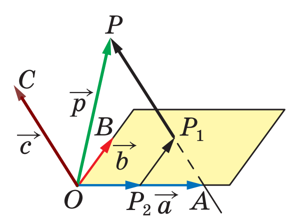


Рис. 169

Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, поэтому существуют числа $x$, $y$, $z$ такие, что $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$. Подставив эти выражения в равенство (4), получим:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Отсюда, учитывая равенства (3), приходим к равенству (2).

Докажем теперь, что коэффициенты разложения в формуле (2) определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением (2) имеется другое разложение вектора $\vec{p}$: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Вычитая это равенство из равенства (2) и используя свойства действий над векторами, получаем:

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}.$$

Это равенство выполняется только тогда, когда $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. В самом деле, если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого равенства находим:

$$\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b},$$

откуда следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно, и $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения (2) определяются единственным образом. Теорема доказана.

Если векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, то $z = 0$ (объясните почему), и вектор $\vec{p}$ оказывается фактически разложенным по двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

### Вопросы и задачи

**592** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие из следующих трёх векторов компланарны: а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$?

**593** Точки $E$ и $F$ — середины рёбер $AC$ и $BD$ тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

**594** Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

**595** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$.

**596** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. б) Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

**597** В вершинах $A_1$, $B$ и $D$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $a$, помещены точечные заряды $q$. а) Выразите результирующую напряжённость[1] создаваемого ими электрического поля в точках $A$ и $C_1$ через вектор $\overrightarrow{AC_1}$. б) Найдите абсолютную величину результирующей напряжённости в точках $C$, $B_1$, в центре грани $A_1B_1C_1D_1$ и в центре куба.

**598** Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке $O$. Разложите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

**599** Точка $K$ — середина ребра $BC$ тетраэдра $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$.

**Решение**

Так как точка $K$ — середина отрезка $BC$, то $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$. Но $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{c}$. Поэтому

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

**600** Основанием пирамиды с вершиной $O$ является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $M$. Разложите векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

**601** Точка $K$ — середина ребра $B_1C_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно $m$.

**602** Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка $O$. Точка $M$ — середина $AB$, а точка $K$ — середина $MD$. Разложите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$.

**603** Докажите, что если $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, а $O$ — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (5)$$

---

[1] Если в точке $O$ находится точечный заряд $q$, то напряжённость $\vec{E}$ создаваемого им электрического поля в точке $M$ выражается формулой $\vec{E}=\frac{kq}{OM^3}\cdot\overrightarrow{OM}$, где коэффициент $k$ зависит от выбора системы единиц.

**Решение**

По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MA_1}$, где $AA_1$ — медиана треугольника $ABC$ (рис. 170). Согласно задаче 586 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{1+2}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{3}$. Но $\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (объясните почему), поэтому $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

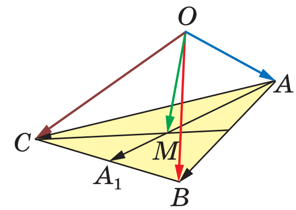



Рис. 170

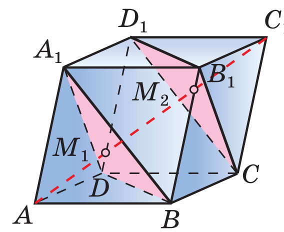



Рис. 171

**604** В тетраэдре $ABCD$ медиана $AA_1$ грани $ABC$ делится точкой $K$ так, что $AK : KA_1 = 3 : 7$. Разложите вектор $\overrightarrow{DK}$ по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

**605** Точки $M$ и $N$ являются серединами рёбер $AB$ и $A_1D_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите, если это возможно, по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CM}$; в) $\overrightarrow{C_1N}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1N}$; е) $\overrightarrow{AN}$; ж) $\overrightarrow{MD}$.

**606** Медианы грани $ABC$ тетраэдра $OABC$ пересекаются в точке $M$. Разложите вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$.

**607** Высоты $AM$ и $DN$ правильного тетраэдра $ABCD$ пересекаются в точке $K$. Разложите по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ вектор: а) $\overrightarrow{DN}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{AM}$; г) $\overrightarrow{MK}$.

**608** В тетраэдре $ABCD$ медианы грани $BCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что длина отрезка $AO$ меньше одной трети суммы длин рёбер с общей вершиной $A$.

**609** Докажите, что диагональ $AC_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точки пересечения медиан треугольников $A_1BD$ и $CB_1D_1$ и делится этими точками на три равных отрезка (рис. 171).

**Решение**

Обозначим через $M_1$ точку пересечения медиан треугольника $A_1BD$. Применив формулу (5) к тетраэдру $AA_1BD$, получим $\overrightarrow{AM_1}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC_1}$, поэтому $\overrightarrow{AM_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Отсюда следует, что точка $M_1$ принадлежит диагонали $AC_1$ и $AM_1=\dfrac{1}{3}AC_1$.

Точно так же можно доказать, что точка $M_2$ пересечения медиан треугольника $CB_1D_1$ принадлежит диагонали $AC_1$ и $C_1M_2=\dfrac{1}{3}AC_1$.

Из равенств $AM_1 = \frac{1}{3} AC_1$ и $C_1M_2 = \frac{1}{3} AC_1$ следует, что точки $M_1$ и $M_2$ делят диагональ $AC_1$ параллелепипеда на три равных отрезка $AM_1$, $M_1M_2$ и $M_2C_1$.

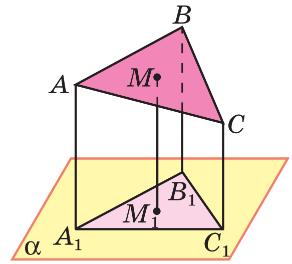


Рис. 172

**610** Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $M_1$ — основания перпендикуляров, проведённых к плоскости α из вершин треугольника $ABC$ и из точки $M$ пересечения медиан этого треугольника (рис. 172). Докажите, что $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$. Останется ли верным равенство, если какие-то стороны треугольника $ABC$ пересекаются с плоскостью α?

**611** Отрезки $AB$ и $CD$ не лежат в одной плоскости, точки $M$ и $N$ — середины этих отрезков. Докажите, что $MN < \frac{1}{2}(AC + BD)$.

**612** В тетраэдре $ABCD$ точки $K$ и $M$ — середины рёбер $AB$ и $CD$. Докажите, что середины отрезков $KC$, $KD$, $MA$ и $MB$ являются вершинами некоторого параллелограмма.

## Вопросы к главе VI

**1** Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$; е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

**2** Точки $A$ и $C$ симметричны относительно точки $O$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Симметричны ли точки $B$ и $D$ относительно точки $O$?

**3** Точки $A$ и $C$ симметричны относительно прямой $a$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Могут ли точки $B$ и $D$ быть: а) симметричными относительно прямой $a$; б) несимметричными относительно прямой $a$?

**4** Точки $A$ и $C$, а также точки $B$ и $D$ симметричны относительно плоскости α. Могут ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ быть: а) равными; б) неравными?

**5** Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

**6** Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

**7** Может ли длина суммы нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

**8** Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

9 Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной разности длин этих векторов?

10 Может ли длина суммы двух ненулевых векторов быть равна длине разности этих векторов?

11 На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:
а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = |\vec{a}|$; б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$; в) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$; г) $\vec{b} = \vec{0}$?

12 Известно, что $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, причём точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. При каком значении $k$ прямые $AC$ и $BD$ являются: а) параллельными; б) пересекающимися? Могут ли прямые $AC$ и $BD$ быть скрещивающимися?

13 Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$; б) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$?

14 Известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$?

15 Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на окружности, а точка $O$ не лежит в плоскости этой окружности. Могут ли векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ быть компланарными?

## Дополнительные задачи

**613** Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что:
а) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$;
б) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$;
в) $\overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QP_1}$.

**614** На рисунке 173 изображён правильный октаэдр. Докажите, что:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}$;
в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AF}$.

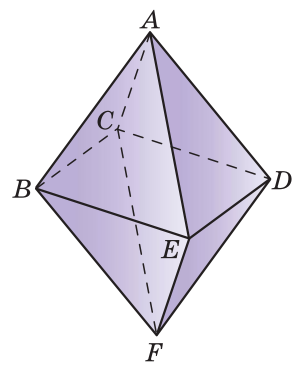


Рис. 173

**615** Докажите, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

**616** Дан тетраэдр $ABCD$. Найдите сумму векторов:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

**617** Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$;
б) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$;
в) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

**618** Даны треугольники $ABC$, $A_1B_1C_1$ и две точки $O$ и $P$ пространства. Известно, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC_1}$. Докажите, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны и параллельны сторонам треугольника $ABC$.

**619** При каких значениях $k$ в равенстве $\vec{a} = k\vec{b}$, где $\vec{b} \neq \vec{0}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены; г) являются противоположными?

**620** Числа $k$ и $l$ не равны друг другу. Докажите, что если векторы $\vec{a} + k\vec{b}$ и $\vec{a} + l\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $\vec{a} + k_1\vec{b}$ и $\vec{a} + l_1\vec{b}$ не коллинеарны при любых неравных числах $k_1$ и $l_1$.

**621** Точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$, точка $O$ — произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

**622** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точке $M$. Точка $O$ — произвольная точка пространства. Докажите, что справедливо равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

**623** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что для любой точки $M$ пространства справедливо неравенство $MO < \frac{1}{4}(MA + MB + MC + MD)$.

**624** Три точки $M$, $N$ и $P$ лежат на одной прямой, а точка $O$ не лежит на этой прямой. Выразите вектор $\overrightarrow{OP}$ через векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, если: а) $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; в) $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MN}$, где $k$ — данное число.

**625** Докажите, что векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ компланарны, если: а) один из данных векторов нулевой; б) два из данных векторов коллинеарны.

**626** На двух скрещивающихся прямых отмечены по три точки: $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$, причём $\overrightarrow{A_1A_2} = k \cdot \overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = k \cdot \overrightarrow{B_1B_3}$. Докажите, что прямые $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ параллельны некоторой плоскости.

**627** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = AD = a$, $AA_1 = 2a$. В вершинах $B_1$ и $D_1$ помещены заряды $q$, а в вершине $A$ — заряд $2q$. Найдите абсолютную величину результирующей напряжённости электрического поля: а) в точке $A_1$; б) в точке $C$; в) в центре грани $A_1B_1C_1D_1$; г) в центре грани $ABCD$.

**628** В тетраэдре $ABCD$ точка $K$ — середина медианы $BB_1$ грани $BCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

**629** На трёх некомпланарных векторах $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$ построен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ векторы, образованные диагоналями этого параллелепипеда.

**630** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $K$ — середина ребра $CC_1$. Разложите вектор: а) $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

**631** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани $DCC_1D_1$ пересекаются в точке $M$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

**632** Докажите, что если точки пересечения медиан треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ совпадают, то прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ параллельны некоторой плоскости.

**633** В тетраэдре $ABCD$ точка $M$ — середина ребра $BC$. Выразите через векторы $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DM}$.

**634** В тетраэдре $ABCD$ точки $M$ и $N$ являются соответственно точками пересечения медиан граней $ADB$ и $BDC$. Докажите, что $MN \parallel AC$, и найдите отношение длин этих отрезков.

**635** Треугольники $ABC$, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены так, что точки $A$, $B$, $C$ являются серединами отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $ABC$, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат на одной прямой.

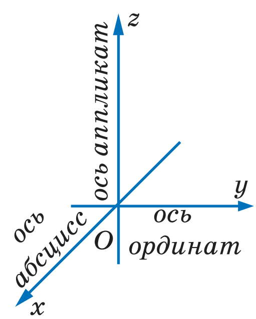
**636** Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан боковых граней тетраэдра, подобен основанию тетраэдра.

# Глава VII
# Метод координат в пространстве. Движения

## § 1 Координаты точки и координаты вектора

### 71 Прямоугольная система координат в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков[1], то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве (рис. 174). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой $O$. Оси координат обозначаются так: $Ox$, $Oy$, $Oz$ — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат $Ox$ и $Oy$, $Oy$ и $Oz$, $Oz$ и $Ox$, называются **координатными плоскостями** и обозначаются $Oxy$, $Oyz$, $Ozx$.



Система координат $Oxyz$

Рис. 174

Точка $O$ разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке $M$ пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её **координатами**. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведём через точку $M$ три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через $M_1$, $M_2$ и $M_3$ точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 175). Первая

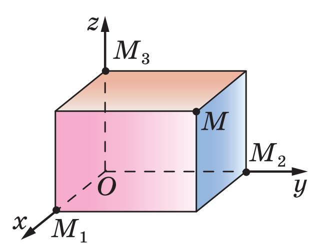


Рис. 175

[1] Напомним, что при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В данной главе под длиной отрезка подразумевается это число.

координата точки $M$ (она называется **абсциссой** и обозначается обычно буквой $x$) определяется так: $x = OM_1$, если $M_1$ — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если $M_1$ — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если $M_1$ совпадает с точкой $O$. Аналогично с помощью точки $M_2$ определяется вторая координата **(ордината)** $y$ точки $M$, а с помощью точки $M_3$ — третья координата **(аппликата)** $z$ точки $M$. Координаты точки $M$ записываются в скобках после обозначения точки: $M(x; y; z)$, причём первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 176 изображены шесть точек $A(9; 5; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $E(0; 3; 0)$, $F(0; 0; -3)$.

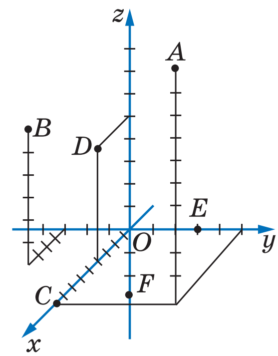



Рис. 176

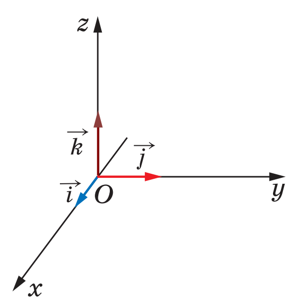
Если точка $M(x; y; z)$ лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые её координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки $M$ равна нулю: $z = 0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y = 0$, а если $M \in Oyz$, то $x = 0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки $M$ равны нулю: $y = 0$ и $z = 0$ (например, у точки $C$ на рисунке 176). Если $M \in Oy$, то $x = 0$ и $z = 0$; если $M \in Oz$, то $x = 0$ и $y = 0$. Все три координаты начала координат равны нулю: $O(0; 0; 0)$.

## 72 Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 177). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовём **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

**причём коэффициенты разложения $x$, $y$, $z$ определяются единственным образом.**




Координатные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Рис. 177

Коэффициенты $x$, $y$ и $z$ в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются

**координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.** Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$. На рисунке 178 изображён прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Координаты векторов, изображённых на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\{2;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\{2;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\{2;\ 2;\ 0\}$, $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\{0;\ 0;\ 1\}$.

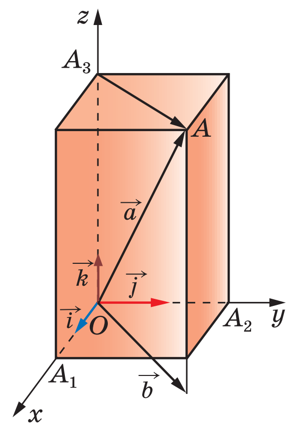


Рис. 178

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ равны, то $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ и $z_1 = z_2$ (объясните почему).

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

**$1^0$. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.** Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

**$2^0$. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.** Другими словами, если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$.

**$3^0$. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.** Другими словами, если $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ — данный вектор, $\alpha$ — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z\}$.

Утверждения $1^0$—$3^0$ доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

**Задача**

Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a}\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\{0; 3; -6\}$, $\vec{c}\{-2; 3; 1\}$.

**Решение**

По правилу $3^0$ вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x; y; z\}$ можно вычислить по правилу $1^0$: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.

## 73 Связь между координатами векторов и координатами точек

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки. Докажем, что **координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора**.

Обозначим координаты данной точки $M$ через $(x; y; z)$. Пусть $M_1$, $M_2$, $M_3$ — точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку $M$ перпендикулярно к этим осям (рис. 179). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. В самом деле, если точка $M_1$ лежит на положительной полуоси абсцисс, как на рисунке 179, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если точка $M_1$ лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если точка $M_1$ совпадает с точкой $O$, то $x = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Поэтому $x\vec{i} = \vec{0}$, и снова справедливо равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$.

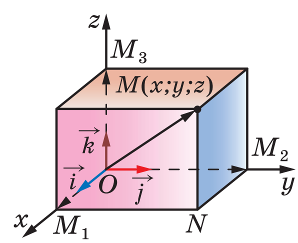



Рис. 179

Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Отсюда следует, что координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x; y; z\}$, т. е. координаты точки $M$ равны соответствующим координатам её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, что и требовалось доказать.

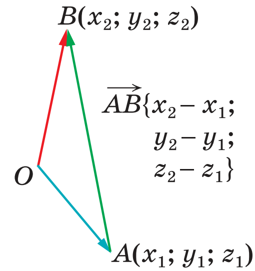



Рис. 180

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала $A$ и конца $B$. Пусть точка $A$ имеет координаты $(x_1; y_1; z_1)$, а точка $B$ — координаты $(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 180), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

Но координаты векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек $B$ и $A$: $\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Итак, **каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

## 74 Простейшие задачи в координатах

а) **Координаты середины отрезка.** В системе координат $Oxyz$ отметим точку $A$ с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку $B$ с координатами $(x_2; y_2; z_2)$. Выразим координаты $(x; y; z)$ середины $C$ отрезка $AB$ через координаты его концов (рис. 181). Так как точка $C$ — середина данного отрезка $AB$, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам трёх точек $C$, $A$ и $B$: $\overrightarrow{OC}\{x; y; z\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2; z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

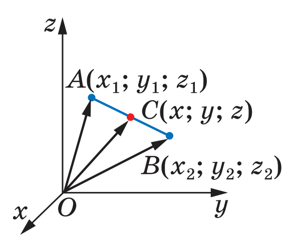



Рис. 181

Таким образом, **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

б) **Вычисление длины вектора по его координатам.** Докажем, что **длина вектора $\vec{a}\,\{x;\,y;\,z\}$ вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 182). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

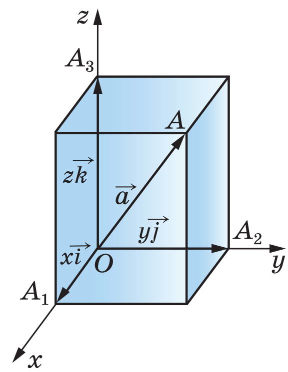



Рис. 182

В самом деле, если точка $A$ не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 182), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2.$$

Во всех других случаях расположения точки $A$ (точка $A$ лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) **Расстояние между двумя точками.** Рассмотрим две произвольные точки: точку $M_1$ с координатами $(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и точку $M_2$ с координатами $(x_2;\,y_2;\,z_2)$ (рис. 183). Выразим расстояние $d$ между точками $M_1$ и $M_2$ через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\}$. По формуле (3)

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Но $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$.

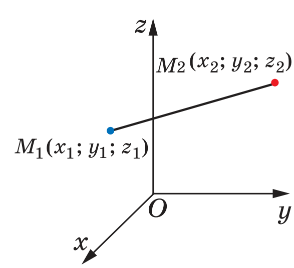



Рис. 183

Таким образом, **расстояние между точками $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$ вычисляется по формуле**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

## 75 Уравнение сферы

Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и дана некоторая поверхность $F$, например сфера. Уравнение с тремя переменными $x$, $y$, $z$ называется **уравнением поверхности** $F$, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности $F$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности. Отметим, что понятие уравнения поверхности аналогично понятию уравнения линии, введённому в курсе планиметрии.

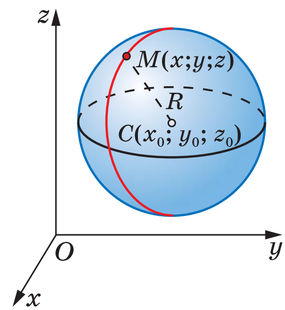


Рис. 184

Выведем уравнение сферы радиуса $R$ с центром $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 184).

Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y;\ z)$ до точки $C$ вычисляется по формуле

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Если точка $M$ лежит на данной сфере, то $MC = R$, или $MC^2 = R^2$, т. е. координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M(x;\ y;\ z)$ не лежит на данной сфере, то $MC^2 \neq R^2$, т. е. координаты точки $M$ не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, **в прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса $R$ с центром $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$** имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

### Вопросы и задачи

**637** Даны точки $A(3;\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -7)$, $C(2;\ 0;\ 0)$, $D(-4;\ 0;\ 3)$, $E(0;\ -1;\ 0)$, $F(1;\ 2;\ 3)$, $G(0;\ 5;\ -7)$, $H(-\sqrt{5};\ \sqrt{3};\ 0)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости $Oxy$; д) плоскости $Oyz$; е) плоскости $Oxz$?

**638** Найдите координаты проекций точек $A(2;\ -3;\ 5)$, $B\left(3;\ -5;\ \frac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$ на: а) координатные плоскости $Oxz$, $Oxy$ и $Oyz$; б) оси координат $Ox$, $Oy$ и $Oz$.

**639** Даны координаты четырёх вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 1)$, $D(0;\ 1;\ 0)$ и $A_1(1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

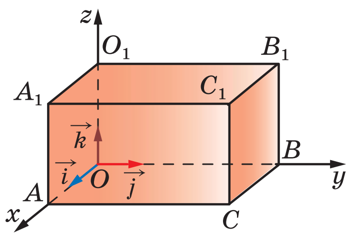



Рис. 185

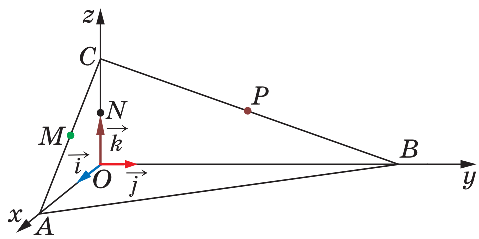



Рис. 186

**640** Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$.

**641** Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

**642** На рисунке 185 изображён прямоугольный параллелепипед, у которого $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 2$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ в системе координат $Oxyz$.

**643** Докажите, что каждая координата суммы (разности) двух векторов равна сумме (разности) соответствующих координат этих векторов.

**644** Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -5;\ 2\}$, $\vec{b}\{0;\ 7;\ -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};\ 0;\ 0\right\}$ и $\vec{d}\{-2{,}7;\ 3{,}1;\ 0{,}5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{d} + \vec{b}$; д) $\vec{d} + \vec{a}$; е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$; з) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

**645** По данным рисунка 186 найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, если $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, а $M$, $N$ и $P$ — середины отрезков $AC$, $OC$ и $CB$.

**646** Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ 0{,}2;\ 0\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{5};\ -\frac{1}{7}\right\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $\vec{d} - \vec{a}$; д) $\vec{c} - \vec{d}$; е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0{,}2\vec{b}$.

**647** Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ -5;\ -2\}$ и $\vec{c}\{2;\ 1;\ -3\}$. Найдите координаты векторов $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$.

**648** Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\{-2;\ 1;\ -2\}$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; б) $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$; в) $0{,}1\vec{a} + 3\vec{b} + 0{,}7\vec{c} - 5\vec{d}$; г) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

**649** Найдите координаты векторов, противоположных следующим векторам: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}\{-3;\ 5;\ -7\}$, $\vec{c}\{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\}$.

**650** Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ и $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$; б) $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$; в) $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$; г) $\vec{m}\{0;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{n}\{5;\ 7;\ -3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};\ -1;\ 5\right\}$ и $\vec{q}\{-1;\ -3;\ -15\}$?

**Решение**

а) Координаты вектора $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$: $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}=k$, где $k=\frac{1}{2}$. Поэтому $\vec{a}=k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$, например $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$. Поэтому векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны. В самом деле, если предположить, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, то существует такое число $k$, что $\vec{c}=k\vec{d}$. Но тогда координаты вектора $\vec{c}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{d}$, что противоречит условию задачи.

**651** Найдите значения $m$ и $n$, при которых следующие векторы коллинеарны: а) $\vec{a}\{15;\ m;\ 1\}$ и $\vec{b}\{18;\ 12;\ n\}$; б) $\vec{c}\{m;\ 0{,}4;\ -1\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2};\ n;\ 5\right\}$.

**652** Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-3;\ -3;\ 0\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; б) $\vec{b}\{2;\ 0;\ -3\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; в) $\vec{c}\{1;\ 0;\ -2\}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$; г) $\vec{d}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{e}\{-2;\ 0;\ 1\}$ и $\vec{f}\{5;\ -1;\ 0\}$; д) $\vec{m}\{1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{n}\{1;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{p}\{-1;\ 2;\ 4\}$; е) $\vec{q}\{0;\ 5;\ 3\}$, $\vec{r}\{3;\ 3;\ 3\}$ и $\vec{s}\{1;\ 1;\ 4\}$?

**Решение**

г) Векторы $\vec{d}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{e}\{-2;\ 0;\ 1\}$ не коллинеарны, так как координаты одного не пропорциональны координатам другого. Если вектор $\vec{f}\{5;\ -1;\ 0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. Если же вектор $\vec{f}$ нельзя разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны (в противном случае вектор $\vec{f}$ можно было бы разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$). Таким образом, для решения задачи нужно установить, можно ли вектор $\vec{f}$ разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, т. е. существуют ли числа $x$ и $y$ такие, что $\vec{f}=x\vec{d}+y\vec{e}$. Записывая это равенство в координатах, получаем: $5=x-2y$, $-1=-x$, $0=2x+y$.

Если эта система уравнений имеет решение относительно $x$ и $y$, то вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, а если не имеет решения, то вектор $\vec{f}$ разложить нельзя. В данном случае система имеет решение: $x=1$, $y=-2$. Поэтому вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, и, значит, векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны.

**653** Даны векторы $\overrightarrow{OA}\{3;\ 2;\ 1\}$, $\overrightarrow{OB}\{1;\ -3;\ 5\}$ и $\overrightarrow{OC}\left\{-\frac{1}{3};\ 0{,}75;\ -2\frac{3}{4}\right\}$. Запишите координаты точек $A$, $B$ и $C$, если точка $O$ — начало координат.

**654** Даны точки $A(2;\ -3;\ 0)$, $B(7;\ -12;\ 18)$ и $C(-8;\ 0;\ 5)$. Запишите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если точка $O$ — начало координат.

**655** Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(2;\ -1;\ 4)$; б) $A(-2;\ 6;\ -2)$, $B(3;\ -1;\ 0)$; в) $A\left(1;\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$.

**656** Вершины треугольника $ABC$ имеют координаты: $A(1;\ 6;\ 2)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-3;\ 4;\ 5)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

**657** Даны точки $A(3;\ -1;\ 5)$, $B(2;\ 3;\ -4)$, $C(7;\ 0;\ -1)$ и $D(8;\ -4;\ 8)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны. Равны ли векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

**658** Лежат ли точки $A$, $B$ и $C$ на одной прямой, если: а) $A(3;\ -7;\ 8)$, $B(-5;\ 4;\ 1)$, $C(27;\ -40;\ 29)$; б) $A(-5;\ 7;\ 12)$, $B(4;\ -8;\ 3)$, $C(13;\ -23;\ -6)$; в) $A(-4;\ 8;\ -2)$, $B(-3;\ -1;\ 7)$, $C(-2;\ -10;\ -16)$?

**Решение**

а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, то точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Найдём координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{-8;\ 11;\ -7\}$, $\overrightarrow{AC}\{24;\ -33;\ 21\}$. Очевидно, $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и, следовательно, точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

**659** Лежат ли точки $A$, $B$, $C$ и $D$ в одной плоскости, если:
а) $A(-2;\ -13;\ 3)$, $B(1;\ 4;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ -4)$, $D(0;\ 0;\ 0)$;
б) $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(3;\ 4;\ -1)$, $C(-2;\ -3;\ 0)$, $D(2;\ 0;\ 3)$;
в) $A(5;\ -1;\ 0)$, $B(-2;\ 7;\ 1)$, $C(12;\ -15;\ -7)$, $D(1;\ 1;\ -2)$?

**660** Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $ABC$ с вершинами $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ имеет координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

**661** Точка $M$ — середина отрезка $AB$. Найдите координаты: а) точки $M$, если $A(0;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 2;\ 0)$; б) точки $B$, если $A(14;\ -8;\ 5)$, $M(3;\ -2;\ -7)$; в) точки $A$, если $B(0;\ 0;\ 2)$, $M(-12;\ 4;\ 15)$.

**662** Середина отрезка $AB$ лежит на оси $Ox$. Найдите $m$ и $n$, если: а) $A(-3;\ m;\ 5)$, $B(2;\ -2;\ n)$; б) $A(1;\ 0{,}5;\ -4)$, $B(1;\ m;\ 2n)$; в) $A(0;\ m;\ n+1)$, $B(1;\ n;\ -m+1)$; г) $A(7;\ 2m+n;\ -n)$, $B(-5;\ -3;\ m-3)$.

**663** Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ -2;\ 3)$; б) $A(-35;\ -17;\ 20)$, $B(-34;\ -5;\ 8)$.

**664** Найдите длины векторов: $\vec{a}\{5;\ -1;\ 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$.

**665** Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 3;\ 1\}$ и $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 1\}$. Найдите: а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$; е) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.

**666** Даны точки $M(-4;\ 7;\ 0)$ и $N(0;\ -1;\ 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка $MN$.

**667** Даны точки $A\left(\frac{3}{2};\ 1;\ -2\right)$, $B(2;\ 2;\ -3)$ и $C(2;\ 0;\ -1)$. Найдите: а) периметр треугольника $ABC$; б) медианы треугольника $ABC$.

**668** Определите вид треугольника $ABC$, если: а) $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$; б) $A(3;\ 7;\ -4)$, $B(5;\ -3;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -10)$; в) $A(5;\ -5;\ -1)$, $B(5;\ -3;\ -1)$, $C(4;\ -3;\ 0)$; г) $A(-5;\ 2;\ 0)$, $B(-4;\ 3;\ 0)$, $C(-5;\ 2;\ -2)$.

**669** Найдите расстояние от точки $A(-3;\ 4;\ -4)$ до: а) координатных плоскостей; б) осей координат.

**670** На каждой из координатных плоскостей найдите такую точку, расстояние от которой до точки $A(-1;\ 2;\ -3)$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой координатной плоскости до точки $A$.

**671** На каждой из осей координат найдите такую точку, расстояние от которой до точки $B(3;\ -4;\ \sqrt{7})$ является наименьшим среди всех расстояний от точек этой оси до точки $B$.

**672** Даны точки $A(1;\ 0;\ k)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$. При каких значениях $k$ треугольник $ABC$ является равнобедренным?

**673** Даны точки $A(4;\ 4;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ 4)$ и $D(1;\ 4;\ 4)$. Докажите, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция.

**674** Найдите точку, равноудалённую от точек $A(-2;\ 3;\ 5)$ и $B(3;\ 2;\ -3)$ и расположенную на оси: а) $Ox$; б) $Oy$; в) $Oz$.

**675** Даны точки $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 1;\ 2)$ и $C(0;\ -1;\ 1)$. Найдите точку, равноудалённую от этих точек и расположенную на координатной плоскости: а) $Oxy$; б) $Oyz$; в) $Ozx$.

**676** Даны точки $O\ (0;\ 0;\ 0)$, $A\ (4;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 6;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ -2)$. Найдите: а) координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника $AOB$; б) координаты точки, равноудалённой от вершин тетраэдра $OABC$.

**677** Отрезок $CD$ длины $m$ перпендикулярен к плоскости прямоугольного треугольника $ABC$ с катетами $AC=b$ и $BC=a$. Введите подходящую систему координат и с помощью формулы расстояния между двумя точками найдите расстояние от точки $D$ до середины гипотенузы этого треугольника.

**678** Напишите уравнение сферы радиуса $R$ с центром $A$, если: а) $A(2;\ -4;\ 7)$, $R=3$; б) $A(0;\ 0;\ 0)$, $R=\sqrt{2}$; в) $A(2;\ 0;\ 0)$, $R=4$.

**679** Напишите уравнение сферы с центром $A$, проходящей через точку $N$, если: а) $A(-2;\ 2;\ 0)$, $N(5;\ 0;\ -1)$; б) $A(-2;\ 2;\ 0)$, $N(0;\ 0;\ 0)$; в) $A(0;\ 0;\ 0)$, $N(5;\ 3;\ 1)$.

**680** Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2+y^2+z^2=49$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=2$.

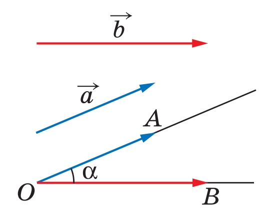
**681** Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы. Найдите координаты центра и радиус этой сферы: а) $x^2-4x+y^2+z^2=0$; б) $x^2+y^2+z^2-2y=24$; в) $x^2+2x+y^2+z^2=3$; г) $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$.

# § 2 Скалярное произведение векторов

## 76 Угол между векторами

Возьмём два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки $O$ векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи $OA$ и $OB$ образуют угол $AOB$ (рис. 187). Градусную меру этого угла обозначим буквой $\alpha$ и будем говорить, что **угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен** $\alpha$. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен $0°$. Если угол между векторами равен $90°$, то векторы называются **перпендикулярными**. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

На рисунке 188 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{a}\vec{d}}=60°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}}=180°$. На этом рисунке $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\alpha$

Рис. 187

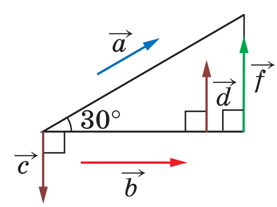



Рис. 188

## 77 Скалярное произведение векторов

**Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.** Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

**скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;**

**скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.**

Докажите их самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: **скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ выражается формулой**

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла $\alpha$ между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (1)$$

В самом деле, так как

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha,$$

то

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (1).

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

**Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа $k$ справедливы соотношения:**

**1⁰. $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$, причём $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.**

**2⁰. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон).**

**3⁰. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон).**

**4⁰. $k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$ (сочетательный закон).**

Утверждения $1^0$—$4^0$ доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d} + \vec{c}\vec{d}$ (см. задачу 699).

## 78 Вычисление углов между прямыми и плоскостями

Для вычисления угла между двумя прямыми, а также между прямой и плоскостью во многих случаях удобно использовать скалярное произведение. Прежде чем рассмотреть две такие задачи на вычисление углов, введём понятие направляющего вектора прямой.

**Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой *a*, если он лежит либо на прямой *a*, либо на прямой, параллельной *a*.**

**Задача 1**

Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

**Решение**

Пусть $\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — направляющие векторы прямых $a$ и $b$. Обозначим буквой $\varphi$ искомый угол между этими прямыми. Для решения задачи достаточно найти $\cos\varphi$, так как значение $\cos\varphi$ позволяет найти угол $\varphi$.

Введём обозначение: $\theta = \widehat{\vec{p}\vec{q}}$. Тогда либо $\varphi = \theta$, если $\theta \leqslant 90°$ (рис. 189, *а*), либо $\varphi = 180° - \theta$, если $\theta > 90°$ (рис. 189, *б*).

Поэтому либо $\cos\varphi = \cos\theta$, либо $\cos\varphi = -\cos\theta$. В любом случае $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$, а так как $\varphi \leqslant 90°$, то $\cos\varphi \geqslant 0$, и, следовательно, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. Используя формулу (1) п. 77, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$

**Задача 2**

Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости.

**Решение**

Пусть $\vec{p}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — направляющий вектор прямой $a$, $\vec{n}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости $\alpha$. Это означает, что прямая, на которой лежит вектор $\vec{n}$, перпендикулярна к плоскости $\alpha$. Обозначим буквой $\varphi$ искомый угол между прямой $a$ и плоскостью $\alpha$, а буквой $\theta$ — угол $\widehat{\vec{p}\vec{n}}$.

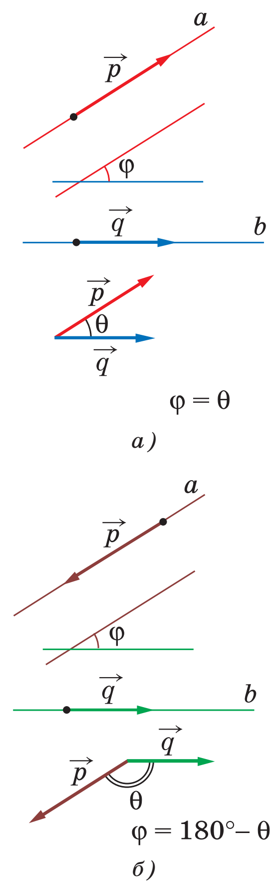



Рис. 189

Пользуясь рисунком 190, нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Поэтому для $\sin\varphi$ получается такое же выражение, как и в правой части равенства (2). Зная $\sin\varphi$ и учитывая, что $\varphi \leqslant 90^\circ$, можно найти угол $\varphi$.

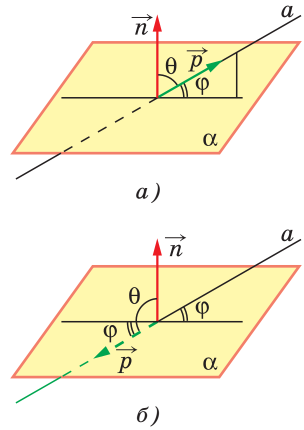



Рис. 190

## 79* Уравнение плоскости

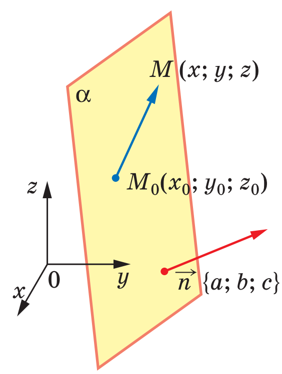
Выведем уравнения плоскости $\alpha$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b; c\}$ (рис. 191).

Если точка $M(x; y; z)$, отличная от $M_0$, принадлежит плоскости $\alpha$, то векторы $\vec{n}\{a; b; c\}$ и $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (3)$$

Отметим, что координаты точки $M_0$ также удовлетворяют этому уравнению. Если же точка $M(x; y; z)$ не принадлежит плоскости $\alpha$, то угол между векторами $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ отличается от $90^\circ$ (на величину угла между прямой $M_0M$ и плоскостью $\alpha$), и поэтому скалярное произведение этих векторов отлично от нуля и, следовательно, равенство (3) не выполняется.

Итак, уравнению (3) удовлетворяют координаты любой точки плоскости $\alpha$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей в этой плоскости. Поэтому **уравнение (3) является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b; c\}$.**




$\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

Если $M \in \alpha$, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$

Рис. 191

**Замечание**

Уравнение (3) можно записать также в виде

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Таким образом, **уравнение плоскости в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.**

Уравнение плоскости можно использовать для вычисления расстояния от данной точки до этой плоскости.

**Задача 3**

Найти расстояние от точки до плоскости, если известны координаты точки и уравнение плоскости.

**Решение**

Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — данная точка, $ax+by+cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ — уравнение данной плоскости $\alpha$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — проекция точки $M_0$ на плоскость $\alpha$ (рис. 192). Поскольку точка $M_1$ лежит в плоскости $\alpha$, то её координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0. \qquad (4)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\{x_1-x_0;\ \ y_1-y_0;\ \ z_1-z_0\}$ (если $\overrightarrow{M_0M_1} \neq \vec{0}$), как и вектор $\vec{n}\{a;\ b;\ c\}$, перпендикулярен к плоскости $\alpha$, поэтому $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$ (если $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{0}$, то также $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$). Следовательно, существует такое число $k$, что $\overrightarrow{M_0M_1}=k\vec{n}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x_1-x_0=ka,\ y_1-y_0=kb,\ z_1-z_0=kc. \qquad (5)$$

Заметим, наконец, что искомое расстояние $l$ равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. равно $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$. Таким образом, с учётом равенств (5) получаем:

$$l=|k|\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (6)$$

Выразим теперь координаты точки $M_1$ из уравнений (5) и подставим их в уравнение (4):

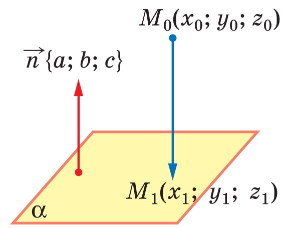
$$a(ka+x_0)+b(kb+y_0)+c(kc+z_0)+d=0.$$

Отсюда находим

$$k=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}.$$

Таким образом, формула (6) принимает следующий вид:

$$l=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$




$\alpha : ax+by+cz+d=0$

$\vec{n} \perp \alpha$

$\overrightarrow{M_0M_1} \perp \alpha$

$\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$

Рис. 192

## Задачи

**682** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

**683** Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен $\varphi$. Найдите углы $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}$.

**684** Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $a$, точка $O_1$ — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1O_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; е) $\overrightarrow{D_1O_1}$ и $\overrightarrow{B_1O_1}$; ж) $\overrightarrow{BO_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.

**685** Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-1;\ 1;\ 1\}$ и $\vec{c}\{5;\ 6;\ 2\}$. Вычислите $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$.

**686** Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}-5\vec{k}$. Вычислите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{i}$; в) $\vec{b}\vec{j}$; г) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})$.

**687** Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-5;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{c}\{-1;\ -2;\ 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

**688** Дан вектор $\vec{a}\{3;\ -5;\ 0\}$. Докажите, что: а) $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}<90°$; б) $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}>90°$; в) $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}=90°$.

**689** Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$ и $\vec{b}\{5;\ x;\ -1\}$. При каком значении $x$ выполняется условие: а) $\vec{a}\vec{b}=3$; б) $\vec{a}\vec{b}=-1$; в) $\vec{a}\perp\vec{b}$?

**690** Даны векторы $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$. При каком значении $m$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

**691** Даны точки $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(\sqrt{2};\ 1;\ 2)$, $C(\sqrt{2};\ 2;\ 1)$ и $D(0;\ 2;\ 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

**692** Вычислите угол между векторами: а) $\vec{a}\{2;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\}$ и $\vec{b}\{-3;\ -3;\ 0\}$; в) $\vec{a}\{0;\ 5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{0;\ -\sqrt{3};\ 1\}$; г) $\vec{a}\{-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\}$ и $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\}$; д) $\vec{a}\{-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -2\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -1\right\}$.

**693** Вычислите углы между вектором $\vec{a}\{2;\ 1;\ 2\}$ и координатными векторами.

**694** Даны точки $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$ и $C(1;\ 2;\ -1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

**695** Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(1;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 1)$ и $C(-1;\ 1;\ 3)$.

**696** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите косинус угла между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.

**697** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=1$, $BC=CC_1=2$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

**698** Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$ , $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

**699** Докажите справедливость равенства $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$.

**Решение**

Запишем сумму трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Пользуясь распределительным законом скалярного произведения векторов, получаем $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})\vec{d}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{d}+\vec{c}\vec{d}=$ $=(\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d})+\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$.

**700** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны к вектору $\vec{c}$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=120°$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=$ $=|\vec{c}|=1$. Вычислите: а) скалярные произведения $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})$ и $(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$.

**701** Докажите, что координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат равны $\{|\vec{a}|\cos\varphi_1;\ |\vec{a}|\cos\varphi_2;\ |\vec{a}|\cos\varphi_3\}$, где $\varphi_1=\widehat{\vec{a}\vec{i}}$, $\varphi_2=\widehat{\vec{a}\vec{j}}$, $\varphi_3=\widehat{\vec{a}\vec{k}}$.

**Решение**

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y;\ z\}$, то $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Умножив это равенство скалярно на $\vec{i}$ и используя свойства скалярного произведения, получим $\vec{a}\vec{i}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\vec{i}=x(\vec{i}\,\vec{i})+y(\vec{j}\,\vec{i})+z(\vec{k}\,\vec{i})$. Так как $\vec{i}\,\vec{i}=1$, $\vec{j}\,\vec{i}=0$, $\vec{k}\,\vec{i}=0$, то $\vec{a}\vec{i}=x$. С другой стороны, по определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{i}=|\vec{a}||\vec{i}|\cos\varphi_1=|\vec{a}|\cos\varphi_1$. Таким образом, $x=|\vec{a}|\cos\varphi_1$. Аналогично получаем равенства $y=|\vec{a}|\cos\varphi_2$, $z=|\vec{a}|\cos\varphi_3$.

**702** Все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу. Точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AD$ и $BC$. Докажите, что $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

**703** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1=AB=AD=1$, $\angle DAB=60°$, $\angle A_1AD=\angle A_1AB=90°$. Вычислите:

а) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}$; в) $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$; г) $|\overrightarrow{DB_1}|$; д) $|\overrightarrow{A_1C}|$;

е) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})$; ж) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})$.

**704** В тетраэдре $ABCD$ противоположные рёбра $AD$ и $BC$, а также $BD$ и $AC$ перпендикулярны. Докажите, что противоположные рёбра $CD$ и $AB$ также перпендикулярны.

**Решение**

Введём векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. По условию $AD\perp BC$ и $BD\perp AC$, поэтому $\vec{a}\perp(\vec{c}-\vec{b})$ и $\vec{b}\perp(\vec{c}-\vec{a})$. Следовательно, $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0$ и $\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})=0$. Отсюда получаем $\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}$ и $\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{a}$. Из этих двух равенств следует, что $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}$, или $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=0$. Но $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$, поэтому $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, и, значит, $AB\perp CD$, что и требовалось доказать.

**705** Вычислите угол между прямыми $AB$ и $CD$, если: а) $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(6; -3; 2)$, $D(7; -3; 1)$; б) $A(5; -8; -1)$, $B(6; -8; -2)$, $C(7; -5; -11)$, $D(7; -7; -9)$; в) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; -2; -4)$, $D(-2; -4; 0)$; г) $A(-6; -15; 7)$, $B(-7; -15; 8)$, $C(14; -10; 9)$, $D(14; -10; 7)$.

**706** Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой $AA_1 = \sqrt{2}AB$ (рис. 193, *а*). Найдите угол между прямыми $AC_1$ и $A_1B$.

**Решение**

Пусть $AB = a$, тогда $AA_1 = a\sqrt{2}$. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 193, *б*. Вершины $A$, $B$, $A_1$, $C_1$ имеют следующие координаты (объясните почему): $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$,

$B(0; a; 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right)$, $C_1(0; 0; a\sqrt{2})$.

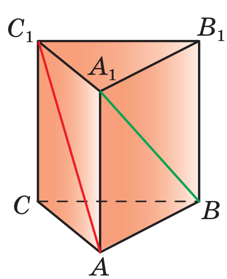
Отсюда находим координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$:

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}, \ \overrightarrow{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}.$$

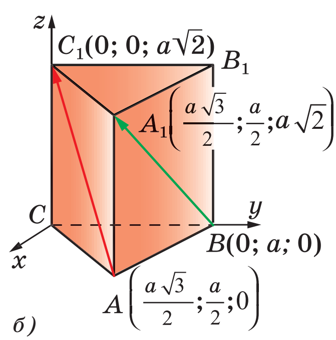
Векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ являются направляющими векторами прямых $AC_1$ и $A_1B$. Искомый угол $\varphi$ между ними можно найти с помощью формулы (2):

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 60^\circ.$$

**707** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $M$ лежит на ребре $AA_1$, причём $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка $N$ — середина ребра $BC$. Вычислите косинус угла между прямыми: а) $MN$ и $DD_1$; б) $MN$ и $BD$; в) $MN$ и $B_1D$; г) $MN$ и $A_1C$.



*а)*



*б)*

Рис. 193

**708** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$. Найдите угол между прямыми: а) $BD$ и $CD_1$; б) $AC$ и $AC_1$.

**709** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. Вычислите косинус угла между прямыми: а) $AC$ и $D_1B$; б) $AB_1$ и $BC_1$; в) $A_1D$ и $AC_1$.

**710** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали грани $ABCD$ пересекаются в точке $N$, а точка $M$ лежит на ребре $A_1D_1$, причём $A_1M : MD_1 = 1 : 4$. Вычислите синус угла между прямой $MN$ и плоскостью грани: а) $ABCD$; б) $DD_1C_1C$; в) $AA_1D_1D$.

**711** В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины рёбер $AD$ и $BC$, и плоскостью грани: а) $ABD$; б) $DBC$; в) $ABC$.

**712** Докажите, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен $90°$.

**713** Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что прямая $PM_1$ перпендикулярна к плоскостям $MN_1Q_1$ и $QNP_1$.

**714** Лучи $OA$, $OB$ и $OC$ образуют три прямых угла $AOB$, $AOC$ и $BOC$. Найдите угол между биссектрисами углов $COA$ и $AOB$.

**715** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60°$. Найдите $\varphi = \angle A_1AC_1$.

**Решение**

Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как показано на рисунке 194, и рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AC_1}$. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{\cos 60°;\ \cos 60°;\ \cos\varphi\}$, или $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \cos\varphi\right\}$. Так как $|\vec{a}| = 1$, то получим равенство $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi = 1$. Отсюда $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$, или $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как угол $\varphi$ острый, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $\varphi = 45°$.

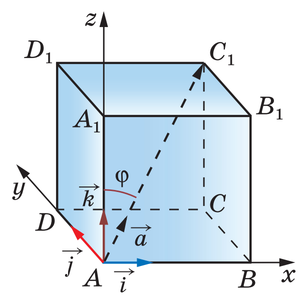


Рис. 194

**716** В тетраэдре $DABC$ $DA = 5$ см, $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, $\angle BAC = 90°$, $\angle DAB = 60°$, $\angle DAC = 45°$. Найдите расстояние от вершины $A$ до точки пересечения медиан треугольника $DBC$.

**717** Угол между диагональю $AC_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и каждым из рёбер $AB$ и $AD$ равен $60°$. Найдите $\angle CAC_1$.

**718** Проекция точки $K$ на плоскость квадрата $ABCD$ совпадает с центром этого квадрата. Докажите, что угол между прямыми $AK$ и $BD$ равен $90°$.

## § 3 Движения

### 80 Центральная симметрия

В курсе планиметрии мы познакомились с движениями плоскости, т. е. отображениями плоскости на себя, сохраняющими расстояния между точками. Введём теперь понятие движения пространства. Предварительно разъясним, что понимается под словами отображение пространства на себя. Допустим, что каждой точке $M$ пространства поставлена в соответствие некоторая точка $M_1$, причём любая точка $M_1$ пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке $M$. Тогда говорят, что задано **отображение пространства на себя.** Говорят также, что при данном отображении **точка $M$ переходит (отображается) в точку $M_1$.** Под **движением пространства** понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки $A$ и $B$ переходят (отображаются) в какие-то точки $A_1$ и $B_1$ так, что $A_1B_1 = AB$. Иными словами, **движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками.** Примером движения может служить **центральная симметрия** — отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей точку $M_1$ относительно данного центра $O$.

Докажем, что **центральная симметрия является движением.** Обозначим буквой $O$ центр симметрии и введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в точке $O$. Установим связь между координатами двух точек $M(x;\ y;\ z)$ и $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, симметричных относительно точки $O$. Если точка $M$ не совпадает с центром $O$, то $O$ — середина отрезка $MM_1$. По формулам координат середины отрезка $\frac{x+x_1}{2}=0$, $\frac{y+y_1}{2}=0$, $\frac{z+z_1}{2}=0$, откуда $x_1=-x$, $y_1=-y$, $z_1=-z$. Эти формулы верны, если точки $M$ и $O$ совпадают (объясните почему).

Рассмотрим теперь две точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками $A_1$ и $B_1$ равно $AB$. Точки $A_1$ и $B_1$ имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}.$$

Ясно, что $AB = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

## 81 Осевая симметрия

**Осевой симметрией** с осью $a$ называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей точку $M_1$ относительно оси $a$.

Докажем, что **осевая симметрия является движением.** Для этого введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось $Oz$ совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$, симметричных относительно оси $Oz$. Если точка $M$ не лежит на оси $Oz$, то ось $Oz$: 1) проходит через середину отрезка $MM_1$ и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x + x_1}{2} = 0$ и $\frac{y + y_1}{2} = 0$, откуда $x_1 = -x$ и $y_1 = -y$. Второе условие означает, что аппликаты точек $M$ и $M_1$ равны: $z_1 = z$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка $M$ лежит на оси $Oz$ (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками $A_1$ и $B_1$ равно $AB$. Точки $A_1$ и $B_1$ имеют координаты $A_1(-x_1; -y_1; z_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2; z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ясно, что $AB = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

## 82 Зеркальная симметрия

**Зеркальной симметрией** (симметрией относительно плоскости $\alpha$) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в симметричную ей относительно плоскости $\alpha$ точку $M_1$.

Докажем, что **зеркальная симметрия является движением.** Для этого введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость $Oxy$ совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек $M(x;\ y;\ z)$ и $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, симметричных относительно плоскости $Oxy$. Если точка $M$ не лежит в плоскости $Oxy$, то эта плоскость: 1) проходит через середину отрезка $MM_1$ и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем $\frac{z+z_1}{2}=0$, откуда $z_1=-z$. Второе условие означает, что отрезок $MM_1$ параллелен оси $Oz$, и, следовательно, $x_1=x$, $y_1=y$. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка $M$ лежит в плоскости $Oxy$ (объясните почему).

Рассмотрим теперь две точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и докажем, что расстояние между симметричными им точками $A_1$ и $B_1$ равно $AB$. Точки $A_1$ и $B_1$ имеют координаты $A_1(x_1;\ y_1;\ -z_1)$ и $B_1(x_2;\ y_2;\ -z_2)$. По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}.$$

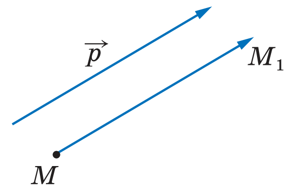
Из этих соотношений ясно, что $AB=A_1B_1$, что и требовалось доказать.

## 83 Параллельный перенос

Приведём ещё пример движения пространства. Возьмём какой-нибудь вектор $\vec{p}$. **Параллельным переносом** на вектор $\vec{p}$ называется отображение пространства на себя, при котором любая точка $M$ переходит в такую точку $M_1$, что $\overrightarrow{MM_1}=\vec{p}$ (рис. 195, *а*).

Докажем, что **параллельный перенос является движением.** При параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ любые две точки $A$ и $B$ переходят в точки $A_1$ и $B_1$, такие, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$. Требуется доказать, что $A_1B_1 = AB$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$ (рис. 195, *б*). Из этих двух равенств получаем $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, или $\vec{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Следовательно, $A_1B_1 = AB$, что и требовалось доказать.

Можно доказать (это делается так же, как и в планиметрии), что при любом движении отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую, плоскость — в плоскость. Можно доказать также, что понятие наложения, с помощью которого в нашем курсе вводится равенство фигур (см. приложение 2), совпадает с понятием движения, т. е. любое наложение является движением и, обратно, любое движение является наложением. Это утверждение доказывается аналогично тому, как это делалось в планиметрии.



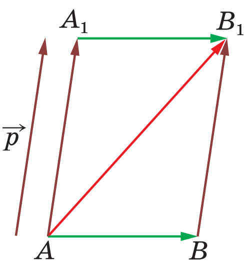




Рис. 195

## 84* Преобразование подобия

**Центральным подобием (гомотетией) с центром $O$ и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение пространства на себя, при котором каждая точка $M$ переходит в такую точку $M_1$, что $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$.**

Нетрудно доказать, что если при центральном подобии с коэффициентом $k$ **точки $A$ и $B$ переходят в точки $A_1$ и $B_1$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$** (см. приложение 1). Из этого, в частности, следует, что при центральном подобии треугольник переходит в подобный ему треугольник, плоскость, проходящая через точку $O$, переходит в себя, не проходящая через точку $O$ — в параллельную ей плоскость, а сфера с центром $C$ радиуса $r$ — в сферу с центром $C_1$ радиуса $kr$, где $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$, т. е. $C_1$ — та точка, в которую переходит точка $C$. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Центральное подобие является частным случаем так называемого преобразования подобия. **Преобразованием подобия** с коэффициентом $k > 0$ называется отображение пространства на себя, при котором любые две точки $A$ и $B$ переходят в такие точки $A_1$ и $B_1$, что $A_1B_1 = k \cdot AB$. Примерами преобразования подобия являются, очевидно, движение (при этом $k = 1$), центральное подобие, а также результат их последовательного выполнения.

Оказывается, верно и обратное утверждение: **любое преобразование подобия представляет собой результат последовательного выполнения движения и центрального подобия.**

Докажем это. Рассмотрим преобразование подобия с коэффициентом $k$. Произвольные точки $A$ и $B$ переходят при нём в такие точки $A_1$ и $B_1$, что $A_1B_1 = k \cdot AB$. Рассмотрим теперь центральное подобие с произвольным центром $O$ и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Точки $A_1$ и $B_1$ переходят при нём в такие точки $A_2$ и $B_2$, что $A_2B_2 = \frac{A_1B_1}{k}$. Тем самым в результате последовательного выполнения преобразования подобия и центрального подобия произвольные точки $A$ и $B$ переходят в такие точки $A_2$ и $B_2$, что $A_2B_2 = \frac{k \cdot AB}{k} = AB$. Это означает, что результатом последовательного выполнения указанных преобразований является движение. В свою очередь, в результате последовательного выполнения этого движения и центрального подобия с центром $O$ и коэффициентом $k$ точки $A$ и $B$ (взятые произвольно) переходят в те же точки $A_1$ и $B_1$, что и при исходном преобразовании подобия. Но это и означает, что исходное преобразование подобия является результатом последовательного выполнения указанного движения и центрального подобия с центром $O$ и коэффициентом $k$. Утверждение доказано.

Преобразование подобия часто используется в геометрии. С его помощью, например, можно ввести понятие подобия произвольных тел: **два тела называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одно из них переходит в другое.**

▼ **Замечание**

Из основной формулы для вычисления объёмов тел (см. п. 56) следует, что **отношение объёмов подобных тел равно кубу коэффициента подобия**. Подумайте, как это доказать. △

## Задачи

**719** Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A\,(0;\ 1;\ 2)$, $B\,(3;\ -1;\ 4)$, $C\,(1;\ 0;\ -2)$ при: а) центральной симметрии относительно начала координат; б) осевой симметрии относительно координатных осей; в) зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.

**720** Докажите, что при центральной симметрии: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

**721** Докажите, что при центральной симметрии: а) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

**722** Докажите, что при осевой симметрии: а) прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси; б) прямая, образующая с осью угол $\varphi$, отображается на прямую, также образующую с осью угол $\varphi$.

**723** При зеркальной симметрии прямая $a$ отображается на прямую $a_1$. Докажите, что прямые $a$ и $a_1$ лежат в одной плоскости.

**724** При зеркальной симметрии относительно плоскости $\alpha$ плоскость $\beta$ отображается на плоскость $\beta_1$. Докажите, что если: а) $\beta \parallel \alpha$, то $\beta_1 \parallel \alpha$; б) $\beta \perp \alpha$, то $\beta_1$ совпадает с $\beta$.

**725** Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$, где $\vec{p} \neq \vec{0}$: а) прямая, не параллельная вектору $\vec{p}$ и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, параллельная вектору $\vec{p}$ или содержащая этот вектор, отображается на себя.

**726** Треугольник $A_1B_1C_1$ получен параллельным переносом треугольника $ABC$ на вектор $\vec{p}$. Точки $M_1$ и $M$ — соответственно точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $ABC$. Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $M$ переходит в точку $M_1$.

**727** Докажите, что при движении: а) прямая отображается на прямую; б) плоскость отображается на плоскость.

**728** Докажите, что при движении: а) отрезок отображается на отрезок; б) угол отображается на равный ему угол.

**729** Докажите, что при движении: а) параллельные прямые отображаются на параллельные прямые; б) параллельные плоскости отображаются на параллельные плоскости.

**730** Докажите, что при движении: а) окружность отображается на окружность того же радиуса; б) прямоугольный параллелепипед отображается на прямоугольный параллелепипед с теми же измерениями.

## Вопросы к главе VII

1 Как расположена точка относительно прямоугольной системы координат, если: а) одна её координата равна нулю; б) две её координаты равны нулю?

2 Объясните, почему все точки, лежащие на прямой, параллельной плоскости $Oxy$, имеют одну и ту же аппликату.

3 Даны точки $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(3;\ x;\ y)$, $C(0;\ 4;\ z)$ и $D(5;\ t;\ u)$. При каких значениях $x$, $y$, $z$, $t$ и $u$ эти точки лежат: а) в плоскости, параллельной плоскости $Oxy$; б) в плоскости, параллельной плоскости $Oxz$; в) на прямой, параллельной оси $Ox$?

4 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CA}$, если $\overrightarrow{AB}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\overrightarrow{BC}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

5 Первая и вторая координаты ненулевого вектора $\vec{a}$ равны нулю. Как расположен вектор $\vec{a}$ по отношению к оси: а) $Oz$; б) $Ox$; в) $Oy$?

6 Первая координата ненулевого вектора $\vec{a}$ равна нулю. Как расположен вектор $\vec{a}$ по отношению: а) к плоскости $Oxz$; б) к оси $Ox$?

7 Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-5;\ 3;\ -1\}$ и $\vec{b}\{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\{-2;\ 3;\ 7\}$ и $\vec{b}\{-1;\ 1,5;\ 3,5\}$?

8 Длина радиус-вектора точки $M$ равна 1. Может ли абсцисса точки $M$ равняться: а) 1; б) 2?

9 Длина вектора $\vec{a}$ равна 3. Может ли одна из координат вектора $\vec{a}$ равняться: а) 3; б) 5?

10 Абсцисса точки $M_1$ равна 3, а абсцисса точки $M_2$ равна 6. а) Может ли длина отрезка $M_1M_2$ быть равной 2? б) Как расположен отрезок $M_1M_2$ по отношению к оси $Ox$, если его длина равна 3?

11 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют длины $a$ и $b$. Чему равно скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены; в) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны; г) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°; д) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°?

12 При каком условии скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: а) положительно; б) отрицательно; в) равно нулю?

13 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перпендикулярны ли векторы: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$; д) $\overrightarrow{BB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

14 Первые координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 1 и 2. Может ли скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ быть: а) меньше 2; б) равно 2; в) больше 2?

15 Какие координаты имеет точка $A$, если при центральной симметрии с центром $A$ точка $B(1;\ 0;\ 2)$ переходит в точку $C(2;\ -1;\ 4)$?

16 Как расположена плоскость по отношению к осям координат $Ox$ и $Oz$, если при зеркальной симметрии относительно этой плоскости точка $M(2;\ 1;\ 3)$ переходит в точку $M_1(2;\ -2;\ 3)$?

17 В правую или левую перчатку переходит правая перчатка при зеркальной симметрии? осевой симметрии? центральной симметрии?

## Дополнительные задачи

**731** Даны векторы $\vec{a}\{-5;\ 0;\ 5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 5;\ 0\}$ и $\vec{c}\{1;\ -2;\ -3\}$. Найдите координаты вектора: а) $3\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{c}$; б) $-0{,}1\vec{c}+0{,}8\vec{a}-0{,}5\vec{b}$.

**732** Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-5;\ 3;\ -1\}$ и $\vec{b}\{6;\ -10;\ -2\}$; б) $\vec{a}\{-2;\ 3;\ 7\}$ и $\vec{b}\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$; в) $\vec{a}\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{5}{9};\ -1\right\}$ и $\vec{b}\{6;\ -5;\ 9\}$; г) $\vec{a}\{0{,}7;\ -1{,}2;\ -5{,}2\}$ и $\vec{b}\{-2{,}8;\ 4{,}8;\ -20{,}8\}$?

**733** Даны точки $A(-5;\ 7;\ 3)$ и $B(3;\ -11;\ 1)$. а) На оси $Ox$ найдите точку, ближайшую к середине отрезка $AB$. б) Найдите точки, обладающие аналогичным свойством, на осях $Oy$ и $Oz$.

**734** Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{k}$; б) $\vec{b}\{2;\ 1;\ 1{,}5\}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}\{1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{c}\{2;\ 3;\ -1\}$?

**735** Даны точки $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(4;\ 6;\ 5)$, $C(6;\ -2;\ 1)$ и $D(5;\ -3;\ 0)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

**736** Даны точки $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ 2)$ и $C(2;\ 3;\ 6)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника $ABC$.

**737** Даны координаты четырёх вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(3;\ 0;\ 2)$, $B(2;\ 4;\ 5)$, $A_1(5;\ 3;\ 1)$, $D(7;\ 1;\ 2)$. Найдите координаты остальных вершин.

**738** Середина отрезка $AB$ лежит в плоскости $Oxy$. Найдите $k$, если: а) $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(5;\ 7;\ k)$; б) $A(0;\ 4;\ k)$, $B(3;\ -8;\ 2)$; в) $A(5;\ 3;\ k)$, $B(3;\ -5;\ 3k)$.

**739** Найдите координаты единичных векторов, сонаправленных соответственно с векторами $\vec{a}\{2;\ 1;\ -2\}$ и $\vec{b}\{1;\ 3;\ 0\}$.

**740** Длина вектора $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ равна 5. Найдите ординату вектора $\vec{a}$, если $x=2$, $z=-\sqrt{5}$.

**741** Даны точки $M(2;\ -1;\ 3)$, $N(-4;\ 1;\ -1)$, $P(-3;\ 1;\ 2)$ и $Q(1;\ 1;\ 0)$. Вычислите расстояние между серединами отрезков $MN$ и $PQ$.

**742** Найдите расстояние от точки $B(-2;\ 5;\ \sqrt{3})$ до осей координат.

**743** На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек $A(13;\ 2;\ -1)$ и $B(-15;\ 7;\ -18)$.

**744** Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0;\ 2;\ 2)$, $B(2;\ 1;\ 1)$, $C(2;\ 2;\ 2)$.

**745** Найдите координаты точек пересечения сферы, заданной уравнением $(x-3)^2+y^2+(z+5)^2=25$, с осями координат.

**746** Найдите радиус сечения сферы $x^2+y^2+z^2=36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2;\ 4;\ 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс.

**747** Вершины треугольника $ABC$ расположены по одну сторону от плоскости $\alpha$ и находятся от этой плоскости на расстояниях 4 дм, 5 дм и 9 дм. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до плоскости $\alpha$.

**748** **Медианой тетраэдра** называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины.

**749** Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 5;\ 3\}$, $\vec{b}\{3;\ 0;\ 2\}$, $\vec{c}\{0{,}5;\ -3;\ 4\}$ и $\vec{d}\{2;\ 1;\ 0\}$. Вычислите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{c}$; в) $\vec{d}\vec{d}$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{d}$; д) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})$.

**750** В тетраэдре $DABC$ $DA = DB = DC$, $\angle ADB = 45°$, $\angle BDC = 60°$. Вычислите угол между векторами: а) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA}$.

**751** Все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны друг другу, $D_1$ — проекция точки $D$ на плоскость $ABC$. Перпендикулярны ли векторы: а) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{D_1D}$; б) $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{DC}$?

**752** Вычислите косинус угла между прямыми $AB$ и $CD$, если: а) $A(7;\ -8;\ 15)$, $B(8;\ -7;\ 13)$, $C(2;\ -3;\ 5)$, $D(-1;\ 0;\ 4)$; б) $A(8;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ -1;\ 4)$, $C(5;\ -2;\ 0)$, $D(7;\ 0;\ -2)$.

**753** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $M$ — центр грани $BB_1C_1C$. Вычислите угол между векторами: а) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

**754** В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 60°$, $AB = AA_1 = AD = 1$. Вычислите длины векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

**755** Проекция точки $M$ на плоскость ромба $ABCD$ совпадает с точкой $O$ пересечения его диагоналей. Точка $N$ — середина стороны $BC$, $AC = 8$, $DB = MO = 6$. Вычислите косинус угла между прямой $MN$ и прямой: а) $BC$; б) $DC$; в) $AC$; г) $DB$.

**756** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $M$ лежит на ребре $BB_1$, причём $BM : MB_1 = 3 : 2$, а точка $N$ лежит на ребре $AD$, причём $AN : ND = 2 : 3$. Вычислите синус угла между прямой $MN$ и плоскостью грани: а) $DD_1C_1C$; б) $A_1B_1C_1D_1$.

**757** Лучи $OA$, $OB$, $OC$ и $OM$ расположены так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$, $\angle AOM = \varphi_1$, $\angle BOM = \varphi_2$, $\angle COM = \varphi_3$. Докажите, что $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.

**758** Лучи $OA$, $OB$ и $OC$ расположены так, что $\angle BOC = \angle BOA = 45°$, $\angle AOC = 60°$. Прямая $OH$ перпендикулярна к плоскости $AOB$. Найдите угол между прямыми $OH$ и $OC$.

**759** Дан двугранный угол $CABD$, равный $\varphi$ ($\varphi < 90°$). Известно, что $AC \perp AB$ и $\angle DAB = \theta$. Найдите $\cos\angle CAD$.

**760** Отрезки $CA$ и $DB$ перпендикулярны к ребру двугранного угла $CABD$, равного $120°$ . Известно, что $AB = m$, $CA = n$, $BD = p$. Найдите $CD$.

**761** При движении прямая $a$ отображается на прямую $a_1$, а плоскость $\alpha$ — на плоскость $\alpha_1$. Докажите, что: а) если $a \parallel \alpha$, то $a_1 \parallel \alpha_1$; б) если $a \perp \alpha$, то $a_1 \perp \alpha_1$.

**762** При зеркальной симметрии относительно плоскости $\alpha$ плоскость $\beta$ отображается на плоскость $\beta_1$. Докажите, что если плоскость $\beta$ образует с плоскостью $\alpha$ угол $\varphi$, то и плоскость $\beta_1$ образует с плоскостью $\alpha$ угол $\varphi$.

**763** Докажите, что при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$: а) плоскость, не параллельная вектору $\vec{p}$ и не содержащая этот вектор, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, параллельная вектору $\vec{p}$ или содержащая этот вектор, отображается на себя.

### Задачи для повторения

**764** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6 см, а боковое ребро равно 3 см.
а) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $ABC_1$.
б) Докажите, что прямая $A_1B_1$ параллельна плоскости $AC_1B$.
в) Найдите угол, который составляет прямая $B_1C$ с плоскостью $ABC$.
г) Найдите угол между плоскостями $AB_1C$ и $ABC$.
д) Найдите длину вектора $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{C_1C}$.
е) Найдите объём призмы.

**765** В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ сторона $AB$ основания равна $6\sqrt{2}$ см, а боковое ребро $MA$ равно 12 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объём пирамиды;
в) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
г) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
д) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\,\overrightarrow{AM}$;
е) площадь сферы, описанной около пирамиды.

**766** В правильной треугольной пирамиде $DABC$ высота $DO$ равна 3 см, а боковое ребро $DA$ равно 5 см. Найдите:
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) объём пирамиды;
в) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
г) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
д) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})\,\overrightarrow{MA}$, где $M$ — середина ребра $BC$;
е) радиус шара, вписанного в пирамиду.

**767** В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро $MA$, равное 8 см, наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объём пирамиды;
в) угол между противоположными боковыми гранями;
г) угол между боковой гранью и плоскостью основания;
д) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})\,\overrightarrow{MK}$, где $K$ — середина ребра $AB$;
е) радиус описанного около пирамиды шара.

## Задачи повышенной трудности

**768** В основании пирамиды $MABC$ лежит треугольник $ABC$, в котором $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. Грань $MAC$ перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани составляют равные углы с плоскостью основания. Расстояние от основания высоты $MH$ пирамиды до грани $MBC$ равно $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**769** Докажите, что если одна из высот тетраэдра проходит через точку пересечения высот противоположной грани, то и остальные высоты этого тетраэдра проходят через точки пересечения высот противоположных граней.

**770** Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине $O$ равны 90°. Докажите, что площадь треугольника $AOB$ равна среднему геометрическому площадей треугольников $ABC$ и $O_1AB$, где $O_1$ — проекция точки $O$ на плоскость $ABC$.

**771** Через ребро тетраэдра проведена плоскость, разделяющая двугранный угол при этом ребре пополам. Докажите, что она делит противоположное ребро тетраэдра в отношении, равном отношению площадей граней, заключающих этот двугранный угол.

**772** Сколько существует плоскостей, каждая из которых равноудалена от четырёх данных точек, не лежащих в одной плоскости?

**773** Докажите, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения равноудалены от ребра.

**774** Докажите, что сечением куба может быть правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник, но не может быть правильный пятиугольник и правильный многоугольник с числом сторон более шести.

**775** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой, проходящей через его центр, не зависит от положения этой прямой.

**776** Разбейте куб на шесть равных тетраэдров.

**777** Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от паука вершин куба. Как должен двигаться паук?

**778** Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же и даже больших размеров.

**779** Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна $S$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и параллельной плоскости боковой грани.

**780** Какую наибольшую длину может иметь ребро правильного тетраэдра, который помещается в коробку, имеющую форму куба с ребром 1 см?

**781** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что пересечение тетраэдров $AB_1CD_1$ и $C_1BA_1D$ есть правильный октаэдр.

**782** Докажите, что из конечного числа попарно различных кубов нельзя составить прямоугольный параллелепипед.

**783** Внутри куба с ребром 1 см расположена ломаная, причём любая плоскость, параллельная любой грани куба, пересекает её не более чем в одной точке. Докажите, что длина ломаной меньше 3 см. Докажите, что можно построить ломаную, обладающую указанным свойством, длина которой сколь угодно мало отличается от 3 см.

**784** Отрезки $AB$ и $CD$ перемещаются по скрещивающимся прямым. Докажите, что объём тетраэдра $ABCD$ при этом не изменяется.

**785** Докажите, что центры граней правильного додекаэдра являются вершинами правильного икосаэдра.

**786** Докажите, что центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра.

**787** В правильном треугольнике $ABC$ сторона равна $a$. Отрезок $AS$ длины $a$ перпендикулярен к плоскости $ABC$. Найдите расстояние и угол между прямыми $AB$ и $SC$.

**788** В правильном треугольнике $ABC$ сторона равна $a$. На сонаправленных лучах $BD$ и $CE$, перпендикулярных к плоскости $ABC$, взяты точки $D$ и $E$ так, что $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CE = a\sqrt{2}$. Докажите, что треугольник $ADE$ прямоугольный, и найдите угол между плоскостями $ABC$ и $ADE$.

**789** Используя векторы, докажите, что сумма квадратов четырёх диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его рёбер.

**790** Основание $ABC$ тетраэдра $OABC$ прозрачное, а все остальные грани зеркальные. Все плоские углы при вершине $O$ прямые. Докажите, что луч света, вошедший в тетраэдр через основание $ABC$ под произвольным углом к нему, отразившись от граней, выйдет в противоположном направлении по отношению к входящему лучу. (На этом свойстве основано устройство уголкового отражателя, который, в частности, был запущен на Луну для измерения расстояния до неё с помощью лазера.)

**791** Из точки $A$ исходят четыре луча $AB$, $AC$, $AD$ и $AE$ так, что $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = \angle DAC = 45°$, а луч $AE$ перпендикулярен к плоскости $ABD$. Найдите угол $CAE$.

**792** Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда его противоположные рёбра перпендикулярны.

**793** Три боковых ребра тетраэдра равны друг другу. Докажите, что прямая, образующая равные углы с этими рёбрами и пересекающая плоскость основания, перпендикулярна к этой плоскости.

**794** Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине $O$ прямые. Докажите, что проекция вершины $O$ на плоскость $ABC$ есть точка пересечения высот треугольника $ABC$.

**795** Из точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды. Докажите, что сумма их квадратов не зависит от положения этих хорд.

**796** Найдите множество центров всех сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую, не пересекающую шар.

**797** Найдите множество всех таких точек, из которых можно провести к данной сфере три попарно перпендикулярные касательные прямые.

**798** В тетраэдр с высотами $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$ вписан шар радиуса $R$. Докажите, что $\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$.

**799** Какому условию должны удовлетворять радиусы трёх шаров, попарно касающихся друг друга, чтобы к ним можно было провести общую касательную плоскость?

**800** На плоскости лежат четыре шара радиуса $R$, причём три из них попарно касаются друг друга, а четвёртый касается двух из них. На эти шары положены сверху два шара меньшего радиуса $r$, касающиеся друг друга, причём каждый из них касается трёх больших шаров. Найдите радиус маленьких шаров.

**801** На плоскости лежат три шара радиуса $R$, попарно касающиеся друг друга. Основание конуса лежит в указанной плоскости, а данные шары касаются его извне. Высота конуса равна $\lambda R$. Найдите радиус его основания.

**802** Плоскости $AB_1C_1$ и $A_1BC$ разбивают треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите отношение объёмов этих частей.

**803** Докажите, что объём тетраэдра равен $\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где $a$ и $b$ — противоположные рёбра, а $\varphi$ и $c$ — соответственно угол и расстояние между ними.

**804** Докажите, что плоскость, проходящая через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра, разделяет его на две части, объёмы которых равны.

**805** Основанием пирамиды $OABCD$ является параллелограмм $ABCD$. В каком отношении делит объём пирамиды плоскость, проходящая через прямую $AB$ и среднюю линию грани $OCD$?

**806** Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них взят отрезок $AB$, а на двух других — точки $C$ и $D$ соответственно. Докажите, что объём тетраэдра $ABCD$ не зависит от выбора точек $C$ и $D$.

**807** Точки $E$ и $F$ — середины рёбер $DC$ и $BB_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 см. Найдите объём тетраэдра $AD_1EF$.

**808** В двух параллельных плоскостях взяты два многоугольника. Их вершины соединены отрезками так, что у полученного многогранника все боковые грани — трапеции, треугольники и параллелограммы. Докажите, что

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3),$$

где $V$ — объём многогранника, $h$ — его высота, $S_1$ и $S_2$ — площади оснований, а $S_3$ — площадь сечения плоскостью, параллельной плоскостям оснований и равноудалённой от них.

**809** Два равных цилиндра, высоты которых больше их диаметров, расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом и точка пересечения осей равноудалена от оснований цилиндров. Найдите объём общей части этих цилиндров, если радиус каждого из них равен 1 см.

**810** Вокруг данного шара описан конус с углом $\alpha$ при вершине осевого сечения. При каком значении $\alpha$ конус имеет наименьший объём?

**811** В конус вписан шар. Докажите, что отношение объёмов конуса и шара равно отношению площадей полной поверхности конуса и сферы, являющейся границей шара.

**812** Правильная четырёхугольная пирамида, у которой сторона основания равна $a$, а плоский угол при вершине равен $\alpha$, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину параллельно стороне основания. Найдите объём полученного тела вращения.

**813** Шар образован вращением полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр. При этом поверхность, образованная вращением некоторой хорды, один конец которой совпадает с концом данного диаметра, разбивает шар на две равные по объёму части. Найдите косинус угла между этой хордой и диаметром.

**814** Все высоты тетраэдра пересекаются в точке $H$. Докажите, что точка $H$, центр $O$ описанной сферы и точка $G$ пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками пересечения медиан противоположных граней тетраэдра, лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причём точки $O$ и $H$ симметричны относительно точки $G$.

**815** Дан тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке. Докажите, что точки пересечения медиан всех граней, основания высот тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, в отношении $2:1$, считая от вершины, лежат на одной сфере, центр которой расположен на прямой Эйлера (сфера Эйлера).

# Глава VIII*
# Некоторые сведения из планиметрии

## § 1 Углы и отрезки, связанные с окружностью

### 85 Угол между касательной и хордой

Мы знаем, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Докажем теорему об угле между касательной и хордой.

**Теорема**

**Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключённой в нём дуги.**

**Доказательство**

Пусть $AB$ — данная хорда, $CC_1$ — касательная, проходящая через точку $A$. Если $AB$ — диаметр (рис. 196, *а*), то заключённая внутри угла $BAC$ (и также угла $BAC_1$) дуга является полуокружностью. С другой стороны, углы $BAC$ и $BAC_1$ в этом случае — прямые, поэтому утверждение теоремы верно.

Пусть теперь хорда $AB$ не является диаметром. Ради определённости будем считать, что точки $C$ и $C_1$ на касательной выбраны так, что угол $CAB$ — острый, и обозначим буквой $\alpha$ величину заключённой в нём дуги (рис. 196, *б*). Проведём диаметр $AD$ и заметим, что треугольник $ABD$ — прямоугольный, поэтому $\angle ADB = 90° - \angle DAB = \angle BAC$. Поскольку угол $ADB$ — вписанный, то $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$, а значит, и $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$. Итак, угол $BAC$ между касательной $AC$ и хордой $AB$ измеряется половиной заключённой в нём дуги.

Аналогичное утверждение верно в отношении угла $BAC_1$. Действительно, углы $BAC$ и $BAC_1$ — смежные, поэтому

$$\angle BAC_1 = 180° - \frac{\alpha}{2} = \frac{360° - \alpha}{2}.$$

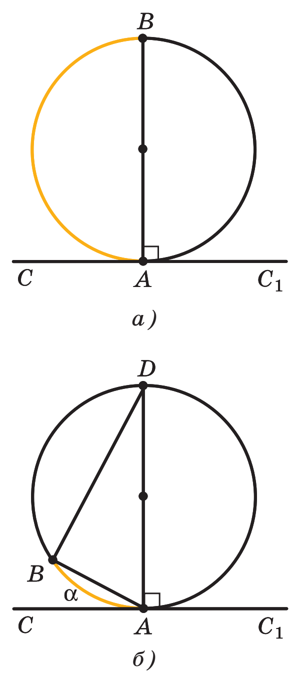



Рис. 196

С другой стороны, $(360° - \alpha)$ — это величина дуги $ADB$, заключённой внутри угла $BAC_1$. Теорема доказана.

## 86 Две теоремы об отрезках, связанных с окружностью

Из теоремы о вписанном угле следует, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Воспользуемся этим наблюдением для доказательства **теоремы об отрезках пересекающихся хорд.**

**Теорема 1**

**Произведение отрезков одной из двух пересекающихся хорд равно произведению отрезков другой хорды.**

**Доказательство**

Пусть хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $E$ (рис. 197). Докажем, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Треугольники $ADE$ и $CBE$ подобны по первому признаку подобия треугольников: $\angle 1 = \angle 2$, так как эти вписанные углы опираются на одну и ту же дугу $BD$, углы 3 и 4 равны как вертикальные.

Следовательно, $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Теорема доказана.

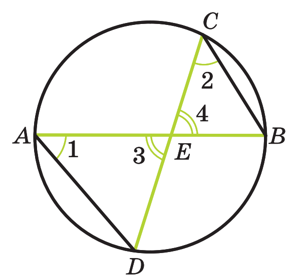


Рис. 197

Важным следствием из теоремы об угле между касательной и хордой является **теорема о квадрате касательной.**

**Теорема 2**

**Если через точку $M$ проведены секущая, пересекающая окружность в точках $A$ и $B$, и касательная $MK$ ($K$ — точка касания), то $MA \cdot MB = MK^2$.**

Кратко эту теорему формулируют так: **произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.**

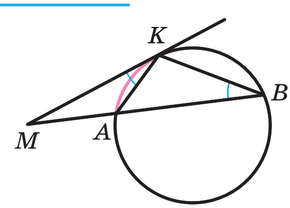


Рис. 198

**Доказательство**

Проведём отрезки $AK$ и $BK$ (рис. 198). Треугольники $AKM$ и $KBM$ подобны: угол $M$ у них — общий, а углы $AKM$ и $B$ равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги $AK$. Следовательно, $\dfrac{MK}{MA}=\dfrac{MB}{MK}$, или $MA\cdot MB=MK^2$. Теорема доказана.

**Замечание**

Из доказанной теоремы следует, что если точка $M$ лежит вне окружности и через неё проведена секущая, пересекающая окружность в точках $A$ и $B$, то произведение $MA\cdot MB$ не зависит от положения секущей — это произведение равно квадрату касательной, проведённой из точки $M$. С другой стороны, квадрат касательной $MK$ равен $OM^2-R^2$, где $O$ — центр окружности, $R$ — её радиус (рис. 199, *а*). Итак,

$$MA\cdot MB=OM^2-R^2. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь точку $M$, лежащую внутри окружности. Проведём через неё какую-нибудь хорду $AB$ (рис. 199, *б*). Из теоремы 1 следует, что произведение $MA\cdot MB$ не зависит от положения хорды — оно равно произведению отрезков диаметра, проходящего через точку $M$, т. е. равно $(R+OM)\cdot(R-OM)=R^2-OM^2$. Итак, в этом случае

$$MA\cdot MB=R^2-OM^2. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) похожи друг на друга. Если воспользоваться скалярным произведением векторов, то их можно объединить в одну формулу:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2.$$

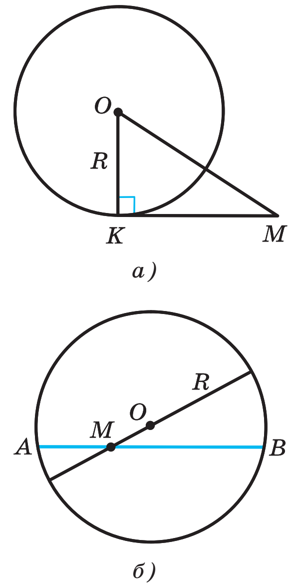



Рис. 199

## 87 Углы с вершинами внутри и вне круга

Теоремы о вписанном угле и об угле между касательной и хордой позволяют выразить углы с вершинами внутри и вне круга через заключённые внутри них дуги. Рассмотрим примеры таких углов.

**Угол между двумя пересекающимися хордами измеряется полусуммой заключённых между ними дуг.**

В самом деле, рассмотрим хорды $AC$ и $BD$, пересекающиеся в точке $M$, и проведём хорду $BC$ (рис. 200). Так как $\angle AMB$ — внешний угол

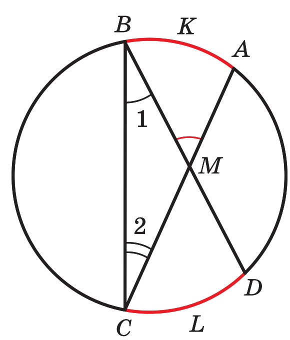



Рис. 200

треугольника $BMC$, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile AKB$, поэтому

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB),$$

что и требовалось доказать.

**Угол между двумя секущими, проведёнными из одной точки, измеряется полуразностью заключённых внутри него дуг.**

Обратимся к рисунку 201. Угол 1 — внешний угол треугольника $AMQ$, поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle AMB$. Поскольку углы 1 и 2 — вписанные, то $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile AB$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile PQ$. Следовательно,

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile AB - \smile PQ),$$

что и требовалось доказать.

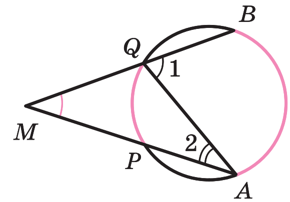



Рис. 201

**Угол между касательной и секущей, проведёнными из одной точки, измеряется полуразностью заключённых внутри него дуг.**

Обратимся к рисунку 202, *а*. Угол 1 является внешним углом треугольника $AMK$, поэтому $\angle 1 = \angle 2 + \angle AMK$. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile AK$, а по теореме о вписанном угле $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile BK$. Следовательно,

$$\angle AMK = \frac{1}{2}(\smile AK - \smile BK),$$

что и требовалось доказать.

**Угол между двумя касательными, проведёнными из одной точки, равен 180° минус величина заключённой внутри него дуги, меньшей полуокружности.**

В самом деле, поскольку отрезки касательных, проведённые из одной точки, равны, то треугольник $KML$ на рисунке 202, *б* равнобедренный. По теореме об угле между касательной и хордой сумма углов $K$ и $L$ при его основании равна $\smile KL$. Следовательно,

$$\angle KML = 180° - \smile KL,$$

что и требовалось доказать.

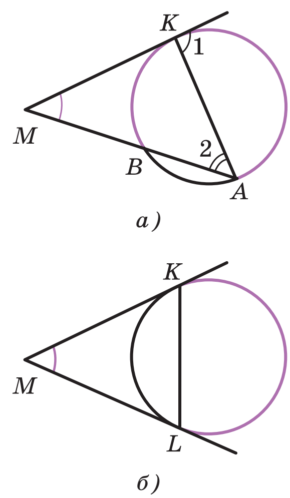



Рис. 202

## 88 Вписанный четырёхугольник

Напомним, что многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется вписанным в окружность, а окружность — описанной около этого многоугольника.

В отличие от треугольника около четырёхугольника не всегда можно описать окружность. Если же около четырёхугольника можно описать окружность, то такой четырёхугольник является выпуклым (докажите это), а его углы обладают следующим замечательным свойством: **в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.**

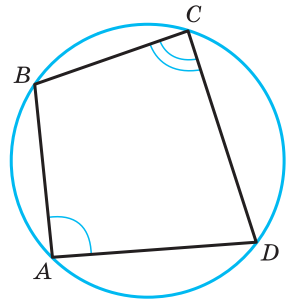



Рис. 203

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 203 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A = \frac{1}{2}\smile BCD,\ \angle C = \frac{1}{2}\smile BAD,$$

поэтому

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°.$$

Оказывается, верно и обратное утверждение **(признак вписанного четырёхугольника): если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.**

Действительно, рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle C = 180°$, и докажем, что вершина $C$ лежит на окружности, проходящей через точки $A$, $B$ и $D$ (см. рис. 203).

Предположим, что это не так. Тогда прямые $CB$ и $CD$ либо являются касательными к указанной окружности (рис. 204, *а*), либо хотя бы одна из них, например прямая $CB$, является секущей по отношению к этой окружности (рис. 204, *б*, *в*).

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

Если прямые $CB$ и $CD$ — касательные, то $\angle C = 180° - \smile BD$ (см. п. 87), поэтому

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\smile BD + 180° - \smile BD =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}\smile BD < 180°,$$

а это противоречит условию.

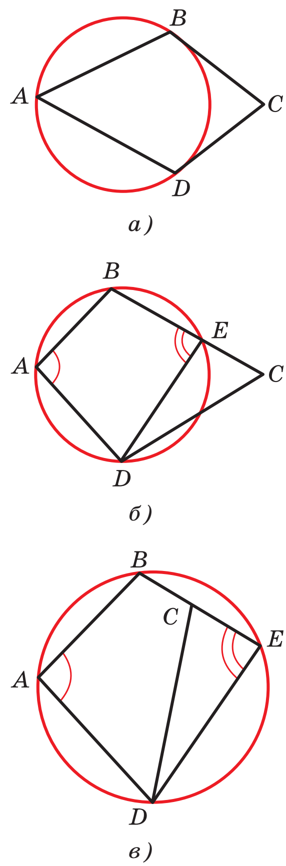



Рис. 204

Если же прямая $CB$ — секущая, то она пересекает окружность ещё в одной точке $E$ (см. рис. 204, *б*, *в*). Поскольку четырёхугольник $ABED$ — вписанный, то $\angle A + \angle E = 180°$. Но $\angle E \neq \angle C$, так как один из этих углов является углом треугольника $DCE$, а другой — внешним углом этого треугольника. Следовательно, в этом случае $\angle A + \angle C \neq 180°$, и мы снова приходим к противоречию с условием.

Таким образом, вершина $C$ лежит на окружности, проходящей через точки $A$, $B$ и $D$, что и требовалось доказать.

**Замечание**

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что если углы $A$ и $C$ четырёхугольника $ABCD$ прямые, то около него можно описать окружность, причём диагональ $AC$ является диаметром этой окружности (объясните почему). Иными словами, точки $B$ и $D$ лежат на окружности с диаметром $AC$. Справедливо и более общее утверждение: **множество точек плоскости, состоящее из двух данных точек $A$ и $B$ и всех таких точек $M$, для которых угол $AMB$ — прямой, представляет собой окружность с диаметром $AB$.**

В самом деле, поскольку для любой точки $M$ окружности с диаметром $AB$, отличной от $A$ и $B$, вписанный угол $AMB$ — прямой (рис. 205), то любая точка этой окружности принадлежит указанному множеству. Осталось доказать, что если точка $M$ принадлежит рассматриваемому множеству, то она лежит на окружности с диаметром $AB$. Докажем это.

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника $AMB$ (см. рис. 205). Угол $AMB$, вписанный по отношению к этой окружности, — прямой, поэтому отрезок $AB$ — её диаметр. Таким образом, точка $M$ лежит на окружности с диаметром $AB$, что и требовалось доказать.

Отметим, что множество всех точек, обладающих каким-либо геометрическим свойством, иногда называют **геометрическим местом точек**. Можно сказать, в частности, что геометрическим местом точек $M$, для которых угол $AMB$ прямой ($A$ и $B$ — данные точки), является окружность с диаметром $AB$, из которой удалены точки $A$ и $B$.

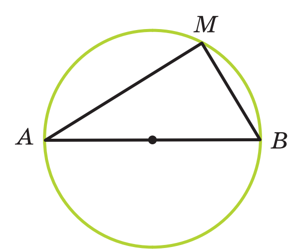


Рис. 205

## 89 Описанный четырёхугольник

Напомним, что многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется описанным около окружности, а окружность — вписанной в этот многоугольник.

В отличие от треугольника не в любой четырёхугольник можно вписать окружность. Если же в четырёхугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством: **в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны**.

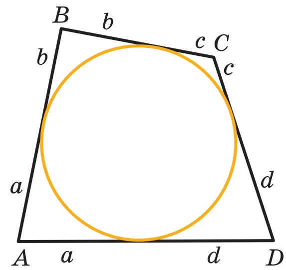


Рис. 206

В самом деле, обратимся к рисунку 206, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. Мы видим, что

$$AB + CD = a + b + c + d, \quad BC + AD = a + b + c + d,$$

поэтому $AB + CD = BC + AD$.

Справедливо и обратное утверждение **(признак описанного четырёхугольника): если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

Действительно, рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB + CD =$ $= BC + AD$. Точка $O$ пересечения биссектрис углов $A$ и $B$ равноудалена от сторон $AB$, $AD$ и $BC$, поэтому можно провести окружность с центром $O$, касающуюся указанных трёх сторон (рис. 207, *а*). Докажем, что эта окружность касается также стороны $CD$ и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая $CD$ либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 207, *б*). Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне $CD$ ($C'$ и $D'$ — точки пересечения касательной со сторонами $BC$ и $AD$). Так как $ABC'D'$ — описанный четырёхугольник, то $AB + C'D' = BC' + AD'$, или

$$AB + C'D' = BC - C'C + AD - D'D.$$

Заменяя в правой части этого равенства сумму $BC + AD$ на сумму $AB + CD$, приходим к равенству $C'D' + C'C + D'D = CD$, т. е. в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение (о том, что прямая $CD$ и окружность не имеют общих точек) неверно.

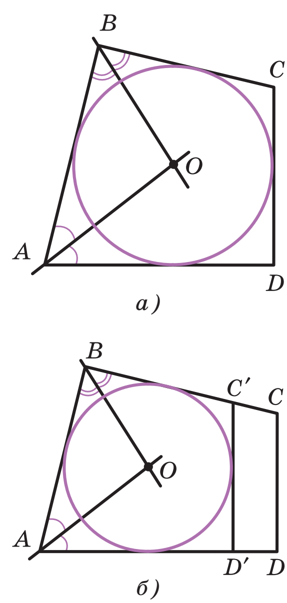


Рис. 207

Аналогично доказывается, что прямая $CD$ не может быть секущей по отношению к окружности. Следовательно, окружность касается стороны $CD$, что и требовалось доказать.

### Задачи

**816** Через точку $D$, лежащую на радиусе $OA$ окружности с центром $O$, проведена хорда $BC$, перпендикулярная к $OA$, а через точку $B$ проведена касательная к окружности, пересекающая прямую $OA$ в точке $E$. Докажите, что луч $BA$ — биссектриса угла $CBE$.

**817** Две окружности имеют единственную общую точку $M$. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках $A$ и $A_1$, а другую — в точках $B$ и $B_1$. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

**818** Прямая $AC$ — касательная к окружности с центром $O_1$, а прямая $BD$ — касательная к окружности с центром $O_2$ (рис. 208). Докажите, что: а) $AD \parallel BC$; б) $AB^2 = AD \cdot BC$; в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

**819** Точка $M$ лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle AMD = \angle ABM + \angle MCD$ тогда и только тогда, когда окружности, описанные около треугольников $ABM$ и $MCD$, имеют в точке $M$ общую касательную.

**820** Окружность касается сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ и пересекает сторону $BC$ в точках $P$ и $Q$, $BP = CQ$. Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

**821** Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

**822** Через точку $K$, лежащую на окружности с центром $O$, проведены хорда $KA$ и касательная $KB$, а через точку $O$ проведена прямая, перпендикулярная к прямой $OA$ и пересекающая хорду $KA$ в точке $M$, а касательную $KB$ — в точке $N$. Докажите, что $NK = NM$.

**823** Точки $B_1$ и $C_1$ — середины дуг $AB$ и $AC$ (рис. 209). Докажите, что $AM = AN$.

**824** Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной окружности, луч $BD$ содержит биссектрису $BM$ треугольника $ABC$. Докажите, что $\angle AMD = \angle BAD$.

**825** Хорды $AB$ и $CD$ взаимно перпендикулярны, луч $AB$ является биссектрисой угла $DAE$. Докажите, что $AE \perp BC$. Рассмотрите все возможные случаи.

**826** Отрезки $AA_1$ и $BB_1$ — высоты треугольника $ABC$. Докажите, что точки $A$, $B$, $A_1$ и $B_1$ лежат на одной окружности.

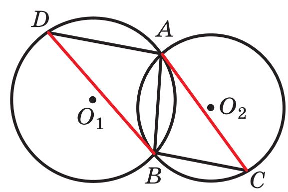



Рис. 208

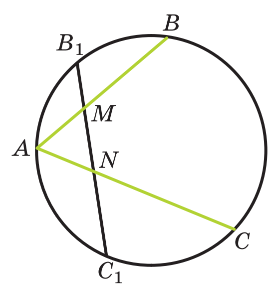



Рис. 209

**827** Докажите, что если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

**828** В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в точке, лежащей на стороне $CD$. Докажите, что $CD = BC + AD$.

**829** Докажите, что в любом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

**830** На окружности даны четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$ в указанном порядке. Точка $M$ — середина дуги $AB$, $K$ — точка пересечения хорд $AB$ и $MD$, $E$ — точка пересечения хорд $AB$ и $MC$. Докажите, что около четырёхугольника $CDKE$ можно описать окружность.

**831** Противоположные стороны выпуклого четырёхугольника продолжены до пересечения. Докажите, что около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы образовавшихся углов взаимно перпендикулярны.

**832** Докажите, что в выпуклый многоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда окружности, вписанные в два треугольника, на которые он разделяется диагональю, касаются этой диагонали в одной точке.

**833** Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.

**834** В трапецию $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ ($AB > CD$) вписана окружность. Найдите площадь трапеции, если $CD = a$, $DK = b$ и $AK = d$, где $K$ — точка касания окружности и стороны $AD$.

**835** На каждой из сторон выпуклого четырёхугольника отмечены две точки. Эти точки соединены отрезками так, как показано на рисунке 210. Известно, что в каждый из закрашенных четырёхугольников можно вписать окружность. Докажите, что и в исходный четырёхугольник можно вписать окружность.

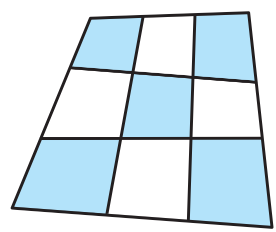


Рис. 210

# § 2 Решение треугольников

## 90 Теорема о медиане

Напомним, что решением треугольника называется нахождение его элементов по трём данным элементам, определяющим треугольник. Для решения треугольников используются, как правило, теоремы синусов и косинусов. Приведём пример теоремы, доказательство которой основано на решении треугольников.

**Теорема**

**Квадрат медианы $AM$ треугольника $ABC$ выражается формулой $AM^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$.**

**Доказательство**

Зная стороны треугольника $ABC$, можно найти, например, косинус угла $B$. Для этого нужно воспользоваться теоремой косинусов (рис. 211): $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$, откуда

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}.$$

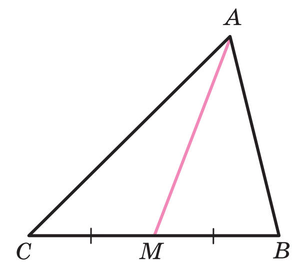


Рис. 211

Рассмотрим теперь треугольник $ABM$. Учитывая, что $BM = \frac{BC}{2}$, по теореме косинусов находим:

$$AM^2 = AB^2 + \frac{BC^2}{4} - 2AB \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} =$$
$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

Теорема доказана.

**Следствие**

**Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.**

В самом деле, рассмотрим параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$ (рис. 212). Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то отрезок $AO$, равный половине $AC$, является медианой треугольника $ABD$. Следовательно,

$$AC^2 = 4AO^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2,$$

откуда

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2,$$

что и требовалось доказать.

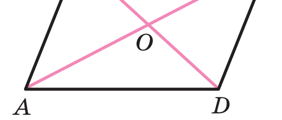


Рис. 212

## 91 Теорема о биссектрисе треугольника

**Теорема**

**Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.**

**Доказательство**

Пусть $AD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Докажем, что $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$ (рис. 213).

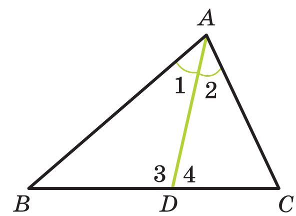



Рис. 213

Рассмотрим сначала треугольник $ABD$. По теореме синусов $\frac{DB}{\sin\angle 1} = \frac{AB}{\sin\angle 3}$, откуда

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}.$$

Аналогично, рассматривая треугольник $ACD$, получаем:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 4}.$$

Но $\angle 2 = \angle 1$ по условию, $\angle 4 = 180° - \angle 3$, поэтому $\sin\angle 2 = \sin\angle 1$ и $\sin\angle 4 = \sin\angle 3$. Следовательно, $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Теорема доказана.

**Следствие**

**В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и биссектрисой $AD$ имеют место равенства:**

$$DB = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}. \qquad (1)$$

В самом деле, из доказанной теоремы следует, что $DB \cdot b = DC \cdot c$. Кроме того, $DB + DC = a$. Выражая из этих двух равенств $DB$ и $DC$, приходим к формулам (1).

Воспользуемся этим следствием для решения следующей задачи.

**Задача**

Выразить биссектрису $AD$ треугольника $ABC$ через стороны $AB = c$, $AC = b$ и угол $A$.

**Решение**

Пусть $BC = a$. Применяя теорему косинусов к треугольнику $ABD$ и используя первую формулу из (1), получаем (см. рис. 213):

$$\frac{a^2c^2}{(b+c)^2} = AD^2 + c^2 - 2c\,AD\cos\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Аналогично из треугольника $ACD$ находим:

$$\frac{a^2b^2}{(b+c)^2} = AD^2 + b^2 - 2b\,AD\cos\frac{A}{2}. \qquad (3)$$

Умножая равенства (2) и (3) соответственно на $b^2$ и $-c^2$, а затем складывая их, приходим к равенству

$$0 = AD^2(b+c)(b-c) - 2bc(b-c)\,AD\cos\frac{A}{2}.$$

Таким образом, при $b \neq c$ получаем:

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}. \qquad (4)$$

Формула (4) верна и при $b = c$ (проверьте это самостоятельно).

**Замечания**

1. Пусть $K$ — точка пересечения прямой, проходящей через точку $D$ перпендикулярно к $AD$, с большей из сторон $AB$ и $AC$ (со стороной $AC$ на рисунке 214). Из формулы (4) следует, что длина отрезка $AK$ зависит только от длин этих сторон и не зависит от величины угла $A$: $AK = \dfrac{AD}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{2bc}{b+c}$. Этот факт можно усмотреть и непосредственно. В самом деле, пусть $AE = AB$. Тогда отрезок $DK$ — биссектриса треугольника $DCE$ (докажите это самостоятельно). Следовательно,

$$\frac{AK - c}{b - AK} = \frac{EK}{KC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b},$$

откуда $AK = \dfrac{2bc}{b+c}$.

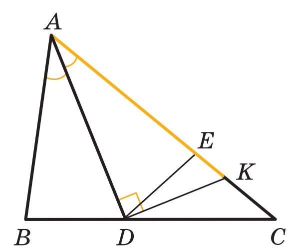


Рис. 214

2. Если величину $\cos\dfrac{A}{2}$ выразить из формулы (4) и подставить в формулу (2), то полу-

чится формула, связывающая биссектрису $AD$ со сторонами треугольника:

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

С учётом формулы (1) она принимает совсем простой вид:

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC.$$

## 92 Формулы площади треугольника

**Теорема 1**

**Площадь $S$ треугольника выражается формулой**

$$\boldsymbol{S = pr}, \qquad (5)$$

**где $p$ — полупериметр треугольника, $r$ — радиус вписанной в него окружности.**

**Доказательство**

Соединим вершины треугольника с центром вписанной в него окружности (рис. 215). Тогда треугольник окажется разделённым на три треугольника, площадь каждого из которых равна половине произведения соответствующей стороны на радиус $r$ вписанной окружности. Складывая эти площади и вынося общий множитель $\frac{r}{2}$ за скобки, приходим к формуле (5). Теорема доказана.

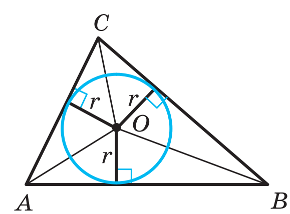



Рис. 215

Итак, мы получили формулу, связывающую площадь треугольника с радиусом вписанной в него окружности. Чтобы найти формулу, связывающую площадь треугольника с радиусом описанной около него окружности, докажем следующую теорему, уточняющую теорему синусов.

**Теорема 2**

**В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

**где $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.**

**Доказательство**

В треугольнике $ABC$ хотя бы один из углов — острый. Пусть, например, острым является угол $A$. Проведём диаметр $BD$ (рис. 216) и рассмотрим треугольник $DBC$. Угол $C$ этого треугольника — прямой, $\angle D = \angle A$, поскольку указанные вписанные углы опираются на одну и ту же дугу $BC$. Следовательно, $a = BC = BD \sin A = 2R \sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Пользуясь теоремой синусов, получаем:

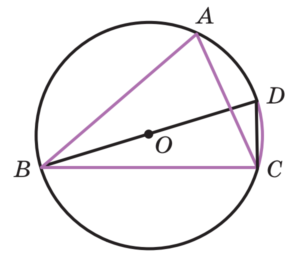



Рис. 216

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема доказана.

**Следствие 1**

**Площадь $S$ треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ выражается формулой**

$$S = \frac{abc}{4R}, \qquad (6)$$

**где $R$ — радиус описанной около него окружности.**

В самом деле, если $A$ — угол, противолежащий стороне $a$, то $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, а $\sin A = \frac{a}{2R}$, откуда и получается указанная формула.

**Следствие 2**

**Площадь $S$ треугольника $ABC$ выражается формулой**

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

**где $R$ — радиус описанной около него окружности.**

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться формулой (6) и теоремой 2.

## 93 Формула Герона

В этом пункте мы выведем формулу площади $S$ треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$, которую связывают с именем древнегреческого математика и инженера Герона Александрийского (ок. I в. н. э.): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Рассмотрим треугольник $ABC$ со сторонами $AB=c$, $BC=a$ и $CA=b$ и выразим его площадь $S$ через $a$, $b$ и $c$. Поскольку

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A, \qquad (7)$$

то достаточно найти $\sin A$. Это можно сделать, пользуясь теоремой косинусов и основным тригонометрическим тождеством. В самом деле, из теоремы косинусов следует, что $\cos A=\frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2)$.

Учитывая, что $\sin A \geqslant 0$, из основного тригонометрического тождества находим:

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{1}{2bc}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

Подкоренное выражение можно разложить на множители следующим образом:

$$\begin{aligned}&(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=\\&=(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)=\\&=2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c).\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для $\sin A$ в формулу (7), приходим к формуле Герона.

**Замечание**

Пусть $h_a$, $h_b$ и $h_c$ — высоты треугольника, проведённые к сторонам $a$, $b$ и $c$, $S$ — его площадь, $R$ и $r$ — радиусы описанной и вписанной окружностей. Поскольку

$$h_a=\frac{2S}{a},\quad h_b=\frac{2S}{b},\quad h_c=\frac{2S}{c},\quad R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c}$$

(см. п. 92), то формула Герона позволяет выразить величины $h_a$, $h_b$, $h_c$, $R$ и $r$ через стороны треугольника.

## 94 Задача Эйлера

В этом пункте мы приведём решение одной из красивейших задач геометрии, получившей название **задача Эйлера**. Начнём, однако, с такого определения: **центральным подобием (гомотетией) с центром $O$ и коэффициентом $k \neq 0$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка $M$ переходит в такую точку $M_1$, что $\overrightarrow{OM_1}=k\overrightarrow{OM}$.**

Нетрудно доказать, что **если при центральном подобии с коэффициентом $k$ точки $A$ и $B$ переходят в точки $A_1$ и $B_1$, то $\overrightarrow{A_1B} = k\overrightarrow{AB}$.**

В самом деле,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Из этого следует, что при центральном подобии прямая, проходящая через точку $O$, переходит в себя, не проходящая через точку $O$ — в параллельную ей прямую, отрезок переходит в отрезок, треугольник — в подобный ему треугольник, а окружность с центром $C$ радиуса $r$ — в окружность с центром $C_1$ радиуса $|k|r$, где $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Перейдём теперь к задаче Эйлера.

**Задача Эйлера**

Доказать, что в произвольном треугольнике:

1) точки, симметричные точке $H$ пересечения высот (или их продолжений) относительно сторон треугольника и их середин, лежат на описанной окружности;

2) середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку $H$ с вершинами, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего точку $H$ с центром описанной окружности, а её радиус в два раза меньше радиуса описанной окружности (эта окружность называется окружностью Эйлера);

3) точка пересечения медиан лежит на отрезке, соединяющем точку $H$ с центром описанной окружности, и делит этот отрезок в отношении 1 : 2, считая от центра описанной окружности (прямая, на которой лежат четыре точки — точка $H$, точка пересечения медиан, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера, называется прямой Эйлера);

4) точки, симметричные центру описанной окружности относительно прямых, содержащих средние линии треугольника, лежат на окружности Эйлера.

**Решение**

Пусть $ABC$ — данный треугольник (рис. 217). Условимся о следующих обозначениях:

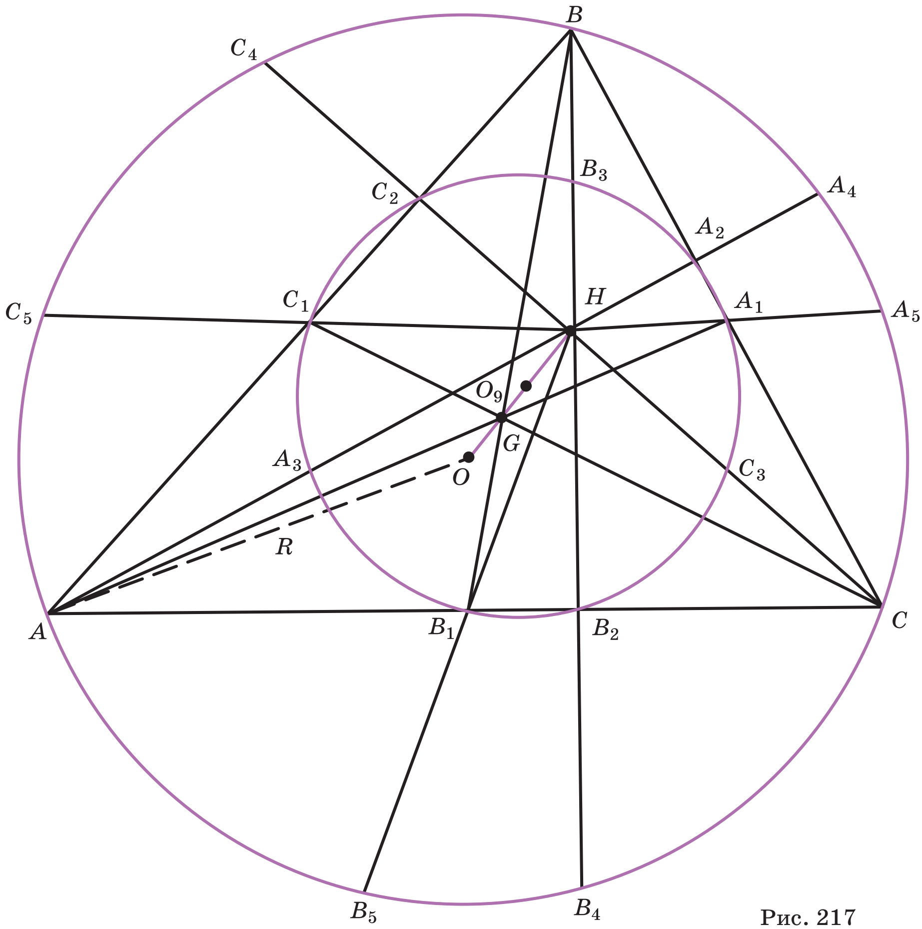



Рис. 217

$G$ — точка пересечения медиан, $O$ — центр описанной окружности, $R$ — её радиус, $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — середины сторон $BC$, $CA$ и $AB$, $A_2$, $B_2$ и $C_2$ — основания высот, проведённых к этим сторонам, $A_3$, $B_3$ и $C_3$ — середины отрезков $AH$, $BH$ и $CH$, $A_4$, $B_4$ и $C_4$ — точки, симметричные точке $H$ относительно сторон треугольника, $A_5$, $B_5$ и $C_5$ — точки, симметричные точке $H$ относительно середин этих сторон, $A_6$, $B_6$ и $C_6$ — точки, симметричные точке $O$ относительно прямых $B_1C_1$, $C_1A_1$ и $A_1B_1$ (на рисунке 217 они не отмечены). Приступим теперь к решению задачи.

1) Если один из углов треугольника $ABC$, например угол $A$, — прямой, то точки $H$, $B_4$ и $C_4$

совпадают с точкой $A$, точка $B_5$ — с точкой $C$, а точка $C_5$ — с точкой $B$. Поскольку $\angle BA_4C = \angle BA_5C = \angle A = 90°$, то точки $A$, $A_4$ и $A_5$ лежат на окружности с диаметром $BC$ (см. п. 88). Таким образом, точки $A_4$, $A_5$, $B_4$, $B_5$, $C_4$, $C_5$ лежат на окружности, описанной около треугольника $ABC$.

Допустим, что треугольник $ABC$ не является прямоугольным. Поскольку $\angle AB_2H = \angle AC_2H = 90°$, то точки $B_2$ и $C_2$ лежат на окружности с диаметром $AH$ (см. п. 88). Следовательно, вписанные по отношению к этой окружности углы $B_2AC_2$ и $B_2HC_2$, а значит, и углы $BAC$ и $BHC$, либо равны, либо составляют в сумме 180°. И в том, и в другом случае $\sin\angle BHC = \sin\angle BAC$.

Пусть $R_1$ — радиус окружности, описанной около треугольника $HBC$. В соответствии с теоремой 2 из п. 92 $BC = 2R_1 \sin\angle BHC = 2R\sin\angle BAC$. Но $\sin\angle BHC = \sin\angle BAC$. Значит, $R_1 = R$. Из этого следует, что окружности, описанные около треугольников $ABC$ и $HBC$, симметричны относительно прямой $BC$ и относительно середины отрезка $BC$. Точка $H$ лежит на окружности, описанной около треугольника $HBC$. Следовательно, симметричные ей точки $A_4$ и $A_5$ лежат на окружности, описанной около треугольника $ABC$. Аналогично доказывается, что точки $B_4$, $B_5$, $C_4$ и $C_5$ также лежат на этой окружности.

2) Рассмотрим центральное подобие с центром $H$ и коэффициентом $\frac{1}{2}$. При этом подобии описанная окружность переходит в окружность радиуса $\frac{R}{2}$, центр $O_9$ которой является серединой отрезка $OH$ (см. рис. 217), а точки $A_5$, $B_5$, $C_5$, $A_4$, $B_4$, $C_4$, $A$, $B$, $C$ описанной окружности переходят соответственно в точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ (середины сторон), $A_2$, $B_2$ и $C_2$ (основания высот), $A_3$, $B_3$ и $C_3$ (середины отрезков $AH$, $BH$, $CH$). Следовательно, точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$, $A_3$, $B_3$, $C_3$ лежат на окружности с центром $O_9$ радиуса $\frac{R}{2}$.

3) Рассмотрим теперь центральное подобие с центром $G$ и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Медианы треугольника $ABC$ делятся точкой $G$ в отно-

шении 1 : 2, поэтому при рассматриваемом центральном подобии вершины $A$, $B$ и $C$ перейдут в середины $A_1$, $B_1$ и $C_1$ противоположных сторон. Следовательно, прямые, содержащие высоты треугольника, перейдут в прямые, перпендикулярные к его сторонам и проходящие через их середины, т. е. в серединные перпендикуляры к сторонам. Поэтому точка $H$ перейдёт в центр $O$ описанной окружности. Это означает, что точка $G$ лежит на отрезке $OH$ и делит его в отношении 1 : 2, считая от точки $O$, что и требовалось доказать.

4) Как только что отмечалось, при центральном подобии с центром $G$ и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ вершины $A$, $B$ и $C$ переходят в середины $A_1$, $B_1$ и $C_1$ противоположных сторон, а точка $H$ переходит в точку $O$. Из этого следует, что: а) окружность, описанная около треугольника $ABC$, переходит в окружность Эйлера; б) точки $A_4$, $B_4$ и $C_4$ описанной окружности, симметричные точке $H$ относительно прямых $BC$, $CA$ и $AB$, переходят в точки $A_6$, $B_6$ и $C_6$ окружности Эйлера, симметричные точке $O$ относительно прямых $B_1C_1$, $C_1A_1$ и $A_1B_1$. Таким образом, точки $A_6$, $B_6$ и $C_6$ лежат на окружности Эйлера.

## Задачи

**836** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$ так, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что отрезок $AD$ — биссектриса треугольника $ABC$.

**837** Биссектриса внешнего угла при вершине $A$ треугольника $ABC$ пересекает прямую $BC$ в точке $D$. Докажите, что $BD : AB = DC : AC$.

**838** Биссектрисы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ пересекаются в точке $O$. а) Найдите отношения $\frac{AO}{OA_1}$, $\frac{BO}{OB_1}$, $\frac{CO}{OC_1}$. б) Докажите, что $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$, $\frac{AO_1}{AA_1} + \frac{BO_1}{BB_1} + \frac{CO_1}{CC_1} = 1$. в) Может ли хотя бы одна из биссектрис треугольника делиться точкой $O$ пополам? г) Докажите, что одна из биссектрис делится точкой $O$ в отношении 2 : 1, считая от вершины, тогда и только тогда, когда одна из сторон треугольника равна полусумме двух других сторон.

**839** Докажите, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведённой к третьей стороне, на диаметр описанной окружности.

**840** Внутри треугольника $ABC$ взята точка $M$. Докажите, что площади треугольников $BAM$ и $BCM$ равны тогда и только тогда, когда точка $M$ лежит на медиане треугольника $ABC$, проведённой из вершины $B$.

**841** Докажите, что из медиан данного треугольника можно построить треугольник, и найдите отношение его площади к площади данного треугольника.

**842** Найдите площадь треугольника, если его высоты равны 3 см, 4 см и 6 см.

**843** Найдите площадь треугольника, если его медианы равны 9 см, 12 см и 15 см.

**844** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон в точках $L$, $M$ и $N$. Докажите, что отношение площади треугольника $LMN$ к площади треугольника $ABC$ равно отношению радиуса окружности, вписанной в треугольник $ABC$, к диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

**845** Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, называется вневписанной. Докажите, что: а) площадь $S$ треугольника $ABC$ выражается формулой $S = r_a(p-a)$, где $r_a$ — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$, $p$ — полупериметр треугольника;

б) $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$, $\quad \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$, где $r$ — радиус окружности, вписанной в треугольник, $r_a$, $r_b$, $r_c$ — радиусы вневписанных окружностей.

**846** Докажите, что площадь $S$ выпуклого четырёхугольника со сторонами $a$, $b$, $c$, $d$ и полупериметром $p$ выражается формулой $S = r_a(p-a) + r_c(p-c)$, где $r_a$ и $r_c$ — радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон, равных $a$ и $c$ (рис. 218).

**847** Докажите, что: а) квадрат площади $S$ выпуклого четырёхугольника со сторонами $a$, $b$, $c$, $d$ и полупериметром $p$ выражается формулой $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\dfrac{B+D}{2}$; б) площадь $S$ вписанного четырёхугольника выражается формулой $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; исходя из этой формулы, получите формулу Герона для площади треугольника.

**848** Докажите, что: а) площадь $S$ четырёхугольника со сторонами $a$, $b$, $c$, $d$, описанного около окружности, выражается формулой

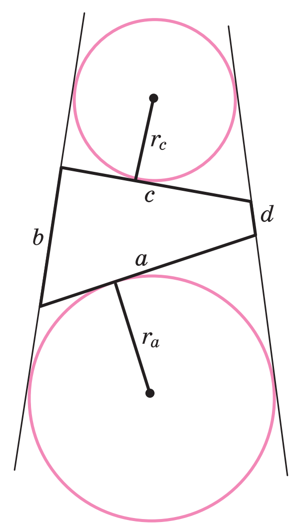



Рис. 218

$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{B+D}{2}$; б) если четырёхугольник со сторонами $a$, $b$, $c$, $d$ является одновременно описанным и вписанным, то его площадь $S$ выражается формулой $S=\sqrt{abcd}$.

**849** Отрезки $AD$, $AH$ и $AM$ — биссектриса, высота и медиана треугольника $ABC$, вписанная в треугольник окружность касается стороны $BC$ в точке $K$. Докажите, что $MK^2=MD\cdot MH$.

**850** В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB=c$, $BC=a$ и $CA=b$ $r$ и $R$ — радиусы вписанной и описанной окружностей, $S$ — площадь, точка $O$ — центр описанной окружности, $H$ — точка пересечения высот, отрезки $AD$ и $AM$ — высота и медиана. Докажите, что:

а) $a+b=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{|A-B|}{2}$; б) $|a-b|=4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{|A-B|}{2}$;

в) $\frac{|a-b|}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}|A-B|}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}$; г) $\frac{a^2-b^2}{c}=a\cos B-b\cos A$;

д) $a+b+c=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$;

е) $\cos^2 A=\sin^2 B+\cos^2 C-2\sin A\sin B\cos C$;

ж) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$; з) $r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$;

и) $AH=\frac{a}{4S}(b^2+c^2-a^2)$; к) $OH^2=9R^2-a^2-b^2-c^2$; л) $DM=\frac{|b^2-c^2|}{2a}$.

# § 3 Теоремы Менелая и Чевы

## 95 Теорема Менелая

Рассмотрим треугольник $ABC$ и отметим на прямых $AB$, $BC$ и $CA$ точки $C_1$, $A_1$, $B_1$, не совпадающие с его вершинами (рис. 219). Пусть $\overrightarrow{AC_1}=p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1}=q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1}=r\overrightarrow{B_1A}$. Поскольку точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ не совпадают с вершинами треугольника $ABC$, то числа $p$, $q$, $r$ отличны от нуля. Кроме того, каждое из этих чисел отлично от $-1$. В самом деле, если, например, $p=-1$, то $\overrightarrow{AC_1}=-\overrightarrow{C_1B}$, откуда $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, т. е. вершины $A$ и $B$ совпадают, а это противоречит условию.

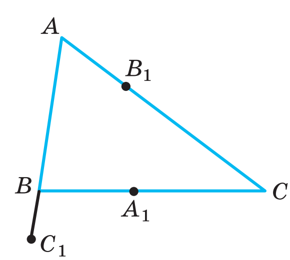


Рис. 219

Поставим теперь такой вопрос: при каком соотношении между числами $p$, $q$, $r$ точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой? Ответ на этот вопрос даёт теорема, связанная с именем Менелая Александрийского, древнегреческого математика и астронома, жившего в I в. н. э.

**Теорема**

**Пусть на сторонах или продолжениях сторон $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ отмечены точки $C_1$, $A_1$, $B_1$, не совпадающие с его вершинами, причём $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$. Тогда если точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой, то $pqr = -1$; обратно: если $pqr = -1$, то точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой.**

**Доказательство**

1) Допустим сначала, что точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой, и докажем, что $pqr = -1$. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, чтобы точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежали на оси $Oy$ (рис. 220). Пусть $a$, $b$ и $c$ — абсциссы точек $A$, $B$ и $C$. Из равенства $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$ следует, что $0 - a = p(b - 0)$, т. е. $a = -pb$. Аналогичным образом из равенств $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ получаем: $b = -qc$ и $c = -ra$. Таким образом, $a = -pb = pqc = -pqra$, или $a(pqr + 1) = 0$, поэтому либо $a = 0$, либо $pqr = -1$. Если $a = 0$, то $c = -ra = 0$ и $b = -qc = 0$, т. е. точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой (оси $Oy$), а это противоречит условию. Следовательно, $pqr = -1$, что и требовалось доказать.

2) Допустим теперь, что $pqr = -1$, и докажем, что точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, чтобы точки $C_1$ и $A_1$ лежали на оси $Oy$ (см. рис. 220). Пусть, как и прежде, $a$, $b$ и $c$ — абсциссы точек $A$, $B$ и $C$, $x$ — абсцисса точки $B_1$. Из равенств $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, как мы видели, следует, что $a = -pb$ и $b = -qc$. Таким образом, $a = pqc$. Из равенства $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ следует, что $x - c = r(a - x)$. Умножая обе части этого равенства на $pq$ и учитывая, что $pqr = -1$, $pqc = a$, получаем: $pqx - a = -a + x$, или $(pq - 1)x = 0$. Если $pq = 1$, то из равенства $pqr = -1$ следует, что $r = -1$, а этого, как отмечалось в начале пункта, не может быть.

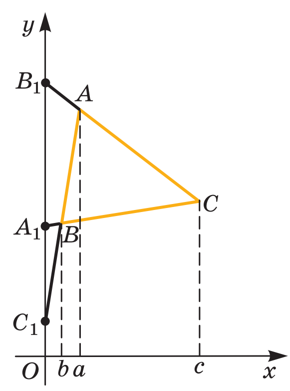



Рис. 220

Таким образом, $pq \neq 1$, а значит, $x = 0$. Следовательно, точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ лежат на одной прямой (оси $Oy$). Теорема доказана.

## 96 Теорема Чевы

Вновь рассмотрим треугольник $ABC$ и отметим на прямых $AB$, $BC$ и $CA$ точки $C_1$, $A_1$, $B_1$, не совпадающие с его вершинами (см. рис. 219). Пусть $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$. При этом $p$, $q$, $r \neq 0$ и $p$, $q$, $r \neq -1$ (см. п. 95). Поставим такой вопрос: при каком соотношении между числами $p$, $q$ и $r$ прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке? Ответ на этот вопрос даёт теорема, связанная с именем итальянского математика и инженера Джованни Чевы (1648—1734).

**Теорема**

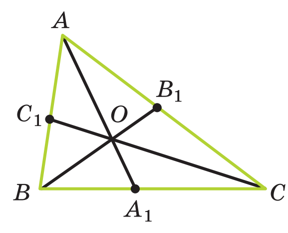
**Пусть на сторонах или продолжениях сторон $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ отмечены точки $C_1$, $A_1$, $B_1$, не совпадающие с его вершинами, причём $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$. Тогда если прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то $pqr = 1$; обратно: если $pqr = 1$, то прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке или попарно параллельны.**

**Доказательство**

1) Допустим сначала, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в некоторой точке $O$ (рис. 221, *а*, *б*). Условимся обозначать через $S(L, M, N)$ площадь треугольника $LMN$, взятую со знаком «+», если обход вершин $L$, $M$, $N$ осуществляется против часовой стрелки, и со знаком «–» — в противоположном случае. Поскольку $\dfrac{S(A, B, A_1)}{S(A, A_1, C)} = q$ и $\dfrac{S(O, B, A_1)}{S(O, A_1, C)} = q$ (обоснуйте эти равенства), то $S(A, B, A_1) = qS(A, A_1, C)$ и $S(O, B, A_1) = qS(O, A_1, C)$. Следовательно,

$$\frac{S(A, B, O)}{S(A, O, C)} = \frac{S(A, B, A_1) - S(O, B, A_1)}{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)} =$$

$$= q\,\frac{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)}{S(A, A_1, C) - S(O, A_1, C)} = q.$$



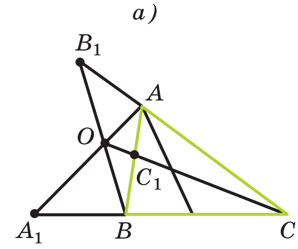




Рис. 221

Таким образом, $q = \dfrac{S(A, B, O)}{S(A, O, C)}$. Аналогично $r = \dfrac{S(B, C, O)}{S(B, O, A)}$ и $p = \dfrac{S(C, A, O)}{S(C, O, B)}$. Перемножая эти равенства и замечая, что

$$S(A,\ B,\ O) = S(B,\ O,\ A),$$
$$S(A,\ O,\ C) = S(C,\ A,\ O),$$
$$S(B,\ C,\ O) = S(C,\ O,\ B),$$

получаем:

$$pqr = \frac{S(C, A, O)}{S(C, O, B)} \cdot \frac{S(B, O, A)}{S(C, A, O)} \cdot \frac{S(C, O, B)}{S(B, O, A)} = 1,$$

что и требовалось доказать.

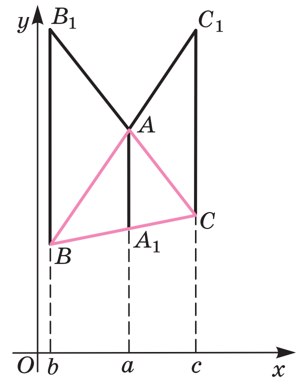


Рис. 222

Допустим теперь, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ попарно параллельны. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, чтобы ось $Oy$ была параллельна прямой $AA_1$. Пусть $a$ — абсцисса точек $A$ и $A_1$, $b$ — абсцисса точек $B$ и $B_1$, $c$ — абсцисса точек $C$ и $C_1$ (рис. 222). Из равенств $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = q\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{CB_1} = r\overrightarrow{B_1A}$ следует, что $(c-a) = p(b-c)$, $(a-b) = q(c-a)$ и $(b-c) = r(a-b)$. Учитывая, что $c \neq b$, $c \neq a$ и $a \neq b$ (иначе точки $A$, $B$ и $C$ оказались бы лежащими на прямой, параллельной оси $Oy$), получаем: $p = \dfrac{c-a}{b-c}$, $q = \dfrac{a-b}{c-a}$, $r = \dfrac{b-c}{a-b}$, и, следовательно, $pqr = \dfrac{c-a}{b-c} \cdot \dfrac{a-b}{c-a} \cdot \dfrac{b-c}{a-b} = 1$, что и требовалось доказать.

2) Допустим теперь, что $pqr = 1$, и докажем, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке, или попарно параллельны.

Если никакие две из трёх указанных прямых не имеют общих точек, то они попарно параллельны.

Если же какие-нибудь две из них, например прямые $AA_1$ и $BB_1$, пересекаются в некоторой точке $O$, то поступим так. Проведём прямую $CO$ (см. рис. 221). Поскольку $pqr = 1$ и $p \neq -1$, то, согласно доказанному в пункте 1,

$$qr = \frac{S(A, B, O)}{S(A, O, C)} \cdot \frac{S(B, C, O)}{S(B, O, A)} =$$
$$= \frac{S(B, C, O)}{S(A, O, C)} = -\frac{S(B, C, O)}{S(A, C, O)} \neq -1,$$

поэтому $S(B, C, O) \neq S(A, C, O)$. Из этого следует, что прямые $CO$ и $AB$ не параллельны (объясните почему). Пусть $C_2$ — точка их пересечения, $\overrightarrow{AC_2} = t\overrightarrow{C_2B}$. Так как прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_2$ пересекаются в одной точке, то, по доказанному в 1), $tqr = 1$, откуда $t = \dfrac{1}{qr} = p$. Таким образом, $\overrightarrow{AC_1} = p\overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{AC_2} = p\overrightarrow{C_2B}$. Вычитая одно равенство из другого, получаем: $\overrightarrow{AC_2} - \overrightarrow{AC_1} = p(\overrightarrow{C_2B} - \overrightarrow{C_1B})$, или $\overrightarrow{C_1C_2} = -p\overrightarrow{C_1C_2}$, т. е. $(p+1)\overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. Учитывая, что $p \neq -1$, приходим к равенству $\overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$. Следовательно, точки $C_1$ и $C_2$ совпадают. Но это и означает, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке (в точке $O$). Теорема доказана.

### Задачи

**851** Отрезки $AA_1$ и $BB_1$ — биссектрисы треугольника $ABC$, луч $CC_1$ — биссектриса его внешнего угла, причём точка $C_1$ лежит на прямой $AB$. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой.

**852** Биссектрисы внешних углов $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают продолжения противоположных сторон в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой.

**853** На сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ или их продолжениях отмечены соответственно точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$, лежащие на одной прямой. Докажите, что точки $A_2$, $B_2$ и $C_2$, симметричные соответственно точкам $A_1$, $B_1$ и $C_1$ относительно середин сторон $BC$, $CA$ и $AB$, также лежат на одной прямой.

**854** Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

**855** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки $K$, $L$, $M$ и $N$, не совпадающие с вершинами четырёхугольника. Докажите, что: а) прямые $KL$, $MN$ и $AC$ пересекаются в одной точке или параллельны друг другу тогда и только тогда, когда $\dfrac{AK}{KB} \cdot \dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MD} \cdot \dfrac{DN}{NA} = 1$; б) прямые $KL$, $MN$ и $AC$ пересекаются в одной точке или параллельны друг другу тогда и только тогда, когда это же верно в отношении прямых $KN$, $LM$ и $BD$.

**856** Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно в точках $P$, $Q$, $R$ и $S$. Докажите, что прямые $PQ$, $RS$ и $AC$ пересекаются в одной точке или параллельны друг другу.

**857** Окружность с центром $O$ касается двух неравных окружностей с центрами $O_1$ и $O_2$ в точках $A_1$ и $A_2$ соответственно. Докажите, что прямая $A_1A_2$ проходит через точку пересечения прямой $O_1O_2$ и общей касательной (внешней или внутренней) к окружностям с центрами $O_1$ и $O_2$.

**858** Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ расположены так, что прямые $AB$ и $A_1B_1$, $BC$ и $B_1C_1$, $CA$ и $C_1A_1$ пересекаются в точках $P$, $Q$, $R$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке или попарно параллельны тогда и только тогда, когда точки $P$, $Q$ и $R$ лежат на одной прямой (теорема Дезарга).

**859** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $A_1$ и $A_2$, симметричные относительно середины $BC$, а на сторонах $AC$ и $AB$ отмечены соответственно точки $B_1$, $B_2$ и $C_1$, $C_2$, симметричные относительно середин этих сторон. Докажите, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда отрезки $AA_2$, $BB_2$ и $CC_2$ пересекаются в одной точке.

**860** Окружность пересекает сторону $BC$ треугольника $ABC$ в точках $A_1$ и $A_2$, сторону $AC$ — в точках $B_1$ и $B_2$, сторону $AB$ — в точках $C_1$ и $C_2$. Докажите, что отрезки $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда отрезки $AA_2$, $BB_2$ и $CC_2$ пересекаются в одной точке.

**861** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $P$ и $E$, а на стороне $BC$ — точки $M$ и $K$, причём $AP:PE:EC=CK:KM:MB$. Отрезки $AM$ и $BP$ пересекаются в точке $O$, а отрезки $AK$ и $BE$ — в точке $T$. Докажите, что точки $O$, $T$ и $C$ лежат на одной прямой.

**862** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ (либо на одной из сторон и продолжениях двух других сторон) отмечены соответственно точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда:

а) $\dfrac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\dfrac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\dfrac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=1$;

б) для любой точки $O$, не лежащей на прямых $AB$, $BC$ и $CA$, выполняется равенство $\dfrac{\sin\angle AOC_1}{\sin\angle C_1OB}\cdot\dfrac{\sin\angle BOA_1}{\sin\angle A_1OC}\cdot\dfrac{\sin\angle COB_1}{\sin\angle B_1OA}=1$.

# § 4 Эллипс, гипербола и парабола

## 97 Эллипс

Эллипс, по-видимому, был известен ещё в глубокой древности, когда облик геометрии соответствовал дословному переводу её названия. В те времена основными инструментами для выполнения построений на местности были колья и верёвки, позволявшие проводить прямые и окружности, а значит, и выполнять все те построения, которые теперь называют построениями с помощью циркуля и линейки.

Ясно, как с помощью указанных инструментов построить окружность: нужно закрепить один из концов верёвки и в натянутом состоянии прочертить вторым концом линию. Напрашивается вопрос: а что получится, если закрепить оба конца ненатянутой верёвки, а затем в натянутом состоянии прочертить линию? Получится эллипс. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

**Определение**

**Эллипсом** называется множество всех таких точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек постоянна.

Фиксированные точки называются **фокусами эллипса**.

Пусть $2c$ — расстояние между фокусами, $2a$ — сумма расстояний от точки эллипса до фокусов. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, чтобы фокусы $F_1$ и $F_2$ имели координаты $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ (рис. 223), и выведем уравнение эллипса в этой системе координат. Стоящую перед нами задачу можно сформулировать так: найти множество всех таких точек $M(x;\ y)$, для которых

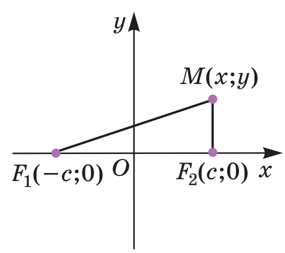



Рис. 223

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Из неравенства треугольника следует, что $MF_1 + MF_2 \geqslant F_1F_2$, т. е. $a \geqslant c$. При $a = c$ эллипс вырождается в отрезок $F_1F_2$, поэтому будем считать, что $a > c$. Поскольку

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ \ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

то уравнение эллипса имеет вид

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на разность фигурирующих в нём корней, а затем разделим на $2a$. В результате получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} =$$
$$= \frac{1}{2a}\left((x+c)^2 - (x-c)^2\right) = \frac{2cx}{a}.$$

Пользуясь этим уравнением и уравнением (1), можно выразить каждый из корней:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}, \qquad (2)$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{cx}{a}. \qquad (3)$$

Возведя обе части равенства (2) в квадрат и приведя подобные члены, получим:

$$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2. \qquad (4)$$

Возведение в квадрат обеих частей равенства (3) даёт тот же результат.

Запишем уравнение (4) в виде

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.$$

Поскольку $a \neq c$, то полученное равенство можно переписать так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1, \qquad (5)$$

или, с учётом условия $a>c$, так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

где $b^2=a^2-c^2<a^2$.

При возведении в квадрат обеих частей равенств (2) и (3) могли появиться лишние корни, соответствующие случаю $a \pm \frac{cx}{a}<0$. Но этого не происходит: как видно из уравнения (6), $|x| \leqslant a$, поэтому $\left|\frac{cx}{a}\right| \leqslant c<a$, и значит, $a \pm \frac{cx}{a}>0$. Таким образом, уравнение (6) эквивалентно уравнению (1). Оно называется **каноническим уравнением эллипса**.

Уравнение (6) позволяет обнаружить следующие свойства эллипса.

1. Эллипс имеет центр симметрии (начало координат $O$) и две взаимно перпендикулярные оси симметрии (оси $Ox$ и $Oy$). Эти оси называются **осями эллипса**: та из них, на которой лежат фокусы, называется **большой осью**, а другая — **малой осью**; величины $a$ и $b$ называются **большой и малой полуосями**.

2. Поскольку

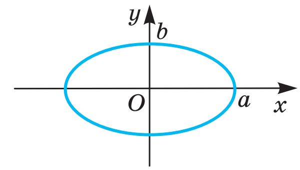
$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \leqslant 1,$$

то эллипс целиком содержится в прямоугольнике ($|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$), стороны которого параллельны его осям.

3. При $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ уравнение (6) может быть записано в виде:

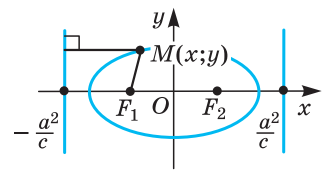
$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Функция $y(x)$ монотонно убывает от значения $y = b$ при $x = 0$ до значения $y = 0$ при $x = a$. С учётом установленных нами симметрий это позволяет изобразить эллипс (рис. 224, *а*).




*а)*

Эллипс




*б)*

Директрисы эллипса

Рис. 224

**Замечания**

1. Обратимся к уравнению (2):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a}.$$

Из него, как мы помним, получается уравнение (6). С другой стороны, из уравнения (6) следует равенство (4) и неравенство $a + \frac{cx}{a} > 0$. Записывая уравнение (4) в виде

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

и учитывая неравенство $a + \frac{cx}{a} > 0$, приходим к уравнению (2). Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению (6). Перепишем его так:

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x + \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}.$$

Числитель левой части этого уравнения равен $MF_1$, а её знаменатель равен расстоянию от точки $M$ до прямой, заданной уравнением $x = -\frac{a^2}{c}$ (рис. 224, *б*). Эта прямая называется **директрисой эллипса, соответствующей фокусу $F_1$**. Отметим также, что левая часть равенства не зависит от точки $M$ и меньше 1. Таким образом,

**эллипс является множеством всех таких точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) постоянно и меньше единицы.**

Указанное отношение $\left(\text{равное } \dfrac{c}{a}\right)$ называется **эксцентриситетом эллипса.**

Рассуждения, применённые к уравнению (2), можно применить и к уравнению (3). Следовательно, уравнение (3) также равносильно уравнению (6). Его можно записать так:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\dfrac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}.$$

Таким образом, фокусу $F_2$ соответствует директриса, задаваемая уравнением $x=\dfrac{a^2}{c}$.

2. Рассмотрим произвольную прямую, заданную в нашей системе координат уравнением $px+qy+r=0$, где $p^2+q^2\neq 0$. Пусть, например, $p\neq 0$. Выражая из уравнения прямой $x$ через $y$ и подставляя его в уравнение (6), получим для $y$ квадратное уравнение, которому удовлетворяют ординаты всех общих точек прямой и эллипса. Квадратное уравнение не может иметь больше двух решений. Следовательно, **любая прямая имеет с эллипсом не более двух общих точек.**

## 98 Гипербола

Возникает естественный вопрос: что получится, если в определении эллипса сумму расстояний заменить модулем их разности? Получится линия, называемая гиперболой. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

**Определение**

**Гиперболой** называется множество всех таких точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек есть постоянная положительная величина.

Фиксированные точки называются **фокусами гиперболы.**

Пусть $2c$ — расстояние между фокусами, $2a$ — модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов. Введём прямоугольную систему координат $Oxy$ так, чтобы фокусы $F_1$ и $F_2$ имели координаты $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ (см. рис. 223), и выведем уравнение гиперболы в этой системе координат. Стоящую перед нами задачу можно сформулировать так: найти множество всех таких точек $M(x;\ y)$, для которых разность $MF_1 - MF_2$ равна либо $2a$, либо $-2a$, т. е. $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$.

Из неравенства треугольника следует, что $|MF_1 - MF_2| \leqslant F_1F_2$, т. е. $a \leqslant c$. При $a = c$ гипербола вырождается в два луча прямой $F_1F_2$, поэтому будем считать, что $a < c$.

В координатах уравнение гиперболы принимает вид: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$.

Умножим обе части этого равенства на сумму фигурирующих в нём корней, а затем разделим на $\pm 2a$. В результате получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \frac{2cx}{a},$$

причём в правой части будет такой же знак (плюс или минус), как и в первом уравнении. Теперь можно выразить каждый из корней:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|a + \frac{cx}{a}\right|, \ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{cx}{a}\right|. \quad (7)$$

Возведём обе части любого из этих равенств в квадрат (докажите, что при этом лишних корней не появится) и преобразуем его к виду:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Поскольку $a \neq c$, то полученное равенство можно переписать так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Это и есть искомое уравнение гиперболы. Сравнивая полученный результат с уравнением (5), мы приходим к весьма неожиданному выводу: **гипербола имеет точно такое же уравнение, как и эллипс!** Однако существенное различие состоит в том, что для эллипса $a > c$, а для гиперболы $a < c$. С учётом этого условия уравнение гиперболы можно переписать так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Уравнение (8) называется **каноническим уравнением гиперболы.** Оно позволяет обнаружить следующие свойства гиперболы.

1. Гипербола имеет центр симметрии (начало координат $O$) и две взаимно перпендикулярные оси симметрии (оси $Ox$ и $Oy$). Эти оси называются **осями гиперболы:** та из них, на которой лежат фокусы, называется **вещественной осью**, а другая — **мнимой осью**; величины $a$ и $b$ называются **вещественной и мнимой полуосями**.

2. Поскольку $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$, то в полосе $(|x| < a)$, содержащей мнимую ось гиперболы, точек гиперболы нет.

3. Поскольку $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < \frac{x^2}{a^2}$, то в области между двумя пересекающимися прямыми $\left(|y| \geqslant \frac{b}{a}|x|\right)$ точек гиперболы также нет.

4. При $x \geqslant a$, $y \geqslant 0$ уравнение (8) может быть записано в виде $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$.

Функция $y(x)$ монотонно и неограниченно возрастает от значения $y = 0$ при $x = a$.

5. Ясно, что при $x \to +\infty$ функция $y(x)$ становится приближённо равной $\frac{b}{a}x$. Уточним это свойство. Имеем:

$$0 < \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \leqslant \frac{ab}{x} \to 0 \text{ при } x \to +\infty.$$

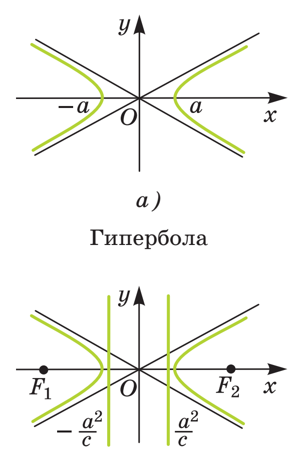
Таким образом, гипербола имеет асимптоту $\left(y = \frac{b}{a}x\right)$.

Теперь изобразим гиперболу (рис. 225, *а*). Мы видим, в частности, что гипербола имеет две ветви.

**Замечания**

1. Уравнения (7) можно записать так:

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\left|x + \frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left|x - \frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}.$$




*а)*

Гипербола

*б)*

Директрисы гиперболы

Рис. 225

Каждое из этих уравнений равносильно уравнению (8) (докажите это) и, следовательно, также является уравнением гиперболы. Рассуждения, аналогичные проведённым в замечании 1 п. 97, приводят нас к выводу: **гипербола является множеством всех таких точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) постоянно и больше единицы** (поскольку для гиперболы $c > a$).

Указанное отношение называется **эксцентриситетом гиперболы**. Фокусу $F_1$ соответствует директриса, задаваемая уравнением $x = -\frac{a^2}{c}$, а фокусу $F_2$ — директриса, задаваемая уравнением $x = \frac{a^2}{c}$ (рис. 225, *б*).

2. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что **любая прямая имеет с гиперболой не более двух общих точек.**

3. В курсе алгебры гиперболой называлась кривая, заданная в прямоугольной системе координат $Oxy$ уравнением $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. В системе координат $Ox'y'$, которая получается поворотом осей $Ox$ и $Oy$ вокруг точки $O$ на $45°$ против часовой стрелки, уравнение этой гиперболы при $k > 0$ (рис. 226) имеет канонический вид

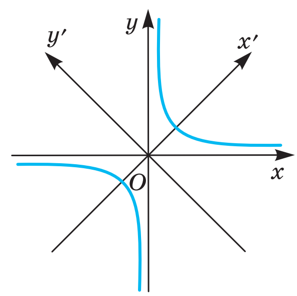


Рис. 226

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2k})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2k})^2} = 1.$$

Докажите это самостоятельно.

## 99 Парабола

Мы знаем, что **эллипс (гипербола) является множеством всех таких точек плоскости, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой постоянно и меньше (больше) единицы.**

Сам собой напрашивается вопрос: какая кривая соответствует отношению, равному 1? Эта кривая называется параболой. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

**Определение**

**Параболой** называется множество всех таких точек плоскости, для которых расстояние до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой, не проходящей через эту точку.

Фиксированная точка называется **фокусом**, а фиксированная прямая — **директрисой параболы**.

Пусть $p$ — расстояние от фокуса $F$ до директрисы. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы фокус имел координаты $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, а директриса задавалась уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 227, *а*). В этой системе координат уравнение параболы имеет вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат (докажите, что при этом лишних корней не появится), приходим к уравнению

$$y^2 = 2px. \qquad (9)$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением параболы**. Оно позволяет обнаружить следующие свойства параболы.

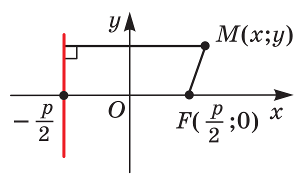
1. Парабола имеет одну ось симметрии (ось $Ox$). Эта ось называется **осью параболы**, а точка её пересечения с параболой — **вершиной параболы**.

2. Поскольку $x = \frac{y^2}{2p} \geqslant 0$, то парабола целиком содержится в полуплоскости ($x \geqslant 0$), граница которой перпендикулярна к оси параболы.

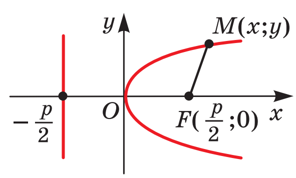
3. При $x \geqslant 0$ уравнение (9) может быть записано в виде $y = \sqrt{2px}$.

Функция $y(x)$ монотонно и неограниченно возрастает от значения $y = 0$ при $x = 0$. С учётом симметрии это позволяет изобразить параболу (рис. 227, *б*).

Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что **любая прямая имеет с параболой не более двух общих точек.**



*а)*



*б)*

Парабола

Рис. 227

Эллипс, гипербола и парабола встречаются в самых разнообразных ситуациях. Так, тень футбольного мяча ограничена эллипсом, брошенный камень движется по параболе, а движение небесных тел (планет, комет, метеоритов и т. д.) под действием притяжения Солнца происходит по эллипсу или гиперболе. Конечно, небесные тела испытывают воздействие не только Солнца, но и других тел, поэтому их истинные траектории не являются в точности эллипсами или гиперболами, но весьма близки к этим линиям. Так, каждая планета Солнечной системы, в том числе наша Земля, движется по орбите, близкой к эллиптической, причём Солнце находится в одном из фокусов эллипса.

### Задачи

**863** Расстояние между двумя фокусами эллипса равно $4\sqrt{2}$, а отношение большой и малой полуосей равно 3. а) Напишите уравнение этого эллипса в системе координат $Oxy$, где $O$ — середина отрезка, соединяющего фокусы, лежащие на оси $Ox$. б) Найдите эксцентриситет эллипса. в) Напишите уравнения директрис эллипса в системе координат $Oxy$.

**864** Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и прямой, проходящей через точки с координатами (1; –1) и (3; 1).

**865** Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ и: а) окружности радиуса $\sqrt{7}$ с центром в начале координат; б) окружности радиуса 2 с центром в точке (2; 0).

**866** Асимптоты гиперболы проходят через начало координат и составляют с осью $Ox$ углы в $60°$. Расстояние между фокусами, лежащими на оси $Ox$, равно 4. а) Напишите уравнение этой гиперболы в системе координат $Oxy$. б) Найдите эксцентриситет гиперболы. в) Напишите уравнения директрис гиперболы в системе координат $Oxy$.

**867** Исследуйте взаимное расположение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и гиперболы $y=\frac{2\sqrt{2}}{x}$.

**868** Найдите эксцентриситет и напишите уравнения директрис гиперболы $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$.

**869** Парабола задана уравнением $y=ax^2+by+c$. Напишите уравнение директрисы этой параболы и найдите координаты её фокуса.

**870** Исследуйте взаимное расположение параболы $y=x^2$ и окружности радиуса $R$ с центром в точке (0; $R$) в зависимости от $R$.

## Задачи для подготовки к ЕГЭ

**3**[1]

1 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 228).

2 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 229).

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 230).

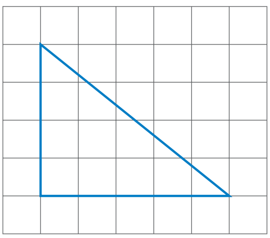


Рис. 228

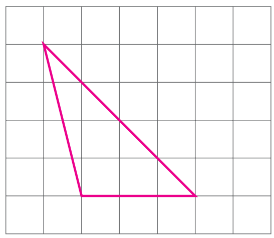


Рис. 229

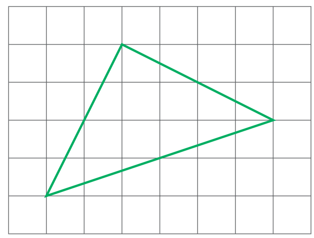


Рис. 230

4 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 231).

5 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 232).

6 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 233).

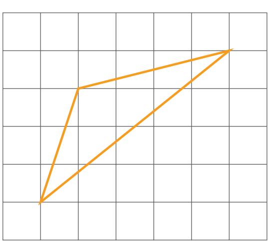


Рис. 231

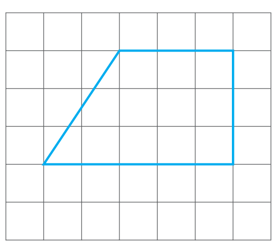


Рис. 232

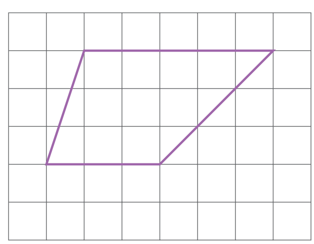


Рис. 233

[1] Нумерация заданий соответствует нумерации контрольных измерительных материалов ЕГЭ по математике профильного уровня.

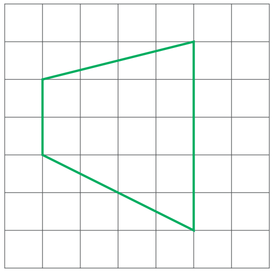


Рис. 234

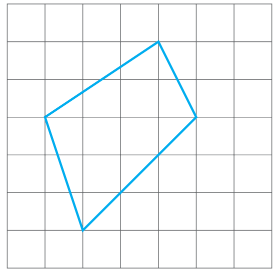


Рис. 235

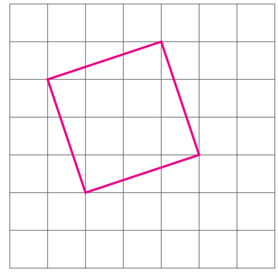


Рис. 236

**7** Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 234).

**8** Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 235).

**9** Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 236).

**10** Найдите площадь $S$ части круга, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (рис. 237). В ответе укажите число, равное $\frac{S}{\pi}$.

**11** Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

**12** Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 150°.

**13** Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 6 и 8, а угол между ними равен 30°.

**14** Площадь прямоугольного треугольника равна 12, а один из его катетов равен 6. Найдите другой катет.

**15** Основания трапеции равны 1 и 3, а высота равна 1. Найдите площадь трапеции.

**16** Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3 : 5. Площадь меньшего многоугольника равна 36. Найдите площадь большего многоугольника.

**17** Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

**18** Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.

**19** Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 16 и одна сторона на 2 меньше другой.

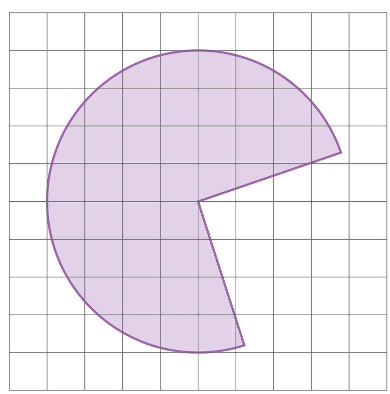


Рис. 237

20 Периметр прямоугольника равен 34, а площадь равна 60. Найдите диагональ этого прямоугольника.

21 Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, проведённая к первой стороне, равна 10. Найдите высоту, проведённую ко второй стороне параллелограмма.

22 Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.

23 Основания прямоугольной трапеции равны 2 и 8. Её площадь равна 30. Найдите острый угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

24 Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(5;\ 9)$ относительно оси $Oy$.

25 Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(3;\ 7)$ и $B(-1;\ 3)$.

26 Найдите длину вектора $\vec{a}\{6;\ 8\}$.

27 Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами $(3;\ 0)$ и $(0;\ 3)$.

28 Точки $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 6)$, $B(12;\ -2)$ и $C$ являются вершинами параллелограмма $OBAC$. Найдите ординату точки $C$.

29 Найдите абсциссу точки пересечения прямой, заданной уравнением $3x+2y=6$, с осью $Ox$.

30 Найдите ординату точки пересечения прямых, заданных уравнениями $3x+2y=6$ и $y=-x$.

31 Какого радиуса должна быть окружность с центром в точке $P(7;\ 5)$, чтобы она касалась оси абсцисс?

32 Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(6;\ 0)$, $(0;\ 10)$ и $(6;\ 10)$.

33 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;\ 1)$, $(4;\ 3)$ и $(4;\ 5)$.

34 Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$.

35 Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите $|\overrightarrow{AB}|$.

36 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке $O$ и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$.

37 Сторона равностороннего треугольника $ABC$ равна $\sqrt{3}$. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

38 Сторона равностороннего треугольника $ABC$ равна 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

## 6

1 В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой. Найдите $\sin B$, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

2 В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой. Найдите $AC$, если $BC=6$ и $\operatorname{tg} A = 0{,}5$.

3 В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой. Найдите высоту $CH$, если $AB=13$ и $\operatorname{tg} A = 0{,}2$.

**4** Основание $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ равно 9,6. Найдите $AC$, если $\sin A = \frac{7}{25}$.

**5** Основание $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ равно 40. Найдите $\sin A$, если $AC = 25$.

**6** В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, высота $CH$ равна 7. Найдите $\cos A$, если $BH = 24$.

**7** В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой. Найдите косинус внешнего угла при вершине $B$, если $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$.

**8** В параллелограмме $ABCD$ $\cos A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите $\sin B$.

**9** Основания равнобедренной трапеции равны 31 и 45, а боковая сторона равна 25. Найдите синус острого угла трапеции.

**10** Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12, а синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

**11** Найдите синус угла $AOB$ (рис. 238). В ответе укажите значение синуса, умноженное на $\sqrt{5}$.

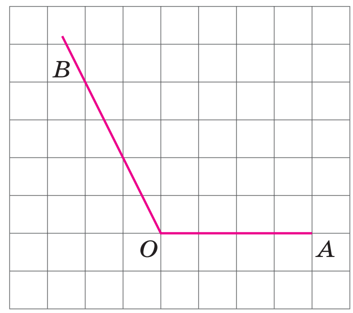



Рис. 238

**12** Один из углов равнобедренного треугольника равен 98°. Найдите один из других его углов. Ответ дайте в градусах.

**13** В треугольнике $ABC$ отрезок $AD$ — биссектриса, угол $C$ равен 30°, угол $BAD$ равен 18°. Найдите угол $ADB$. Ответ дайте в градусах.

**14** Углы $A$ и $B$ треугольника $ABC$ равны 58° и 72°, высоты $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $O$. Найдите величину угла $A_1OB_1$. Ответ дайте в градусах.

**15** Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.

**16** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 20°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

**17** Найдите высоту ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.

**18** Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

**19** В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 18. Найдите её среднюю линию.

**20** Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах.

21 Угол $A$ четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен $54°$. Найдите угол $C$ этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

22 Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

23 Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.

24 Треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром $O$. Найдите угол $BOC$, если угол $BAC$ равен $23°$.

25 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

## 8

1 Найдите квадрат расстояния между вершинами $D$ и $B_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=3$, $AD=8$ и $AA_1=5$.

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=4$. Найдите угол $C_1BC$. Ответ дайте в градусах.

3 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной $S$ точка $R$ — середина ребра $BC$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AB=1$, $SR=2$.

4 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания пересекаются в точке $M$. Объём пирамиды равен 1. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $MS=1$.

5 Диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6, высота пирамиды равна 4. Найдите длину бокового ребра.

6 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 23. Найдите расстояние между точками $D$ и $F_1$.

7 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 49. Найдите угол $E_1EA_1$. Ответ дайте в градусах.

8 Высота конуса равна 4, а диаметр основания равен 6. Найдите образующую конуса.

9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi$, а диаметр основания равен 1. Найдите высоту цилиндра.

10 Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза?

11 Диагональ грани куба равна $\sqrt{8}$. Найдите его объём.

12 Объём прямоугольного параллелепипеда равен 60, а площадь одной из его граней равна 12. Найдите ребро параллелепипеда, перпендикулярное к этой грани.

13 Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объём параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.

14 Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро призмы равно 5. Найдите объём призмы.

15 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

16 Найдите объём правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}$.

17 Найдите объём призмы, основанием которой является правильный шестиугольник со стороной, равной 2, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$ и наклонено к плоскости основания под углом в $30°$.

18 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, и каждое из них равно 3. Найдите объём пирамиды.

19 Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4, а её объём равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

20 Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 12, а объём пирамиды равен 200. Найдите боковое ребро пирамиды.

21 Найдите объём пирамиды, вершинами которой являются вершины $A_1$, $B$, $C$, $C_1$, $B_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $AD = 3$ и $AA_1 = 4$.

22 Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна к плоскости основания, а каждая из трёх других боковых граней наклонена к плоскости основания под углом в $60°$. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.

23 Объём прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.

24 Объём первого цилиндра равен 12 м$^3$. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 2 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в м$^3$.

25 Высота конуса равна 6, а образующая равна 10. Найдите отношение объёма конуса к числу $\pi$.

26 Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен $90°$. Найдите отношение объёма конуса к числу $\pi$.

27 Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 2 раза?

28 Площадь полной поверхности данного правильного тетраэдра равна 80 см$^2$. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, ребро которого в 4 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см$^2$.

29 Площадь боковой поверхности конуса равна 16 см$^2$. Радиус основания конуса уменьшили в 4 раза, а образующую увеличили в 2 раза. Найдите площадь боковой поверхности получившегося конуса. Ответ дайте в см$^2$.

## 14

1 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите тангенс угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $BCC_1$.

2 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите косинус угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $BC_1D$.

3 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями $AB_1C_1$ и $A_1B_1C$.

4 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью $ABC$ и плоскостью, проходящей через точку $B$ перпендикулярно к прямой $AK$, где точка $K$ — середина ребра $C_1D_1$.

5 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник $ABC$ с гипотенузой $AC$. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра $AA_1$ и прямую $BC$, если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.

6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми $AB_1$ и $BC_1$.

7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми $AB$ и $A_1C$.

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла между плоскостями $ABC$ и $CA_1B_1$.

9 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1BC$ и плоскостью основания призмы.

10 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24, точка $P$ — середина ребра $BB_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и $ACP$.

11 Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью $AA_1D_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра $CD$ перпендикулярно прямой $B_1D$, если расстояние между прямыми $A_1C_1$ и $BD$ равно $\sqrt{3}$.

12 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите тангенс угла между плоскостями $ABC$ и $DB_1F_1$.

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки $A$ до плоскости $DEA_1$.

14 В правильном тетраэдре $ABCD$ точка $E$ — середина ребра $BD$. Найдите синус угла между прямой $AE$ и плоскостью $ABC$.

15 Высота правильной треугольной пирамиды равна 20, а медиана её основания равна 6. Найдите тангенс угла, который боковое ребро образует с плоскостью основания.

16 Основание пирамиды $DABC$ — равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро $DB$ перпендикулярно к плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла $DACB$.

17 Ребро $AD$ пирамиды $DABC$ перпендикулярно к плоскости $ABC$. Найдите расстояние от вершины $A$ до плоскости, проходящей через середины рёбер $AB$, $AC$ и $AD$, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

18 В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми $DA$ и $BC$.

19 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Найдите косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $SAD$.

20 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямыми $SB$ и $AE$.

21 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите косинус угла между прямой $AC$ и плоскостью $SAF$.

22 Диаметр основания цилиндра равен 20, а образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

## 16

1 В прямоугольном треугольнике $ABC$ гипотенуза $AB$ равна $c$ и $\angle ABC = \alpha$. Найдите все медианы этого треугольника.

2 В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ на стороне $BC$ взята точка $D$ так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая $AD$ делит высоту $BE$ треугольника $ABC$, считая от вершины $B$?

3 В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису, проведённую к боковой стороне треугольника.

4 Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60°. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

5 Высоты треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол $ACB$.

6 В треугольнике $ABC$ проведены высоты $BM$ и $CN$, точка $O$ — центр вписанной в треугольник окружности. Известно, что $BC = 24$, $MN = 12$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $BOC$.

7 Точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — основания высот треугольника $ABC$. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника $ABC$.

**8** Углы $A$ и $C$ треугольника $ABC$ равны $45°$ и $60°$. Отрезки $AM$, $BN$ и $CK$ — высоты треугольника. Найдите отношение $\frac{MN}{KN}$.

**9** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $BM$. Известно, что $\frac{\sin \angle ABM}{\sin \angle CBM} = \frac{1}{2}$. Найдите отношение $\frac{BC}{AB}$.

**10** Точки $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$. Отрезки $AM$ и $BN$ пересекаются в точке $O$. Найдите отношение $\frac{MO}{OA}$.

**11** Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны $40°$ и $50°$. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

**12** Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол в $60°$ с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

**13** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как $1:3$. Чему равна меньшая диагональ четырёхугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$?

**14** Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция с основаниями $AD$ и $BC$. Найдите $AC$, если $AB = 27$, $CD = 28$, $BC = 5$ и $\cos \angle BCD = -\frac{2}{7}$.

**15** Окружность с центром $O$ касается двух параллельных прямых. Касательная к окружности пересекает эти прямые в точках $A$ и $B$. Найдите угол $AOB$.

**16** Через точку $M$, лежащую вне окружности с центром $O$ и радиусом $R$, проведены касательные $MA$ и $MB$ к этой окружности ($A$ и $B$ — точки касания). Прямые $OA$ и $MB$ пересекаются в точке $C$. Найдите $OC$, если известно, что отрезок $OM$ делится окружностью пополам.

**17** Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

**18** Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга извне. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы двух других равны 6 и 4.

**19** В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности и гипотенузы делит гипотенузу на отрезки, равные 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

**20** Окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$ и $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

**21** Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке $B$. Через точку $B$ проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке $A$, а большую — в точке $C$ ($A$ и $C$ отличны от $B$). Найдите отрезок $BC$, если $AC = 3\sqrt{2}$.

**22** Окружности $S_1$ и $S_2$ радиусов $R$ и $r$ соответственно ($R > r$) касаются в точке $A$. Через точку $B$, лежащую на окружности $S_1$, проведена прямая, касающаяся окружности $S_2$ в точке $M$. Найдите отрезок $BM$, если известно, что $AB = a$.

**23** Точка $O$ — центр окружности радиуса 2. На продолжении радиуса $OM$ за точку $M$ взята точка $A$. Через точку $A$ проведена прямая, касающаяся окружности в точке $K$. Известно, что $\angle AOK = 60°$ Найдите радиус окружности, вписанной в угол $OAK$ и касающейся данной окружности извне.

**24** Прямая касается окружностей радиусов $R$ и $r$ в точках $A$ и $B$. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно $a$, причём $r < R$ и $r + R < a$. Найдите $AB$.

**25** Около треугольника $ABC$ описана окружность с центром $O$, угол $AOC$ равен $60°$. В треугольник $ABC$ вписана окружность с центром $M$. Найдите угол $AMC$.

**26** Треугольник $ABC$ вписан в окружность радиуса 12, $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите $AC$.

**27** На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Найдите их общую хорду, если катеты равны 3 и 4.

**28** Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 13, 13 и 24 и расстояние между центрами этих окружностей.

**29** Окружность $S_1$ проходит через центр окружности $S_2$ и пересекает её в точках $A$ и $B$. Хорда $AC$ окружности $S_1$ касается окружности $S_2$ в точке $A$ и делит первую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $5:7$. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность $S_2$ делится окружностью $S_1$.

**30** На стороне $BA$ угла $ABC$, равного $30°$, взята такая точка $D$, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки $A$, $D$ и касающейся прямой $BC$.

**31** В прямоугольном треугольнике $ABC$ катеты $AB$ и $AC$ равны 4 и 3, точка $D$ — середина гипотенузы $BC$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ADC$ и $ABD$.

**32** Окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ касаются друг друга извне в точке $C$. Прямая касается этих окружностей в точках $A$ и $B$, отличных от точки $C$. Найдите угол $AO_2B$, если $\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{1}{2}$.

**33** Окружности радиусов 4 и 9 касаются друг друга извне, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Найдите радиус окружности, касающейся двух данных окружностей и данной прямой.

**34** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$ так, что $\angle BCD = \angle BAC$. Найдите $CD$, если $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

**35** На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ отмечены точки $K$, $L$ и $M$ так, что $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$ и $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении точка пересечения отрезков $KL$ и $BM$ делит отрезок $BM$?

**36** Сторона треугольника равна 36. Прямая, параллельная этой стороне, разделяет треугольник на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

**37** Отрезки, соединяющие середины сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

**38** В треугольнике $ABC$ медиана $AD$ и биссектриса $BE$ перпендикулярны и пересекаются в точке $F$. Площадь треугольника $DEF$ равна 5. Найдите площадь треугольника $ABC$.

**39** Основания трапеции равны $a$ и $b$. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как $2 : 3$. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.

**40** Окружность, построенная на стороне $AC$ треугольника $ABC$ как на диаметре, проходит через середину стороны $BC$ и пересекает в точке $D$ продолжение стороны $AB$ за точку $A$, причём $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AC = 1$.

**41** Найдите площадь трапеции с основаниями, равными 18 и 13, и боковыми сторонами, равными 3 и 4.

**42** На продолжении за точку $B$ диаметра $AB$ окружности отложен отрезок $BC$, равный диаметру. Прямая, проходящая через точку $C$, касается окружности в точке $M$. Найдите площадь треугольника $ACM$, если радиус окружности равен $R$.

**43** Медиана $AM$ и биссектриса $CD$ треугольника $ABC$ с прямым углом $B$ пересекаются в точке $O$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $CO = 9$ и $OD = 5$.

## Задачи с практическим содержанием

**1** Можно ли из прямолинейных реек изготовить звезду, изображённую на рисунке 239?

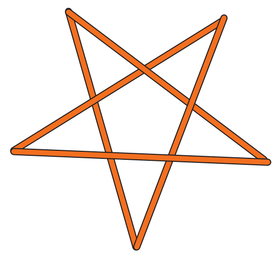


Рис. 239

**2** Ученик изобразил тетраэдр, в котором проведено сечение (рис. 240). Правилен ли его чертёж?

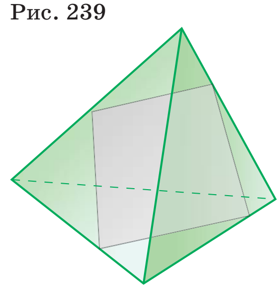


Рис. 240

**3** Как с помощью линейки измерить диагональ кирпича, если есть несколько одинаковых кирпичей? (Требуется непосредственно измерить диагональ, а не вычислить её, измерив длину, ширину и высоту.)

**4** Можно ли куб с ребром 10 см завернуть в квадратный платок со стороной 30 см?

**5** По четырём дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, с постоянными скоростями идут 4 пешехода. Известно, что первый пешеход встретился со вторым, третьим и четвёртым, а второй — с третьим и четвёртым. Докажите, что третий пешеход встретился с четвёртым.

**6** Три свинцовых куба, рёбра которых равны 3 см, 4 см и 5 см, расплавили и изготовили из них один куб. Найдите его ребро.

**7** Кирпич размером 25 см $\times$ 12 см $\times$ 6,5 см весит 3,51 кг. Найдите его плотность в граммах на кубический сантиметр.

**8** Сечение железнодорожной насыпи, перпендикулярное к рельсам, имеет вид трапеции с нижним основанием 12 м, верхним основанием 6 м и высотой 2 м. Найдите объём 10-метрового участка насыпи.

**9** Сечение реки, перпендикулярное к течению реки, представляет собой трапецию с основаниями 20 м и 16 м и высотой 2 м. Скорость течения воды в реке 2 м/с. Сколько кубических метров воды проходит через это сечение за 1 мин?

**10** Почему (при одинаковой глубине) в узких местах русла реки её течение быстрее, чем в широких? А что будет, если ширина одинаковая, а глубина разная?

11 Сделайте рисунок пробки, которой можно заткнуть отверстия трёх видов: треугольное, квадратное и круглое.

12 Из одного цилиндрического сосуда диаметром 15 см жидкость перелита в другой цилиндрический сосуд диаметром 5 см. Во сколько раз уровень жидкости в узком сосуде выше, чем в широком?

13 Найдите диаметр медной проволоки, 100 м которой весят 700 г (плотность меди 8,9 г/см$^3$).

14 Найдите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) круглой водосточной трубы диаметром 10 см, если скорость течения воды равна 2 м/с.

15 В бочку, имеющую цилиндрическую форму, налита вода. Как можно выяснить (не выливая из бочки воды и не производя вычислений), наполнена бочка больше или меньше чем наполовину?

16 Куча песка имеет форму конуса, у которого длина окружности основания равна 31,4 м, а образующая равна 5,4 м. Сколько трёхтонных машин потребуется для перевозки этого песка, если 1 м$^3$ песка весит 2 т?

17 Сколько весит сено, сложенное в стог в форме цилиндра с коническим верхом, если радиус и высота цилиндрической части стога равны соответственно 3 м и 2 м, а высота конической части равна 2 м (плотность сена 0,07 г/см$^3$)?

18 Ведро имеет форму усечённого конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких вёдер, если на 1 м$^2$ требуется 150 г краски? (Толщину стенок ведра не учитывать.)

19 Во сколько раз объём Земли больше объёма Луны? (Диаметр Земли считать равным 12 740 км, а диаметр Луны — 3474 км.)

20 Восемь свинцовых шаров радиуса 1 см расплавили и изготовили из них один шар. Найдите его радиус.

21 Человек прошёл километр на север, затем километр на запад и километр на юг. Мог ли он при этом вернуться в исходное положение?

22 При каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной ёмкости будет наименьшим? Другими словами, найдите размеры цилиндра данного объёма $V$, площадь поверхности которого наименьшая.

23 Почему, когда мы смотрим в зеркало, правое и левое меняются местами, а верх и низ нет? А что произойдёт, если мы встанем на зеркальный пол?

24 Вырежите из прямоугольного листа бумаги фигуру, изображённую на рисунке 241. (Клеем не пользоваться.)

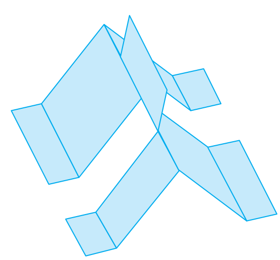


Рис. 241

## Исследовательские задачи

**1** Тетраэдр называется **ортоцентрическим**, если его высоты пересекаются в одной точке (ортоцентр тетраэдра).

Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны;

б) основанием одной из высот тетраэдра является ортоцентр грани (при этом таким же свойством обладают и три другие высоты тетраэдра);

в) три **бимедианы**[1] тетраэдра равны друг другу;

г) суммы квадратов противоположных рёбер тетраэдра равны;

д) произведения косинусов противоположных двугранных углов тетраэдра равны.

**2** Тетраэдр называется **равногранным**, если все его грани равны друг другу.

Докажите, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) противоположные рёбра тетраэдра равны;

б) сумма плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна $180°$;

в) бимедианы тетраэдра попарно перпендикулярны;

г) бимедианы тетраэдра являются общими перпендикулярами прямых, содержащих противоположные рёбра тетраэдра;

д) центры вписанной и описанной сфер тетраэдра совпадают;

е) центр описанной сферы и центр масс (т. е. точка пересечения медиан) тетраэдра совпадают;

ж) центр вписанной сферы и центр масс тетраэдра совпадают;

з) четыре медианы тетраэдра равны друг другу;

и) четыре высоты тетраэдра равны друг другу;

к) грани тетраэдра равновелики.

---

[1] Отрезок, соединяющий середины двух противоположных (скрещивающихся) рёбер тетраэдра, называется его бимедианой.

**3** Тетраэдр называется **каркасным**, если существует сфера, касающаяся всех рёбер тетраэдра.

Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:

а) суммы длин противоположных рёбер тетраэдра равны;

б) суммы двугранных углов при противоположных рёбрах тетраэдра равны;

в) окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются друг друга (это означает, что каждые две окружности, вписанные в грани тетраэдра с общим ребром, касаются этого ребра в одной и той же точке);

г) все четырёхугольники, получающиеся на развёртке тетраэдра, являются описанными;

д) четыре прямые, каждая из которых проходит через центр вписанной в грань тетраэдра окружности и перпендикулярна к этой грани, пересекаются в одной точке.

**4** Найдите число попарно неравных друг другу равносторонних треугольников, все вершины которых принадлежат окружностям оснований цилиндра радиуса $R$ с высотой $h$.

**5** Исследуйте, сколько различных точек может быть среди тех 12 точек, через которые проходит сфера Эйлера.

## Темы рефератов и докладов

1. Об аксиомах геометрии.
2. Ортоцентрический тетраэдр и его свойства.
3. Равногранный тетраэдр и его свойства.
4. Каркасный тетраэдр и его свойства.
5. Теоремы синусов и косинусов для трёхгранного угла.
6. Правильные многогранники и элементы их симметрии.
7. Полуправильные многогранники.
8. Метод проекций в задачах на сечения многогранников.
9. Сечения цилиндрической и конической поверхностей (эллипс, гипербола, парабола).
10. Прямая и сфера Эйлера.
11. Применение геометрических преобразований при решении задач.
12. Сферическая геометрия.

## Список литературы


1. А д а м а р Ж. Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 2. Стереометрия / Ж. Адамар. — Учпедгиз, 1952.
2. А л е к с а н д р о в П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 4. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Физматгиз, 1963.
3. А л е к с а н д р о в П. С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 кн. Кн. 5. Геометрия / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — М.: Наука, 1966.
4. Геометрия. 7—9 классы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. — М.: Просвещение, 2013—2016.
5. Б у т у з о в В. Ф. Геометрия. 10—11 классы / В. Ф. Бутузов, В. В. Прасолов. — М.: Просвещение, 2014—2016.
6. Г е л ь ф а н д И. М. Метод координат / И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. — М.: МЦНМО, 2009.
7. К л е й н Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. Т. 2. Геометрия / Ф. Клейн. — М.: Наука, 1987.
8. К о к с е т е р Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Коксетер. — М.: Наука, 1966.
9. П р а с о л о в В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2010.
10. П р а с о л о в В. В. Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1989.
11. Ш а р ы г и н И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. — М.: Астрель, АСТ, 2001.


### Интернет-ресурсы


1. http://ilib.mccme.ru/
2. http://window.edu.ru/library
3. http://www.problems.ru/
4. http://kvant.mccme.ru/
5. http://www.etudes.ru/


### Интернет-ресурсы на английском языке


1. http://mathworld.wolfram.com/
2. http://forumgeom.fau.edu/

# Приложения

## 1 Изображение пространственных фигур

При изучении стереометрии важное значение имеет изображение пространственных фигур на чертеже. Мы познакомимся здесь с некоторыми правилами построения изображений. С этой целью введём сначала понятие параллельной проекции фигуры, а затем с его помощью понятие изображения фигуры и рассмотрим примеры изображений плоских и пространственных фигур.

### 1 Параллельная проекция фигуры

Пусть $\pi$ — некоторая плоскость, а $l$ — пересекающая эту плоскость прямая. Отметим произвольную точку $A_0$ пространства. Если точка $A_0$ не лежит на прямой $l$, то проведём через $A_0$ прямую, параллельную прямой $l$, и обозначим через $A$ точку пересечения этой прямой с плоскостью $\pi$ (рис. 242). Если же $A_0$ — точка прямой $l$, то обозначим через $A$ точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $\pi$. **Точка $A$ называется проекцией точки $A_0$ на плоскость $\pi$ при проектировании параллельно прямой $l$.** Обычно предполагается, что плоскость $\pi$ и прямая $l$ заданы, поэтому точку $A$ кратко называют **параллельной проекцией точки** $A_0$.

Пусть $F_0$ — плоская или пространственная фигура. Параллельные проекции всех точек фигуры $F_0$ образуют некоторую фигуру $F$ на плоскости $\pi$ (см. рис. 242). Фигура $F$ называется **параллельной проекцией фигуры** $F_0$. Говорят также, что фигура $F$ получена из фигуры $F_0$ **параллельным проектированием.**

Сформулируем основные свойства параллельного проектирования при условии, что проектируемые отрезки и прямые не параллельны прямой $l$.

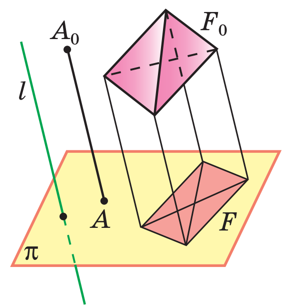
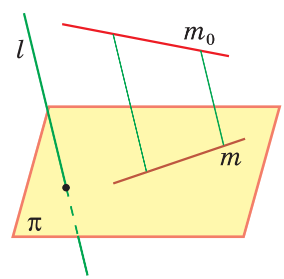
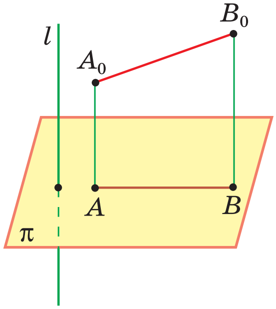


Рис. 242



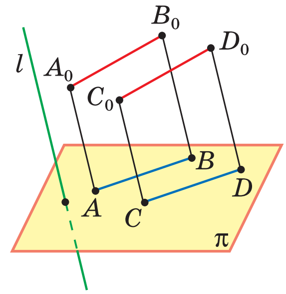
Проекция прямой $m_0$ есть прямая $m$

Рис. 243



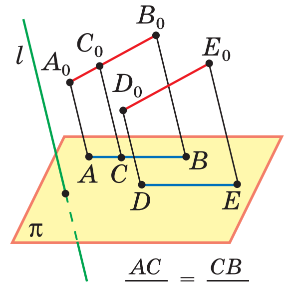

Проекция отрезка $A_0B_0$ есть отрезок $AB$

Рис. 244




Проекции параллельных отрезков $A_0B_0$ и $C_0D_0$ есть параллельные отрезки $AB$ и $CB$

Рис. 245




$$\frac{AC}{A_0C_0} = \frac{CB}{C_0B_0}$$

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{DE}{D_0E_0}$$

Рис. 246

**$1^0$. Проекция прямой есть прямая** (рис. 243).

**$2^0$. Проекция отрезка есть отрезок** (рис. 244).

**$3^0$. Проекции параллельных отрезков — параллельные отрезки** (рис. 245) **или отрезки, принадлежащие одной прямой.**

**$4^0$. Проекции параллельных отрезков, а также проекции отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам** (рис. 246).

Из свойства $4^0$ следует, что **проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.**

## 2 Изображение фигуры

Выберем некоторую плоскость $\pi$ и назовём её **плоскостью изображений.** Затем возьмём прямую $l$, пересекающую плоскость $\pi$, и спроектируем данную фигуру $F_0$ на плоскость $\pi$ параллельно прямой $l$. Полученную плоскую фигуру $F'$ и также любую ей подобную фигуру $F$ на плоскости $\pi$ будем называть **изображением фигуры** $F_0$ (рис. 247). Построенное таким образом изображение фигуры соответствует зрительному восприятию фигуры при рассмотрении её из точки, расположенной далеко от неё.

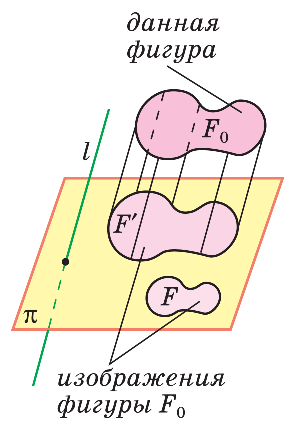



Рис. 247

Выбирая различные плоскости изображений и различные направления проектирования (т. е. различные прямые $l$), будем получать различные изображения данной фигуры. Обычно берётся такое изображение фигуры, которое является наиболее наглядным и удобным для выполнения на нём дополнительных построений. Это изображение и воспроизводится на чертеже.

## 3 Изображение плоских фигур

Построение изображений фигур основано на свойствах параллельного проектирования, сформулированных в п. 1. Рассмотрим некоторые примеры изображений плоских фигур.

**Отрезок**

По свойству $2^0$ проекция отрезка есть отрезок, поэтому изображением отрезка является отрезок. Ясно, что **произвольный отрезок на чертеже можно считать изображением данного отрезка**.

При рассмотрении изображений треугольника, параллелограмма и т. д. будем считать, что плоскости этих фигур не параллельны направлению проектирования (прямой $l$).

**Треугольник**

Пусть $A_0B_0C_0$ — треугольник, расположенный в пространстве, $A'$, $B'$ и $C'$ — проекции точек $A_0$, $B_0$ и $C_0$ на плоскость $\pi$ (рис. 248, *а*). Так как проекция отрезка есть отрезок, то треугольник $A'B'C'$ (а также любой треугольник $ABC$, подобный треугольнику $A'B'C'$) является изображением треугольника $A_0B_0C_0$. Можно доказать, что **в качестве изображения данного треугольника на чертеже можно брать произвольный треугольник.** Например, на рисунке 248, *б* изображением прямоугольного равнобедренного треугольника $A_0B_0C_0$ служит разносторонний треугольник $ABC$.

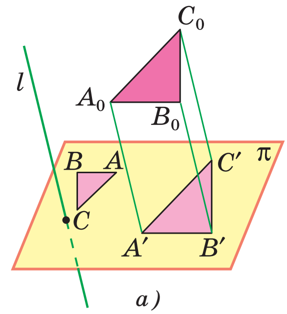
**Параллелограмм**

Так как проекциями равных параллельных отрезков являются равные параллельные отрезки (свойства $3^0$ и $4^0$ п. 1), то изображением параллелограмма является параллелограмм. Можно доказать, что произвольный параллелограмм на чертеже можно считать изображением данного параллелограмма, в частности изображением данного прямоугольника, ромба, квадрата (рис. 249).

**Трапеция**

Нетрудно видеть, что изображением трапеции $A_0B_0C_0D_0$ с основаниями $A_0B_0$ и $C_0D_0$ является трапеция $ABCD$, причём по свойству $4^0$ п. 1

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{CD}{C_0D_0}, \qquad (1)$$



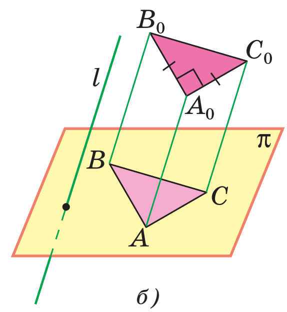
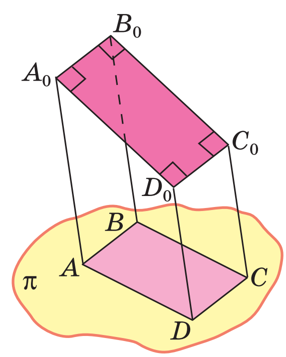




Рис. 248




$A_0B_0C_0D_0$ — прямоугольник. $ABCD$ — параллелограмм

Рис. 249

т. е. основания изображения трапеции пропорциональны основаниям самой трапеции. Поэтому не любую трапецию можно считать изображением данной трапеции. Укажем способ построения изображения данной трапеции $A_0B_0C_0D_0$. С этой целью рассмотрим вспомогательный отрезок $C_0E_0$, параллельный отрезку $A_0D_0$ и разбивающий трапецию на параллелограмм $A_0D_0C_0E_0$ и треугольник $B_0C_0E_0$ (рис. 250, *а*). В качестве изображения параллелограмма $A_0D_0C_0E_0$ возьмём произвольный параллелограмм $ADCE$ (рис. 250, *б*). Так как $AE = DC$, то пропорцию (1) можно записать так:

$$\frac{AB}{A_0B_0} = \frac{AE}{C_0D_0}. \qquad (2)$$

Используя пропорцию (2), нетрудно построить теперь точку $B$ — изображение точки $B_0$. Это построение выполнено на рисунке 250, *б*, где $AA_2 = C_0D_0$, $AA_1 = A_0B_0$. Построенная трапеция $ABCD$ является изображением трапеции $A_0B_0C_0D_0$ (для неё выполнена пропорция (1)).

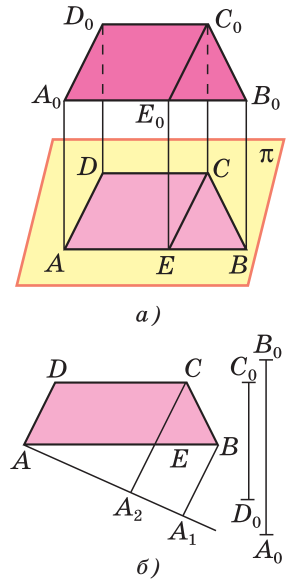



Рис. 250

Отметим, что изображением равнобедренной трапеции $A_0B_0C_0D_0$ может быть и неравнобедренная трапеция $ABCD$. При этом изображением оси симметрии равнобедренной трапеции является прямая $EF$, проходящая через середины оснований $AD$ и $BC$, и, следовательно, отрезок $EF$ является изображением высоты равнобедренной трапеции (рис. 251).

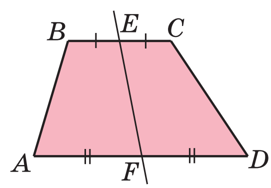



Рис. 251

**Окружность**

Как следует из п. 50, параллельной проекцией окружности является **эллипс** (рис. 252). Окружность — частный случай эллипса, поскольку её проекция на плоскость, параллельную плоскости окружности, есть окружность, равная данной (объясните почему). Из свойств параллельного проектирования следует, что проекция центра $O$ данной окружности является центром симметрии эллипса (точка $O'$ на рисунке 252). Эту точку называют **центром эллипса**.

Таким образом, изображением окружности является эллипс, причём изображением центра окружности является центр эллипса.

Эллипс используется при изображении на плоскости цилиндров, конусов, усечённых конусов и сфер (см. главы IV и V). Понятие эллипса часто встречается и в различных вопро-

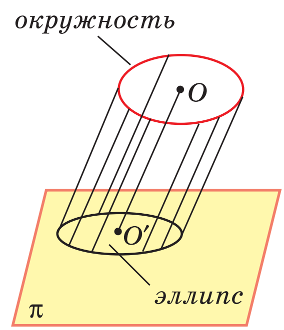



Рис. 252

сах естествознания. Например, движение планет вокруг Солнца происходит по орбитам, близким к эллипсам.

## 4 Изображение пространственных фигур

Рассмотрим теперь изображения на плоскости некоторых многогранников при условии, что ни одна из плоскостей граней не параллельна направлению проектирования. При этом под изображением многогранника будем понимать фигуру, состоящую из проекций всех его рёбер.

**Тетраэдр**

Пусть $A_0B_0C_0D_0$ — произвольный тетраэдр, $A$, $B$, $C$ и $D$ — параллельные проекции его вершин на плоскость изображений (рис. 253). Отрезки $AB$, $BC$, $CA$, $AD$, $BD$, $CD$ служат сторонами и диагоналями четырёхугольника $ABCD$. Фигура, образованная из этих отрезков (или любая другая фигура, подобная ей), является изображением тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$.

Можно доказать, что фигура, состоящая из сторон и диагоналей любого (выпуклого или невыпуклого) четырёхугольника, является изображением тетраэдра при соответствующем выборе плоскости изображений и направления проектирования (рис. 254, *а*, *б*, *в*). (На этих рисунках невидимые рёбра изображены штриховыми линиями.)

**Параллелепипед**

Для построения изображения произвольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ заметим, что точки $A_0$, $B_0$, $D_0$ и $A_0'$ являются вершинами тетраэдра $A_0B_0D_0A_0'$ (рис. 255). Поэтому в качестве их изображения можно взять вершины произвольного четырёхугольника $ABDA'$. Другими словами, любые три отрезка $AB$, $AD$ и $AA'$ плоскости изображения с общим концом $A$, никакие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением рёбер $A_0B_0$, $A_0D_0$ и $A_0A_0'$ параллелепипеда. Но тогда изображения остальных рёбер строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами, и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами. На рисунке 255 параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ является изображением параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$.

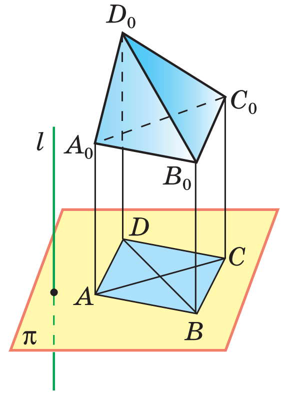
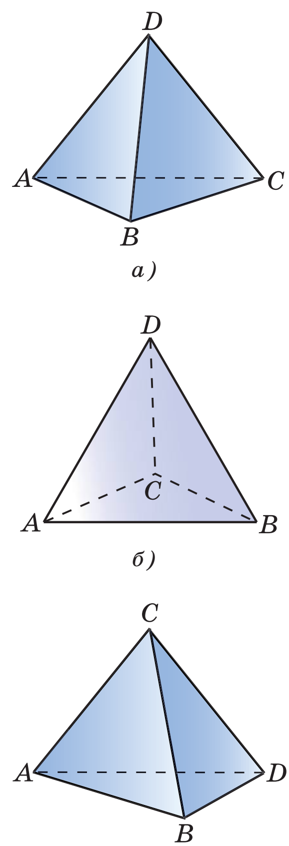



Рис. 253




*а)* *б)* *в)*

Рис. 254

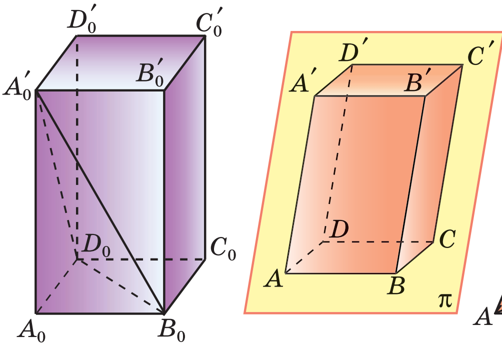



Рис. 255

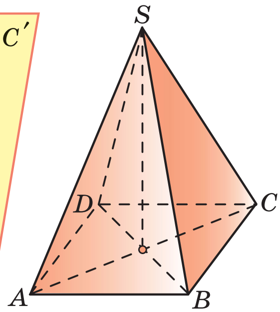



Рис. 256

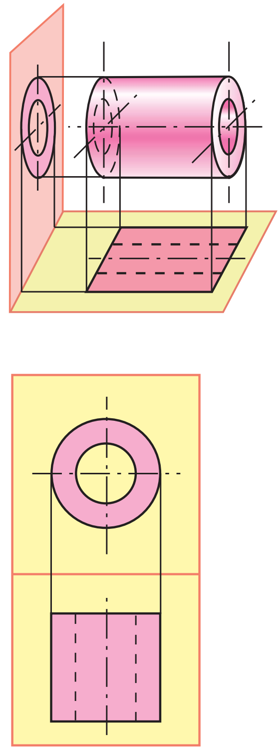


Рис. 257

**Пирамида**

Изображение основания пирамиды строят по описанным в п. 3 правилам, а за изображение вершины можно принять любую точку, не принадлежащую сторонам изображения основания. На рисунке 256 дано изображение правильной пирамиды $S_0A_0B_0C_0D_0$, основанием которой служит квадрат $A_0B_0C_0D_0$. Изображением основания является параллелограмм $ABCD$.

**Замечание**

Частным случаем параллельной проекции фигуры является **прямоугольная проекция** (см. п. 21). Прямоугольные проекции широко используются в техническом черчении. Какая-либо деталь обычно проектируется на две плоскости — горизонтальную и вертикальную, и обе проекции изображаются в плоскости чертежа. На рисунке 257 изображены две проекции цилиндрической втулки.

## 2 Об аксиомах геометрии

Аксиомы геометрии представляют собой исходные положения, на основе которых строится вся геометрия, т. е. путём логических рассуждений устанавливаются свойства геометрических фигур. В аксиомах выражены свойства **основных геометрических понятий**. К таковым в нашем курсе относятся понятия **точки**, **прямой** и **плоскости**, понятие **«лежать между»** для точек прямой и понятие **наложения**. Кроме того, в аксиомах геометрии и вытекающих из них утверждениях используются такие общематематические понятия, как «принадлежать» (или «лежать на»), «множество», «число» и т. д.

Здесь мы приведём все аксиомы геометрии, включая и те три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей, которые были сформулированы во введении, а также дадим доказательства на основе аксиом некоторых наглядно очевидных утверждений, которые использовались в курсе стереометрии.

Первая группа аксиом характеризует взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

**1. На каждой прямой и в каждой плоскости имеются по крайней мере две точки.**
**2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, и по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.**
**3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.**
**4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.**
**5. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.**
**6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.**
**7. Из трёх точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.**

Иногда вместо слов «точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$» говорят, что точки $A$ и $C$ лежат по разные стороны от точки $B$, или точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от точки $C$ (аналогично точки $B$ и $C$ лежат по одну сторону от точки $A$).

**8. Каждая точка $O$ прямой разделяет её на две части — два луча — так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки $O$, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки $O$. При этом точка $O$ не принадлежит ни одному из указанных лучей.**

Напомним, что отрезком $AB$ называется геометрическая фигура, состоящая из точек $A$ и $B$ и всех точек прямой $AB$, лежащих между ними. Если отрезок $AB$ и прямая $a$ лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то говорят, что точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $a$; если же отрезок $AB$ пересекается с прямой $a$ в некоторой точке, лежащей между $A$ и $B$, то говорят, что точки $A$ и $B$ лежат по разные стороны от прямой $a$.

**9. Каждая прямая $a$, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой $a$, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой $a$. При этом точки прямой $a$ не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.**

Прямая $a$ называется **границей** каждой из полуплоскостей.

Если отрезок не имеет общих точек с данной плоскостью, то говорят, что концы отрезка лежат по одну сторону от плоскости; если же отрезок пересекается с плоскостью в некоторой своей внутренней точке, то говорят, что концы отрезка лежат по разные стороны от плоскости.

**10. Каждая плоскость $\alpha$ разделяет пространство на две части (два полупространства) так, что любые две точки одного и того же полупространства лежат по одну сторону от плоскости $\alpha$, а любые две точки разных полупространств лежат по разные стороны от плоскости $\alpha$. При этом точки плоскости $\alpha$ не принадлежат ни одному из указанных полупространств.**

Плоскость $\alpha$ называется **границей** каждого из полупространств.

Следующая группа аксиом относится к понятиям наложения и равенства фигур.

Под наложением мы понимаем отображение пространства на себя. Однако не всякое отображение пространства на себя называется наложением.

**Наложения** — это такие отображения пространства на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах 11—17. В формулировках этих аксиом используется понятие равенства фигур, которое определяется так: пусть $\Phi$ и $\Phi_1$ — две фигуры; **если существует наложение,**

**при котором фигура Ф отображается на фигуру $Ф_1$, то мы говорим, что фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$ или что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$.**

**11. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.**

**12. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.**

**13. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.**

**14. Два равных угла $hk$ и $h_1k_1$, лежащие в плоскостях, являющихся границами полупространств $P$ и $P_1$, можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства $P$ и $P_1$, причём это можно сделать двумя способами: в одном случае совместятся лучи $h$ и $h_1$, $k$ и $k_1$, а в другом — лучи $h$ и $k_1$, $k$ и $h_1$.**

**15. Любая фигура равна самой себе.**

**16. Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.**

**17. Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.**

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть $AB$ — измеряемый отрезок, $PQ$ — выбранная единица измерения отрезков. На луче $AB$ отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче $A_1B$ — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка $A_n$ не совпадёт с точкой $B$ либо точка $B$ не окажется лежащей между $A_n$ и $A_{n+1}$. В первом случае говорят, что длина отрезка $AB$ при единице измерения $PQ$ выражается числом $n$ (или что отрезок $PQ$ укладывается в отрезке $AB$ $n$ раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка $AB$ при единице измерения $PQ$ приближённо выражается числом $n$. Для более точного измерения отрезок $PQ$ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток $A_nB$. Если при этом десятая часть отрезка $PQ$ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то её также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы утверждаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

**18. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.**

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

**19. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.**

И наконец, последняя аксиома в стереометрии, как и в планиметрии, есть аксиома параллельных прямых.

**20. В любой плоскости через точку, не лежащую на данной прямой этой плоскости, проходит только одна прямая, параллельная данной.**

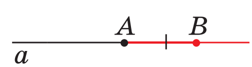
В 9 классе (Геометрия, 7—9, приложение 1) мы уже говорили о том, что, опираясь на аксиомы, можно решать задачи и доказывать теоремы без привлечения каких-либо интуитивных представлений о свойствах геометрических фигур. В качестве примера приводилось доказательство теоремы, выражающей первый признак равенства треугольников, основанное на аксиомах. Приведём ещё несколько примеров.

**Задача 1**

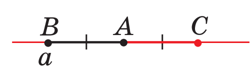
Доказать, что на каждом луче есть хотя бы одна точка.

**Решение**

Рассмотрим луч с началом $A$, являющийся частью прямой $a$. На прямой $a$ есть хотя бы одна точка $B$, отличная от точки $A$ (аксиома 1). Если точка $B$ лежит на луче (рис. 258, *а*), то она и является той точкой, существование которой мы доказываем. Если же точка $B$ лежит на продолжении луча (рис. 258, *б*), то поступим так: на луче от его начала отложим отрезок $AC = AB$ (аксиома 12). Тогда точка $C$ будет лежать на луче. Утверждение доказано.




*а)*




*б)*

Рис. 258

**Задача 2**

Доказать, что если точка $A$ лежит на прямой $a$, а точка $B$ не лежит на этой прямой, то все точки луча $AB$ лежат в одной полуплоскости с границей $a$.

**Решение**

Пусть $C$ — произвольная точка луча $AB$, отличная от $B$ (а есть ли такая точка? Ответ на этот вопрос найдите самостоятельно). Докажем, что точка $C$ лежит в той же полуплоскости с границей $a$, что и точка $B$. Поскольку точки $B$ и $C$ лежат по одну сторону от точки $A$, то по аксиоме 7 точка $A$ не лежит на отрезке $BC$. Поэтому если предположить, что точки $B$ и $C$ лежат в разных полуплоскостях с границей $a$, то получится, что прямая $a$ пересекает отрезок $BC$ в точке $D$, отличной от $A$. Иными словами, окажется, что через точки $A$ и $D$ проходят две прямые: $a$ и $AB$. Но это противоречит аксиоме 3. Следовательно, наше предположение ошибочно — точки $B$ и $C$ лежат в одной полуплоскости с границей $a$, что и требовалось доказать.

При изучении геометрии мы неоднократно использовали понятие внутренней области неразвёрнутого угла, опираясь при этом на наглядные представления об углах. Приведём теперь определение этого понятия.

**Внутренней областью неразвёрнутого угла $AOB$ называется общая часть двух полуплоскостей: полуплоскости с границей $OA$, содержащей точку $B$, и полуплоскости с границей $OB$, содержащей точку $A$.**

**Задача 3**

Доказать, что если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит через точку внутренней области этого угла, то все точки луча лежат во внутренней области угла.

**Решение**

Рассмотрим угол $AOB$ и луч $OC$, проходящий через точку $C$ внутренней области этого угла (рис. 259). Поскольку точка $C$ принадлежит полуплоскости с границей $OA$, содержащей точку $B$, то все точки луча $OC$ также принадлежат этой полуплоскости (см. задачу 2). По аналогичной причине все точки луча $OC$ принадлежат полуплоскости с границей $OB$, содержащей точку $A$.

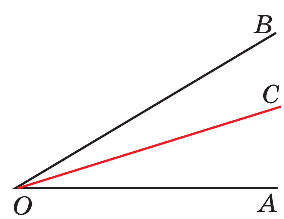


Рис. 259

Следовательно, все точки луча $OC$ принадлежат общей части указанных полуплоскостей, т. е. внутренней области угла $AOB$. Утверждение доказано.

**Задача 4**

Доказать, что если прямая пересекает сторону $AB$ треугольника $ABC$ и не проходит через вершину этого треугольника, то она пересекает либо сторону $BC$, либо сторону $AC$.

**Решение**

Данная прямая разделяет плоскость на две полуплоскости (аксиома 9), причём точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях. Поэтому если точка $C$ лежит в одной полуплоскости с точкой $A$, то точки $B$ и $C$ лежат в разных полуплоскостях, а значит, данная прямая пересекает отрезок $BC$. Если же точка $C$ лежит в одной полуплоскости с точкой $B$, то точки $A$ и $C$ лежат в разных полуплоскостях, а значит, данная прямая пересекает отрезок $AC$. Утверждение доказано.

**Задача 5**

Доказать, что если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит через точку внутренней области этого угла, то он делит этот угол на два угла.

**Решение**

Рассмотрим угол $AOB$, через точку $C$ внутренней области которого проведён луч $OC$ (рис. 260). Требуется доказать, что внутренние области углов $AOC$ и $BOC$ лежат по разные стороны от прямой $OC$.

Пусть $D$ — произвольная точка луча с началом $O$, являющегося продолжением луча $OA$. Точки $A$, $B$ и $D$ не лежат на прямой $OC$, и эта прямая пересекает сторону $AD$ треугольника $ABD$. Следовательно, она пересекает либо сторону $AB$, либо сторону $BD$ (см. задачу 4). Но точка $D$ не лежит во внутренней области угла $AOB$ — она лежит в полуплоскости с границей $OB$, не содержащей точку $A$. Поэтому все точки луча $BD$ не принадлежат внутренней области угла $AOB$ (см. задачу 2), а значит, луч $OC$ не может пересечь сторону $BD$ — все точки этого луча принадлежат внутренней области угла $AOB$ (см. задачу 3). Следовательно, он пересекает сторону $AB$. Это означает, что точки $A$ и $B$, а значит, и лучи $OA$ и $OB$ (см. задачу 2), лежат по разные стороны от прямой $OC$.

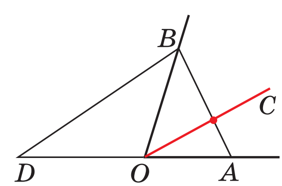



Рис. 260

Но тогда и внутренние области углов $AOC$ и $BOC$ лежат по разные стороны от прямой $OC$. Утверждение доказано.

Как уже отмечалось во введении, из аксиом геометрии следует, что признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях. Докажем, например, теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

**Теорема**

**Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.**

**Доказательство**

Пусть треугольник $ABC$ расположен в плоскости $\alpha$, а треугольник $A_1B_1C_1$ — в плоскости $\alpha_1$ и $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, имея в виду, что под треугольником в стереометрии обычно понимают фигуру, содержащую не только три стороны, но и соответствующую внутреннюю область. Рассмотрим наложение, при котором угол $A$ совмещается с углом $A_1$ так, что луч $AB$ совмещается с лучом $A_1B_1$, а луч $AC$ — с лучом $A_1C_1$. Такое наложение существует в силу аксиомы 14. Так как по аксиоме 12 на луче $A_1B_1$ можно отложить от его начала только один отрезок, равный отрезку $AB$, то точка $B$ совместится с точкой $B_1$. Аналогично точка $C$ совместится с точкой $C_1$. Следовательно, по аксиоме 11 совместятся отрезки $AB$ и $A_1B_1$, $AC$ и $A_1C_1$, $BC$ и $B_1C_1$, т. е. совместятся стороны треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$.

Докажем теперь, что при указанном наложении внутренняя область треугольника $ABC$ совместится с внутренней областью треугольника $A_1B_1C_1$. Для этого нужно доказать, что любая точка внутренней области треугольника $ABC$ совместится с некоторой точкой внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$, и обратно: на любую точку внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$ наложится некоторая точка внутренней области треугольника $ABC$. Пусть $M$ — произвольная точка внутренней области треугольника $ABC$. Проведём через точку $M$ какой-нибудь отрезок $PQ$ с концами на сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$. Так как сторона $AB$ совмещается со стороной $A_1B_1$, то точка $P$ совместится с некоторой точкой $P_1$ на стороне $A_1B_1$. Аналогично точка $Q$ совместится с некоторой точкой $Q_1$ на стороне $A_1C_1$. Поэтому по аксиоме 11 отрезок $PQ$ совместится с отрезком $P_1Q_1$, а значит, точка $M$ отрезка $PQ$ совместится с некоторой точкой $M_1$ отрезка $P_1Q_1$, т. е. наложится на точку $M_1$ внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$. Таким же образом можно доказать и обратное: на любую точку внутренней области треугольника $A_1B_1C_1$ наложится некоторая точка внутренней области треугольника $ABC$. Итак, при указанном наложении треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, т. е. они равны. Теорема доказана.

**Задача 6**

Доказать, что если основание и высота одной прямой треугольной призмы соответственно равны основанию и высоте другой прямой треугольной призмы, то такие призмы равны.

**Решение**

Пусть прямые призмы $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ имеют равные основания $ABC$ и $A_1B_1C_1$ и равные высоты $AD$ и $A_1D_1$, причём $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Полупространство, границей которого является плоскость $ABC$, содержащее точки $D$, $E$ и $F$, обозначим буквой $H$, а полупространство, границей которого является плоскость $A_1B_1C_1$, содержащее точки $D_1$, $E_1$ и $F_1$, обозначим $H_1$.

Рассмотрим наложение, при котором угол $A$ совмещается с углом $A_1$ так, что луч $AB$ совмещается с лучом $A_1B_1$, луч $AC$ — с лучом $A_1C_1$, а полупространство $H$ совмещается с полупространством $H_1$. Такое наложение существует в силу аксиомы 14. При этом наложении треугольник $ABC$ (т. е. его стороны и внутренняя область) совместится с равным ему треугольником $A_1B_1C_1$. Далее, луч $AD$ совместится с некоторым лучом $A_1D_2$, расположенным в полупространстве $H_1$, поэтому углы $DAB$ и $DAC$ совместятся соответственно с углами $D_2A_1B_1$ и $D_2A_1C_1$. Но так как углы $DAB$ и $DAC$ прямые, то углы $D_2A_1B_1$ и $D_2A_1C_1$ также прямые, а, значит, луч $A_1D_2$ перпендикулярен к плоскости $A_1B_1C_1$ и, следовательно, совпадает с лучом $A_1D_1$. Итак, при указанном наложении луч $AD$ совместится с лучом $A_1D_1$, а так как $AD = A_1D_1$, то точка $D$ совместится с точкой $D_1$. Аналогично точки $E$ и $F$ совместятся соответственно с точками $E_1$ и $F_1$.

Следовательно, основание $DEF$ и боковые рёбра одной призмы совместятся соответственно с основанием $D_1E_1F_1$ и боковыми рёбрами другой призмы. Нетрудно доказать теперь, что при этом совместятся и соответствующие боковые грани, а также внутренние точки призмы. Это можно сделать подобно тому, как при доказательстве теоремы о первом признаке равенства треугольников было доказано совмещение внутренних областей треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Таким образом, призмы $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ полностью совместятся, т. е. они равны.

Аналогично можно доказать равенство двух прямоугольных параллелепипедов с соответственно равными измерениями и равенство двух правильных пирамид с равными основаниями и равными высотами.

В 9 классе (Геометрия, 7—9, приложение 1) мы уже говорили о том, что некоторые из принятых нами аксиом могут быть доказаны на основе остальных аксиом, т. е. фактически эти утверждения являются теоремами, а не аксиомами. Так, теоремами являются утверждения аксиом 5, 8 и 10. Убедитесь в этом самостоятельно.

Если стремиться к тому, чтобы свести количество аксиом к минимуму, то аксиому 17 следует сформулировать иначе:

**Если фигура $\Phi_1$ равна фигуре $\Phi_3$ и фигура $\Phi_2$ равна фигуре $\Phi_3$, то фигура $\Phi_1$ равна фигуре $\Phi_2$.**

При такой формулировке можно будет отказаться от аксиомы 16 — она превратится в теорему. В самом деле, допустим, что фигура $\Phi$ равна фигуре $\Phi_1$, и докажем, что тогда и фигура $\Phi_1$ равна фигуре $\Phi$. Имеем: $\Phi_1 = \Phi_1$ (аксиома 15), $\Phi = \Phi_1$ по условию. Следовательно, $\Phi_1 = \Phi$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для построения курса геометрии было бы достаточно сформулировать 16, а не 20 аксиом.

# Ответы и указания

## Введение

**3.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **5.** Бесконечное множество. **7.** Нет. Указание. Воспользоваться аксиомой $A_2$. **8.** а) Нет; б) да. **9.** Да. **10.** а) Да; б) нет. **12.** Да. **13.** а) Нет; б) нет; в) да. **14.** Три плоскости, если прямые не лежат в одной плоскости, и одна плоскость, если прямые лежат в одной плоскости.

## Глава I

**17.** 26 см. **18.** а) 3,5 см; б) 12 см. **20.** Нет. **27.** 48 см. **28.** $8\frac{1}{3}$ см. **29.** 6 см. **33.** Указание. Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — данные плоскости, а $a$ — линия пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Рассмотреть взаимное расположение прямой $a$ и плоскости $\gamma$. **34.** а), б) Пересекаются; в), г) параллельны; д), е) скрещивающиеся. **37.** а) Пересекаются; б) скрещивающиеся. **40.** а) Нет; б) да, прямая $MN$. **41.** Нет. **42.** а) Параллельны; б) 100 см. **44.** а) 40°; б) 45°; в) 90°. **45.** а) 50°; б) 59°. **46.** а) 90°; б) 64°. **49.** Нет. **54.** б) 12 см². **56.** Указание. Воспользоваться задачей 55. **57.** Указание. Воспользоваться задачей 56. **60.** Указание. Воспользоваться задачей 58. **63.** а) $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см; б) $A_2B_2 = 54$ см, $AA_2 = 72$ см. **65.** а) Параллелограммы. **66.** Три пары рёбер. **67.** а) $\approx 17$ см, $\approx 23$ см, $\approx 29$ см; б) $\approx 146$ см², $\approx 210$ см², $\approx 180$ см². **72.** Указание. а) Учесть, что секущая плоскость проходит через середины рёбер $DB$ и $DC$ тетраэдра; б) учесть, что секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по отрезкам, параллельным сторонам треугольника $ABC$. **73.** 22 см. **74.** б) $\frac{4}{9}$. **75.** б) 6 см². **77.** 8 см, 10 см, 12 см. **79.** а) Параллелограмм $ABC_1D_1$; б) параллелограмм $ACC_1A_1$. **81.** Точка пересечения прямых: а) $MN$ и $BC$; б) $AM$ и $A_1B_1$. **82.** Указание. Задача решается аналогично задаче 2, п. 14. **83.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань: а) $AA_1D_1D$; б) $ABCD$. **84.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает грань $ABCD$. **85.** Параллелограмм $BKD_1L$. **86.** Указание. Сначала построить точку пересечения секущей плоскости с ребром $DD_1$. **87.** Указание. Сначала построить отрезок, по которому секущая плоскость пересекает: а) грань $BCC_1B_1$; б) грань $AA_1D_1D$. **88.** б) 12 см. **90.** Прямая $CD$: а) параллельна плоскости $\alpha$; б) пересекает плоскость $\alpha$. **92.** Указание. Использовать свойство $2^0$, п. 6. **93.** $MN$ и $b$ — скрещивающиеся прямые. **94.** Да. **95.** Указание. Использовать задачу 55. **98.** Существует только одна плоскость. **100.** Указание. Использовать вторую теорему п. 7 и задачу 59. **102.** $10(2\sqrt{3}+1)$ см и $25\sqrt{11}$ см$^2$. **103.** $4\frac{4}{9}$ см$^2$. **108.** Указание. Предварительно доказать, что плоскости $ADA_1$, $BDB_1$ и $CDC_1$ пересекаются по прямой. **112.** Указание. Учесть, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. **113.** Прямая $BD_1$.

## Глава II

**118.** $\angle AOB$, $\angle MOC$ и $\angle DOA$. **120.** $\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$. **121.** 13 см. **122.** $KA = KB = 20$ см, $DA = DB = 32$ см. **125.** 9 см. **126.** Прямоугольный. **130.** а) $MA = \sqrt{m^2+n^2}$, $MB = m$, $MC = \sqrt{m^2+n^2}$, $MD = \sqrt{m^2+2n^2}$; б) $\sqrt{m^2+\frac{1}{2}n^2}$, $m$. **136.** Указание. Воспользоваться задачей 134. **138.** а) $\frac{d}{\cos\varphi}$, $d \operatorname{tg}\varphi$; б) $m\cos\varphi$, $m\sin\varphi$. **140.** 3 см. **141.** 3 см. **142.** 2,5 см или 1,5 см. **143.** 2 см. **145.** б) $\sqrt{a^2+b^2}$. **146.** Указание. Воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах и обратной к ней. **149.** 4 см и $4\sqrt{10}$ см. **150.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **152.** 8 дм, 8 дм, $4\sqrt{5}$ дм, $4\sqrt{5}$ дм, 8 дм, $6\sqrt{2}$ дм. **154.** а) 15 см; б) 75 см$^2$. **155.** 6 см. **156.** $\sqrt{n^2+m^2\sin^2\varphi}$. **157.** б) 5,1 дм. **158.** 12,5 см, 12,5 см, 25 см, 25 см. **160.** 12 см. **161.** Указание. Использовать перпендикуляры, проведённые из точки $A$ к прямым $BC$ и $BD$ и к плоскости $CBD$. **163.** а) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d}{2}$; в) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **164.** 60°. **165.** $3d$. **168.** $\frac{d}{\sin\varphi}$. **170.** 1 см и $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. **171.** 45°. **172.** $6\sqrt{3}$ см. **173.** 90°, 45° и 60°. **174.** 60°. **175.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \approx 70°32'$. **176.** $8\sqrt{2}$. **179.** Указание. Воспользоваться задачей 178. **180.** Указание. Воспользоваться задачей 179. **182.** б) $\sqrt{m^2+n^2}$. **184.** а) $5\sqrt{6}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см. **187.** а) $\sqrt{6}$; б) 17; в) 13. **188.** $a\sqrt{3}$. **189.** а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **190.** а) 90°; б) 45°; в) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi \approx 26°34'$. **192.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **193.** а) $\sqrt{d^2-m^2}$; б) $\sqrt{m^2-n^2}$; в) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. **194.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d\sqrt{6}}{6}$. **195.** 6 см, 6 см и $6\sqrt{2}$ см. **198.** 4 см. **199.** Указание. Пусть точка $O$ — проекция точки $S$ на плоскость треугольника. Доказать, что точка $O$ совпадает с точкой $M$. **201.** 90°. **202.** $5\sqrt{3}$ см. Указание. Воспользоваться задачей 199. **203.** 5 см. **204.** а) $\frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}\sqrt{1+4\,\mathrm{tg}^2\varphi}$; б) $\frac{2\pi a}{\mathrm{tg}\,\varphi}$; в) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\,\mathrm{tg}^2\varphi}$. **205.** 3,5 дм$^2$. **206.** 25 см. **207.** 8 см. **208.** $9\sqrt{6}$ см. **209.** Расстояние от точки $B$ до плоскости $\alpha$ меньше расстояния от точки $C$ до этой плоскости. **211.** $a\sqrt{2}$. **213.** $\cos\varphi=\frac{1}{3}$, $\varphi\approx 70°33'$. **214.** 60°. **215.** $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ см. **216.** $2a$. **217.** $2\sqrt{122}$ дм.

## Глава III

**219.** 13 см. **220.** 26 см. **221.** $8\sqrt{21}$ см$^2$. **222.** 45°, 135°, 45°, 135°. **223.** 8 см и $8\sqrt{3}$ см. **224.** $16\sqrt{7}$ см$^2$. **225.** 45°. **226.** $2\sqrt{3}$ см$^2$. **228.** $80\sqrt{2}$ см$^2$. **229.** а) 450 см$^2$ и ≈536 см$^2$; б) 384 дм$^2$ и 672 дм$^2$; в) 69 дм$^2$ и ≈97 дм$^2$; г) 0,2 м$^2$ и ≈0,8 м$^2$. **230.** 75 см$^2$. **231.** $20(23+6\sqrt{3})$ см$^2$. **232.** $2d^2\sin\varphi\,(\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}+\sin\alpha)$. **233.** 180 см$^2$. **234.** 580 см$^2$. **235.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **236.** У к а з а н и е. Учесть, что боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами. **237.** 240 см$^2$. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 236. **238.** 2016 см$^2$. **239.** $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см. **240.** 768 см$^2$. **241.** $(2\sqrt{34}+22)$ м$^2$. **242.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48(\sqrt{2}+1)$ см$^2$. **243.** 192 см$^2$. **244.** 790 см$^2$. **245.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см$^2$. **246.** б) 189 см$^2$. **248.** $48\sqrt{2}$ см$^2$. **250.** $64\sqrt{3}$ см$^2$. **251.** 13 см. **252.** 12 см. **253.** 12 см. **254.** а) $\frac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3}$; б) $2\arcsin\frac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$; в) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}H}{a}$; г) $\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}H}{a}$; д) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}$. **255.** $\dfrac{4}{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$. **256.** а) $\dfrac{m\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) $\dfrac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos\left(\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$. **257.** $3\sqrt{3}(1+\sqrt{2})h^2$. **258.** $72(1+\sqrt{7})$ см$^2$. **259.** $3\sqrt{5}$ см. **263.** а) Трапеция. **264.** $3a^2$. **265.** 54 см$^2$. **266.** 13 дм$^2$. **268.** $\sqrt{7}$ дм. **269.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ дм, $\sqrt{3}$ дм. **270.** 16 см$^2$. **276.** а) Один; б) не имеет; в) не имеет; г) один. **277.** а) Бесконечное множество; б) 3; в) 9. **278.** а) 5; б) 4; в) 3 или 6. **279.** 60°. **280.** Площадь сечения, проходящего через диагонали смежных граней, равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Площадь сечения, проходящего через диагонали противоположных граней, равна $a^2\sqrt{2}$. **281.** $\sqrt{3}$. **282.** 90°. **283.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$. **284.** Правильный октаэдр. **286.** а) $m = \frac{\sqrt{6}}{2}h$; б) $n = \frac{1}{3}m$. **287.** а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{3}a$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **290.** $2\sqrt{2}\,l^2\,\frac{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta} \times$ $\times \sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}$. **291.** $2d^2 \sin\varphi\left(\cos\theta + \sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}\right)$. **292.** 4,8 см. **294.** $4\sqrt{S_0^2 - a^4}$ или $2\sqrt{2}S_0$. **296.** $\frac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. Указание. Учесть, что искомое сечение является трапецией. **298.** $2a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$. **299.** $0{,}5m$. **300.** Прямоугольник, $S = \frac{ab}{4}$. **301.** $4\sqrt{6}$ см. **302.** 5 см, 5 см, 6 см, 6 см. **303.** $288(3+\sqrt{3})$ см$^2$. **305.** $2h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **306.** $4h^2\,\mathrm{tg}^2\varphi \times$ $\times\left(1 + \frac{1}{\sin\varphi}\right)$. **307.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}ab$. **308.** 4 см, 4 см, 4 см, 4 см. **309.** $\frac{80}{3}$ дм$^2$. **310.** 540 см$^2$. **311.** а) 315 см$^2$; б) 7,2 см. **312.** $\mathrm{tg}\,\varphi\,\cos\frac{180°}{n}$. **313.** 54 дм$^2$. **314.** 56 см, 24 см. **319.** Три.

## Глава IV

**320.** 5 м. **321.** а) 24 см; б) $12\sqrt{3}$ см; в) $432\pi$ см$^2$. **322.** а) $10\sqrt{2}$ см; б) $50\pi$ см$^2$. **323.** Нет. **324.** $\sqrt{5\pi}$ м. **325.** а) 30°; б) 60°. **326.** а) 5 дм; б) 3 см. **328.** 64 см$^2$. **329.** 8 см. **330.** 15 дм. **331.** $\frac{1}{\cos\varphi}$. **332.** $\sqrt{S^2 - 4h^2d^2}$. **333.** $2\sqrt{3}\,dh$. **334.** 40 см$^2$. **335.** $S\sqrt{2}$. **336.** $\pi^2$ м$^2$. **337.** $\frac{S}{\pi}$. **338.** $1{,}125\pi$ кг. **339.** 6 см, 18 см. **340.** $0{,}82\pi \approx 2{,}58$ м$^2$. **341.** $4S \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi$. **342.** $S_{бок} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $S_{цил} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ или $S_{цил} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. **343.** $\frac{d^2}{8\pi}$. **344.** а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$; в) $4\pi a^2$. **345.** б) $\frac{b}{a}$. **346.** 17 см. **347.** а) $108\pi$ см$^2$; б) $72\pi$ см$^2$; в) $36\pi$ см$^2$. **348.** а) $4\sqrt{2}$ дм; б) 4 дм. **349.** 25 см$^2$. **350.** а) $r^2$; б) $r^2\sqrt{2}$; в) $r^2\sqrt{3}$. **351.** $2h^2$. **352.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ дм. **353.** а) $\frac{r\sqrt{4l^2 - r^2}}{4}$; б) $\frac{r\sqrt{2l^2 - r^2}}{2}$. **354.** а) 200 см$^2$; б) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ см$^2$;

в) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ см$^2$. **357.** $\alpha = 216°$. **358.** $180°$. **359.** а) $60°$; б) $2\arcsin\frac{1}{4}$; в) $2\arcsin\frac{1}{6}$. **360.** $9\pi$ см$^2$, $6\sqrt{2}$ см. **361.** $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ см$^2$. **362.** $0{,}9\pi$ см$^2$. **363.** $\dfrac{\pi a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$. **364.** $S_{\text{бок}} = 80\pi$ см$^2$, $S_{\text{кон}} = 144\pi$ см$^2$. **365.** $2\pi m^2 \sin\varphi$. **366.** 5 см. **367.** а) 8 см; б) 128 см$^2$. **368.** $R^2 - r^2$. **369.** 60 см$^2$. **370.** $33\sqrt{2}\pi$ см$^2$, $(33\sqrt{2}+65)\pi$ см$^2$. **371.** $2{,}55\pi \approx 8{,}011$ кг. **373.** а) $10\sqrt{21}$ см; б) 12 мм; в) 16 дм; г) $\sqrt{a^2-b^2}$. **374.** $\frac{\sqrt{4R^2-m^2}}{2}$. **375.** $1600\pi$ дм$^2$. **376.** 12 см. **377.** 6 см. **378.** 4 см. **379.** 3 см. **380.** 8 см. **381.** а) Плоскость является касательной к сфере; б), в) плоскость пересекает сферу; г) плоскость и сфера не имеют общих точек. **382.** а) $80\pi$ см$^2$; б) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ см. **383.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$; б) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}R^2$. **384.** а) $2\sqrt{3}\pi$ см; б) $5\sqrt{2}\pi$ м. **385.** $\pi R^2\sin^2\varphi$. **386.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **387.** 1 см. **388.** а) $144\pi$ см$^2$; б) $16\pi$ дм$^2$; в) $8\pi$ м$^2$; г) $48\pi$ см$^2$. **389.** 36 м$^2$. **390.** $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ см. **392.** 10 м. **393.** $900\pi$ см$^2$. **394.** $4\pi(r_1^2 + r_2^2)$. **396.** $\frac{\sqrt{3}S}{2}$. **397.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **399.** $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}}$. **400.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2 или $\frac{5}{4}$. **401.** $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **402.** $\frac{p}{2}$ или $\frac{p}{4}$. **403.** $414\pi$ см$^2$. **405.** $-\frac{1}{3}$. **406.** $\frac{\sqrt{S_0^2-S_1^2}}{\pi}$. **407.** $\arccos\frac{1}{7}$. **408.** $4\sqrt{6}$ см$^2$. **409.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **410.** $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **411.** $40\sqrt{3}\pi$ см$^2$. **412.** а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}(\sqrt{73}+3)$ см$^2$; б) $(18+6\sqrt{41})$ см$^2$; в) $\frac{9}{2}(\sqrt{91}+3\sqrt{3})$ см$^2$. **413.** $12\sqrt{10}\pi$ дм$^2$, $4(3\sqrt{10}+5)\pi$ дм$^2$. **415.** а) *Указание.* Доказать, что диаметр сферы равен гипотенузе треугольника; б) $2\sqrt{10}$ см. **416.** а) $30°$; б) $\frac{35}{144}$. **418.** б) $0{,}6R$. **419.** а) $2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$, $4R\sin\varphi\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$; б) $\frac{16}{9}\pi R^2\sin^2\varphi\,(3-4\sin^2\varphi)$. **420.** $\frac{240}{13}\pi$ см. **423.** $\frac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$. **424.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4}(29+7\sqrt{73})$ см$^2$; б) $(58+14\sqrt{41})$ см$^2$; в) $\frac{21\sqrt{91}+87\sqrt{3}}{2}$ см$^2$. **427.** а) $24R^2$; б) $12\sqrt{3}R^2$; в) $24\sqrt{3}R^2$.

**428.** а) $\dfrac{4R^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}$; б) $100\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$ см$^2$. **429.** Указание. Рассмотреть сечение данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания перпендикулярно к ней. **432.** а) $8R^2$; б) $\dfrac{21\sqrt{3}}{4}R^2$; в) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}R^2$. **433.** $\dfrac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}}a$, $\dfrac{2\sqrt{33}}{11}a$. **434.** $4\sqrt{3}$ см, 6 см или $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **435.** $\dfrac{2}{3}$. **436.** а) $R\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{4}\right)$; б) $r\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{4}\right)$; в) $60°$. **437.** $\dfrac{2\pi r^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}$. **438.** $\dfrac{3}{4}$. **439.** а) $R\sin\varphi$; б) $\dfrac{r}{\sin\varphi}$; в) $30°$ или $150°$.

## Глава V

**440.** а) $V=V_1+V_2$; б) $V=\dfrac{2}{3}V_1+V_2$. **441.** а) 1980; б) 300; в) $1170\sqrt{3}$; г) $3{,}2\sqrt{5}$. **442.** а) $432\sqrt{2}$ см$^3$; б) $6\sqrt{6}$ м$^3$; в) $0{,}32\sqrt{5}$ см$^3$. **443.** 12 см. **444.** 3,51 кг. **445.** $240\sqrt{2}$ см$^3$. **446.** $729\sqrt{2}$ см$^3$. **447.** $\dfrac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$. **448.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **449.** $432\sqrt{3}$ см$^3$. **450.** а) $\dfrac{1}{8}\cdot\sqrt{2}$ м$^3$; б) $1728\sqrt{2}$ см$^3$. **451.** 2310 см$^3$. **452.** а) $\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ см$^3$; б) $1{,}5\sqrt{2}$. **453.** $0{,}5m^3\sin\varphi\cos\dfrac{\varphi}{2}$. **454.** $\dfrac{l^3\sin\beta\cdot\cos^2\beta}{4\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. **455.** $\dfrac{Q^2\sin 2\beta}{2a}$. **456.** а) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$; б) $a^3$; в) $1{,}5\sqrt{3}a^3$; г) $\dfrac{2a^3}{\mathrm{tg}\,22°30'}$. **457.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **458.** 72 см$^3$. **459.** а) $24\pi$ см$^3$; б) $\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; в) 2 см. **460.** ≈208 м. **461.** ≈1513 т. **462.** $\dfrac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$. **463.** ≈61 кг. **464.** а) $3\sqrt{3}:4\pi$; б) $2:\pi$; в) $3\sqrt{3}:2\pi$; г) $2\sqrt{2}:\pi$; д) $\left(\dfrac{1}{2}n\cdot\sin\dfrac{360°}{n}\right):\pi$. **465.** $\dfrac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}$. **466.** 0,5. **467.** $\dfrac{\pi}{2}$. **468.** $\dfrac{\pi}{5}$. **469.** $192\sqrt{3}$ см$^3$. **470.** $\dfrac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **471.** $\dfrac{1}{4}m^3\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **472.** 1050 см$^3$. **473.** $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$. **474.** $V=18\sqrt{39}$ см$^3$. **476.** 1080 см$^3$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей. **477.** а) 6 м$^3$; б) 4950 см$^3$. **478.** $169\sqrt{3}$ см$^3$. **479.** а) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\varphi\cos\varphi$; б) $\dfrac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$; в) $\dfrac{1}{3}l^3\sin^2\dfrac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\dfrac{\beta}{2}}$. **480.** $\dfrac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}{24\sin\dfrac{\varphi}{2}}$.

**481.** а) $\frac{4H^3}{3\,\mathrm{tg}^2\beta}$; б) $\frac{m^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$. **482.** $\frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$. **483.** $6\sqrt{471}$ см$^3$, $6\sqrt{498}$ см$^2$. **484.** $\frac{845\sqrt{3}}{6}$ см$^3$. **485.** $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **487.** 9 см$^3$. **488.** а) $\frac{1}{24}c^3\sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$; б) 48 см$^3$; в) $\frac{1}{6}abc$. **489.** $1400\sqrt{3}$ см$^3$. **490.** $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$. **491.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3)\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **492.** 1260 дм$^3$. **493.** $38\sqrt{2}$ см$^3$. **494.** а) $2{,}25\pi$ см$^3$; б) 9 см; в) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$. **495.** 375 см$^3$. **496.** $\frac{\sqrt{\pi Q(P^2-Q^2)}}{3\pi}$. **497.** $\frac{1}{12}\pi H^3$. **498.** $240\pi$ см$^3$ или $100\pi$ см$^3$. **499.** 216°. **500.** $\frac{225\pi}{7}$ дм$^3$. **501.** $84\pi$ м$^3$. **502.** $\frac{Sh}{\pi l}$, $\frac{1}{12}\pi h\left(l^2-h^2+\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}\right)$. **503.** а) $64\pi$ см$^2$, $\frac{256}{3}\pi$ см$^3$; б) $\approx 3$ см, $\approx 36\pi$ см$^2$; в) 4 см, $\frac{256}{3}\pi$ см$^3$. **504.** Объём Земли в 64 раза больше объёма Луны. **505.** $H=\frac{4}{3}R$, где $H$ — высота цилиндра, $R$ — радиус шара. **506.** Нет. **507.** Уровень воды повысится на $\frac{32}{75}$ см. **508.** $\frac{942}{125}\pi$ м$^3$. **509.** $5:16$. **510.** $58\,500\pi$ см$^3$ или $504\,000\pi$ см$^3$. **511.** $\frac{52}{81}\pi R^3$. **512.** $252\pi$ см$^3$ и $720\pi$ см$^3$. **513.** $112\,500\pi$ см$^3$. **514.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$. **515.** $6375^2\pi\approx 1{,}28\times$ $\times 10^8$ км$^2 = 128\cdot 10^6$ км$^2$. **516.** $432\pi\approx 1357$ см$^2$. **518.** $\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$, 36 дм$^3$. **519.** $48\sqrt{11}$ см$^3$. **520.** $a\sqrt{Q^2-Qa^2}$. **521.** 105 см$^3$. **522.** $16\sqrt{11}$ см$^3$. **523.** $\frac{a^3}{4}$. **524.** 1 м, 2 м, $\sqrt{5}$ м, 3 м, 3 м, 3 м. **525.** $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$ или $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$. **526.** Указание. Достроить треугольную призму до параллелепипеда. **527.** Указание. Воспользоваться задачей 526. **528.** 6,12 дм$^3$. Указание. Воспользоваться задачей 475. **529.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **530.** $\frac{16m^3}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi}$. **531.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3(3\,\mathrm{tg}^2\varphi-1)$. **532.** $\frac{a^3 n}{24\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}}$. **533.** $\frac{2h^3\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{3\,\mathrm{tg}^2\varphi_3}$. **534.** $\frac{2H^3\sin\alpha}{3\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{tg}\,\gamma}$. **535.** $\frac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta$. **536.** а) $\frac{a}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$; б) $\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$. **537.** $31:73$. **538.** а) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; б) $\frac{\pi h^3}{4}$; в) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

**540.** $\approx 7065$ л. **541.** $\dfrac{\pi a^3 \operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\dfrac{\varphi_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\varphi_1}{2}}$. **542.** $\dfrac{a^3\pi}{24}\sin^3\varphi\operatorname{tg}\theta$. **543.** $\dfrac{3}{2}$.

**544.** $96\pi$ дм$^3$. **545.** $2\pi r\dfrac{l-r}{l}$. **546.** $\dfrac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$. **547.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\cdot V$.

**548.** $\dfrac{\pi}{6}a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\beta}{2}$. **549.** $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **550.** $\dfrac{\pi l^3}{6\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}$. **551.** $\dfrac{\pi}{H^2}(H^2+r^2)^2$, $\dfrac{\pi}{6H^3}(H^2+r^2)^3$. **552.** $\dfrac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ см$^2$, $\dfrac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ см$^3$. **553.** $\dfrac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ см$^2$, $\dfrac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см$^3$. **554.** $\approx 6{,}56$ м. **555.** Наибольший объём имеет шар, наименьший объём имеет конус. **556.** а) Нет; б) да. Указание. Сравнить плотность шара, считая его однородным, с плотностью воды.

## Глава VI

**557.** а) 3 см, 4 см, 5 см, 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) 4 см, 3 см, 5 см, 2 см, 2,5 см. **558.** а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 15 см, $\sqrt{145}$ см, 17 см. **560.** а) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}$; б) квадрат. **561.** а) Да; б) да; в) нет. **562.** а) Параллельны или совпадают; б) прямая параллельна плоскости или лежит в ней; в) плоскости параллельны, пересекаются или совпадают. **563.** а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$; г) $\overrightarrow{C_1B_1}$; д) $\overrightarrow{MB_1}$. **564.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$. **566.** а) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; г) $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$. **570.** а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{DB}$. **572.** а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CP}$; г) $\vec{0}$. **573.** а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$; в) $-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})$. **574.** а) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OE}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\vec{0}$. **575.** Указание. Учесть, что $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}$. **576.** а) $\overrightarrow{C_1B}$; б) $\overrightarrow{AC}$. **577.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}$. **581.** а) $-1$; б) 2; в) $-\dfrac{1}{2}$. **582.** а) $-2\overrightarrow{EF}$; б) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. **583.** $-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. **584.** а) $5\vec{n}-9\vec{m}$; б) $2\vec{p}-13\vec{m}-3\vec{n}$. **592.** а), в). **593.** Да. **595.** а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{BD_1}$. **596.** а) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}$. **597.** а) $-\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$, $\dfrac{\sqrt{2}kq}{2a^3}\overrightarrow{AC_1}$; б) $\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\dfrac{2kq}{9a^2}\sqrt{105}$, $\dfrac{4kq}{3a^2}$. **598.** $\overrightarrow{CD}=0\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1O}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **600.** $\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+0\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$. **601.** $\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $|\overrightarrow{AK}|=\dfrac{3}{2}m$. **602.** $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, $\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$. **604.** $\overrightarrow{DK}=0{,}7\overrightarrow{DA}+$

$+0{,}15\overrightarrow{DB}+0{,}15\overrightarrow{DC}$. **605.** а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{C_1N}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{A_1N}=0\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; ж) $\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **606.** $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. **607.** а) $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; б) $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$; в) $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; г) $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$. **608.** Указание. Воспользоваться задачами 587 и 603. **610.** Нет. Указание. Сначала доказать, что $M_1$ — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, а затем воспользоваться задачей 603. **616.** а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\vec{0}$. **617.** а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$. **618.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C_1A_1}$. **619.** а) $k$ — любое число; б) $k\geqslant 0$; в) $k<0$; г) $k=-1$. **623.** Указание. Сначала доказать, что $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. **624.** а) $3\overrightarrow{ON}-2\overrightarrow{OM}$; б) $2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$; в) $k\overrightarrow{ON}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$. **626.** Сначала доказать компланарность векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ и $\overrightarrow{A_3B_3}$. **627.** а) $\frac{3}{2a^2}kq$; б) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}kq$; в) $\frac{4}{9a^2}kq$; г) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}kq$. **628.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$. **629.** $\overrightarrow{AC_1}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{CA_1}=-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{BD_1}=\vec{q}-\vec{p}+\vec{r}$; $\overrightarrow{DB_1}=-\vec{q}+\vec{p}+\vec{r}$. **630.** а) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD_1}$. **631.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **632.** Указание. Сначала доказать компланарность векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. **633.** $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}$, $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$. **634.** $\frac{1}{3}$. **635.** Указание. Воспользоваться задачей 603. **636.** Указание. Воспользоваться задачей 634.

## Глава VII

**637.** а) $C$; б) $E$; в) $B$; г) $A$, $C$, $E$, $H$; д) $B$, $E$, $G$; е) $B$, $C$, $D$. **639.** $B_1(1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $D_1(1;\ 1;\ 0)$. **640.** $\vec{a}\{3;\ 2;\ -5\}$, $\vec{b}\{-5;\ 3;\ -1\}$, $\vec{c}\{1;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 1;\ 1\}$, $\vec{m}\{-1;\ 0;\ 1\}$, $\vec{n}\{0;\ 0;\ 0{,}7\}$. **646.** а) $\{7;\ -2;\ 1\}$; б) $\{-7;\ 2;\ -1\}$; в) $\{5;\ -1{,}2;\ 1\}$; г) $\left\{-5\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{5};\ -1\frac{1}{7}\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{3};\ -2{,}2;\ \frac{1}{7}\right\}$; е) $\{7;\ -1{,}8;\ 1\}$; ж) $\{7;\ -2{,}2;\ 1\}$; з) $\{10;\ -2;\ 2\}$; и) $\{6;\ -3;\ 0\}$;

к) $\{0;\ -1{,}2;\ 0\}$; л) $\left\{\frac{1}{9};\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{21}\right\}$; м) $\{-0{,}4;\ 0{,}2;\ 0\}$. **647.** $\vec{p}\{4;\ -18;\ -9\}$, $\vec{q}\{5;\ 15;\ -5\}$. **648.** а) $\{0;\ 5;\ -1\}$; б) $\{-3;\ 2;\ 1\}$; в) $\{7{,}8;\ 2{,}5;\ 4{,}1\}$; г) $\{-3;\ 9;\ -3\}$. **649.** $-\vec{i}\{-1;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{j}\{0;\ -1;\ 0\}$, $-\vec{k}\{0;\ 0;\ -1\}$, $-\vec{a}\{-2;\ 0;\ 0\}$, $-\vec{b}\{3;\ -5;\ 7\}$, $-\vec{c}\{0{,}3;\ 0;\ -1{,}75\}$. **650.** в) Нет; г) да; д) нет. **651.** а) $m = 10$, $n = 1\frac{1}{5}$; б) $m = 0{,}1$, $n = -2$. **652.** а) Да; б) нет; в) да; д) нет; е) нет. **655.** а) $\{-1;\ 0;\ 2\}$; б) $\{5;\ -7;\ 2\}$; в) $\left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right\}$. **656.** $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. **657.** Да. **658.** б) Да; в) нет. **659.** а) Да; б) нет; в) да. **660.** Указание. Воспользоваться задачей 603. **661.** а) $M(-1;\ 2{,}5;\ -2)$; б) $B(-8;\ 4;\ -19)$; в) $A(-24;\ 8;\ 28)$. **662.** а) $m = 2$, $n = -5$; б) $m = -0{,}5$, $n = 2$; в) $m = 1$, $n = -1$; г) $m = 2$, $n = -1$. **663.** а) 3; б) 17. **664.** $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$, $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{m}| = \sqrt{5}$. **665.** а) $\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{14}$; в) 0; г) $5\sqrt{2}$; д) $3\sqrt{14}$; е) 14; ж) $\sqrt{326}$. **666.** $\sqrt{14}$. **667.** а) $3 + 2\sqrt{2}$; б) 0,5; $\frac{\sqrt{73}}{4}$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$. **668.** а) Правильный; б) прямоугольный разносторонний; в) прямоугольный разносторонний; г) прямоугольный равнобедренный. **669.** а) 4, 4, 3; б) $4\sqrt{2}$, 5, 5. **670.** $(0;\ 2;\ -3)$, $(-1;\ 2;\ 0)$, $(-1;\ 0;\ -3)$. **671.** $(3;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -4;\ 0)$, $(0;\ 0;\ \sqrt{7})$. **672.** 3,75; 2; 4; $1 - 2\sqrt{2}$ и $1 + 2\sqrt{2}$. **673.** Указание. Доказать, что: а) точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — неравные сонаправленные векторы; в) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$. **674.** а) $(-1{,}6;\ 0;\ 0)$; б) $(0;\ 8;\ 0)$; в) $(0;\ 0;\ 1)$. **675.** а) $\left(\frac{3}{8};\ \frac{17}{8};\ 0\right)$; б) $\left(0;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{17}{6}\right)$. **676.** а) $(2;\ 3;\ 0)$, $\sqrt{13}$; б) $(2;\ 3;\ -1)$. **677.** $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + m^2}$. **678.** а) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; в) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$. **679.** а) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 54$; б) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 35$. **680.** а) $(0;\ 0;\ 0)$, 7; б) $(3;\ -2;\ 0)$, $\sqrt{2}$. **681.** а) $(2;\ 0;\ 0)$, 2; б) $(0;\ 1;\ 0)$, 5; в) $(-1;\ 0;\ 0)$, 2; г) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2};\ 1\right)$, $\sqrt{6}$. **682.** а) 45°; б) 135°; в) 60°; г) 45°; д) 90°; е) 90°; ж) 0°; з) 180°. **683.** $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}} = \varphi$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}} = \widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}} = 180° - \varphi$. **684.** а) $a^2$; б) $-2a^2$; в) 0; г) $a^2$; д) $a^2$; е) $-\frac{a^2}{2}$; ж) $-\frac{3}{2}a^2$. **685.** $\vec{a}\vec{c} = 3$, $\vec{a}\vec{b} = 0$, $\vec{b}\vec{c} = 3$, $\vec{a}\vec{a} = 6$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}} = \sqrt{3}$. **686.** а) $-10$; б) 3; в) 1; г) $-4$; д) 28. **687.** а) Тупой; б) острый; в) прямой. **689.** а) 5,5; б) 3,5; в) 4. **690.** $m = 4$. **691.** Указан и е. Доказать, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$. **692.** а) 60°; б) 135°; в) 150°; г) 45°; д) 90°. **693.** $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}\approx 50°46'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}\approx 63°26'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}\approx$ $\approx 50°46'$. **694.** 60°. **695.** $\angle A=120°$, $\angle B=\angle C=30°$, $P=2\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})$, $S=2\sqrt{3}$. **696.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0. **697.** 90°. **698.** 3. **700.** а) 1, $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. **702.** У к а з а н и е. Выразить векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$. **703.** а) –1; б) –1,5; в) 4; г) $\sqrt{2}$; д) 2; е) $-\frac{1}{4}$; ж) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **705.** а) 30°; б) 60°; в) 0°; г) 45°. **707.** а) $\frac{3}{\sqrt{29}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{87}}$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$. **708.** а) $\approx 71°34'$; б) $\approx 59°44'$. **709.** а) $\frac{3}{\sqrt{70}}$; б) $\frac{9}{\sqrt{130}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{182}}$. **710.** а) $\frac{10}{\sqrt{134}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{134}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{134}}$. **711.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{3}$.

**712.** У к а з а н и е. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб. Требуется, например, доказать, что $AC_1 \perp A_1B$. Разложить векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ и доказать, что $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$. **714.** 60°. **716.** $\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}$. **717.** 45°. **718.** У к а з а н и е. Доказать, что $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. **720.** У к а з а н и е. Рассмотреть плоскость, проходящую через центр симметрии и данную прямую, и свести задачу к задаче 1149 из учебника «Геометрия, 7—9». **722.** У к а з а н и е. Воспользоваться следующими свойствами движений: при движении прямая отображается на прямую, параллельные прямые — на параллельные прямые, а угол — на равный ему угол. **725.** У к а з а н и е. Учесть, что параллельный перенос есть движение, поэтому при параллельном переносе прямая отображается на прямую. **726.** У к а з а н и е. Доказать, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{AA_1}=\vec{p}$. **728.** У к а з а н и е. Утверждения доказываются точно так же, как в теореме п. 118 и в задаче 1150 из учебника «Геометрия, 7—9». **729.** У к а з а н и е. а), б) Доказательство провести методом от противного. **731.** а) {3; 9; –24}; б) {–1,6; –2,3; 4,3}. **732.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **733.** а) (–1; 0; 0); б) (0; –2; 0), (0; 0; 2). **734.** а) Да; б) да; в) нет. **735.** У к а з а н и е. Доказать, что: а) точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой; б) середины отрезков $AC$ и $BD$ совпадают. **736.** $\left(\frac{7}{3};\ \frac{5}{3};\ 3\right)$. **737.** $C\,(6;\ 5;\ 5)$, $D_1\,(9;\ 4;\ 1)$, $B_1\,(4;\ 7;\ 4)$, $C_1\,(8;\ 8;\ 4)$. **738.** а) 1; б) –2; в) 0. **739.** $\left\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{3}{\sqrt{10}};\ 0\right\}$. **740.** 4 или –4. **741.** 1. **742.** $2\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{29}$. **743.** (0; 42,4; 0). **744.** (1; 1,5; 1,5). У к а з а н и е. Учесть, что $\angle ACB=90°$. **745.** (3; 0; 0), (0; 0; –9), (0; 0; –1).

**746.** $4\sqrt{2}$. **747.** 6 дм. **748.** Указание. Ввести систему координат и обозначить координаты вершин данного тетраэдра $ABCD$ так: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D(x_4;\ y_4;\ z_4)$. Учесть, что точка пересечения медиан имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\ \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$. **749.** а) 3; б) –3,5; в) 5; г) 7; д) –10. **750.** а) 135°; б) 60°; в) 67°30′. **751.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **752.** а) $\frac{2}{\sqrt{114}}$; б) $\frac{5}{9}$. **753.** а) 90°; б) ≈114°06′. **754.** а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}$. **755.** а) $\frac{7}{65}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $\frac{4}{13}$; г) $\frac{3}{13}$. **756.** а) $\frac{2}{\sqrt{38}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{38}}$. **758.** 45°. **759.** $\sin\theta\cos\varphi$. **760.** $\sqrt{n^2+m^2+p^2+pn}$. **761.** Указание. а) Доказать методом от противного; б) пусть $M$ — точка пересечения прямой $a$ с плоскостью $\alpha$, $A$ — точка на прямой $a$, $B$ и $C$ — точки в плоскости $\alpha$, отличные от точки $M$. К треугольникам $AMB$ и $AMC$ применить теорему Пифагора. **762.** Указание. Рассмотреть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями $\alpha$ и $\beta$, $\alpha$ и $\beta_1$. **763.** Указание. Взять на плоскости $\alpha$ две пересекающиеся прямые и воспользоваться задачей 725.

### Задачи для повторения

**764.** а) $9\sqrt{3}$ см²; в) arctg 0,5; г) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) 6 см; е) $27\sqrt{3}$ см². **765.** а) $72\sqrt{7}$ см²; б) $144\sqrt{3}$ см³; в) $\mathrm{arctg}\,\sqrt{6}$; г) 60°; д) 72; е) $192\pi$ см². **766.** а) $6\sqrt{3}\,(2+\sqrt{13})$ см²; б) $12\sqrt{3}$ см³; в) arcsin 0,6; г) arctg 1,5; д) 12; е) $(12-6\sqrt{3})$ см. **767.** а) $32\sqrt{7}$ см²; б) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см³; в) $\mathrm{arctg}\,\sqrt{6}$; г) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{6}}{6}$; д) 48; е) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

### Задачи повышенной трудности

**768.** $3(1+2\sqrt{2})$ см². **769.** Указание. Допустим, что вершина тетраэдра проектируется в точку пересечения высот основания. Тогда любое ребро тетраэдра перпендикулярно к противоположному ребру. Затем применить обратную теорему о трёх перпендикулярах. **770.** Указание. Учесть, что $O_1$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. **771.** Указание. Воспользоваться формулой объёма тетраэдра. **772.** Семь. **773.** Указание. Через биссектрису линейного угла данного двугранного угла и его ребро провести плоскость и спроектировать точку пересечения данной прямой с этой плоскостью на грани. Затем воспользоваться равенством полученных треугольников. **775.** Указание. Пусть $A$ — произвольная вершина, $O$ — центр куба, $A_1$ — проекция точки $A$ на данную прямую. Тогда $AA_1 = OA \cdot \sin\varphi$, где $\varphi$ — угол между $OA$ и $OA_1$. Записать сумму квадратов расстояний от прямой $OA_1$ до вершин куба и воспользоваться теоремой косинусов. **776.** Указание. Указанные тетраэдры имеют общую вершину, а их основания — равнобедренные прямоугольные треугольники, катеты которых равны ребру куба. **777.** Указание. Рассмотреть развёртку куба. **778.** Указание. Взять в качестве оси отверстия диагональ куба. **779.** $\frac{25}{16}S$. **780.** $\sqrt{2}$ см. Указание. Воспользоваться тем, что тетраэдр должен находиться внутри сферы, описанной около куба. **781.** Указание. Доказать, что все вершины полученного многогранника — середины граней куба. **782.** Указание. Взять какую-нибудь грань параллелепипеда, выбрать наименьший куб, примыкающий к этой грани, и выяснить, как к нему могут быть приставлены остальные кубы. **783.** Указание. Спроектировать вершины ломаной на три ребра куба с общей вершиной и воспользоваться соотношениями между сторонами треугольника. **784.** Указание. Сначала доказать, что объём тетраэдра не изменится, если отрезок $AB$ неподвижен, а отрезок $CD$ перемещается. **785.** Указание. Воспользоваться симметрией. **786.** Указание. Воспользоваться симметрией. **787.** $\sqrt{\frac{3}{7}}a$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **788.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **789.** Указание. Выразить векторы, задающие диагонали, через векторы, задающие рёбра. **790.** Указание. Рассмотреть векторы, определяющие направления падающего и отраженного лучей. **791.** Два решения: 45° и 135°. **792.** Указание. Исходя из условия задачи, записать соотношения для векторов, задающих три ребра тетраэдра с общим концом. **793.** Указание. Рассмотреть вектор, образующий равные углы с боковыми рёбрами, и доказать, что он перпендикулярен к векторам, задающим два ребра основания. **794.** Указание. Пусть $O_1$ — проекция $O$ на плоскость $ABC$. Доказать, что $\overrightarrow{O_1A} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. **795.** Указание. Доказать, что эта величина равна квадрату диаметра шара. **796.** Дуга окружности, расположенная внутри шара, диаметр которой равен расстоянию от центра шара до данной прямой, а плоскость окружности перпендикулярна к данной прямой. **797.** Сфера, центр которой совпадает с центром данной сферы, а радиус равен $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, где $R$ — радиус данной сферы. **799.** $r_3 \geqslant \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}$, где $r_3$ — радиус меньшего из шаров. **800.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. **801.** $\frac{2\sqrt{3}(\lambda - 1) - \sqrt{9\lambda^2 - 18\lambda + 12}}{3(\lambda - 2)}R$ при $\lambda \neq 2$ и $\frac{\sqrt{3}}{6}R$ при $\lambda = 2$. **802.** $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$ и $\frac{5}{12}V$, где $V$ — объём призмы. **803.** Указание. Достроить тетраэдр до треугольной призмы и воспользоваться задачей 526. **804.** Указание. Доказать, что полученные тетраэдры имеют общее основание и равные высоты. **805.** 5 : 3. **806.** Указание. Взяв за основание какую-нибудь грань с ребром $AB$, заметить, что ни её площадь, ни высота тетраэдра не зависят от положения точек $C$ и $D$. **807.** $\frac{5}{24}$ см$^3$. Указание. Воспользоваться задачей 803. **808.** Указание. Взять точку $A$ внутри сечения и разбить многогранник на пирамиды с общей вершиной $A$. **809.** $\frac{16}{3}$ см$^3$. Указание. Рассмотреть сечение фигуры плоскостями, параллельными осям цилиндров. **810.** $2\arcsin\frac{1}{3}$. **812.** $\frac{\pi a^3}{12}\left(3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. **813.** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. **814.** Указание. Рассмотреть плоскость, в которой лежат вершина тетраэдра и прямая Эйлера противоположной грани (см. п. 94). **815.** Указание. Рассмотреть центральное подобие с центром $G$ (см. задачу 814) и коэффициентом $-\frac{1}{3}$, а также центральное подобие с центром $H$ и коэффициентом $\frac{1}{3}$.

## Глава VIII

**817.** Указание. Использовать общую касательную к окружностям в точке $M$. **818.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC \backsim \triangle BAD$. **820.** Указание. Воспользоваться теоремой 2 из п. 86. **821.** Указание. Рассмотреть два случая: точка пересечения прямых лежит внутри круга и вне круга и воспользоваться теоремами 1 и 2 из п. 86. **822.** Указание. Сначала доказать, что $\angle NMK=\angle MKN$. **823.** Указание. Сначала доказать, что $\angle AMN=\angle ANM$. **825.** Указание. Рассмотреть два случая: прямая $AE$ — секущая и прямая $AE$ — касательная к окружности. **826.** Указание. Воспользоваться признаком вписанного четырёхугольника. **827.** Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник. Провести диаметр $BB_1$ и сначала доказать, что $AB_1=CD$. **828.** Указание. Через точку пересечения указанных биссектрис провести прямую, параллельную $AB$ и пересекающую прямые $AD$ и $BC$ в точках $E$ и $F$, и доказать, что $EF=CD$. **829.** Указание. В четырёхугольнике $ABCD$ на диагонали $AC$ отметить такую точку $K$, что $\angle ABK=\angle CBD$, и далее использовать подобие треугольников $ABK$ и $DBC$, $BCK$ и $ABD$. **830.** Указание. Найти сумму углов $C$ и $K$ четырёхугольника $CDKE$. **831.** Указание. Выразить угол между указанными биссектрисами через два противоположных угла четырёхугольника. **833.** Указание. Пусть основания трапеции равны $a$ и $b$. Сначала доказать, что радиус вписанной окружности равен $\frac{ab}{a+b}$.

**834.** $\dfrac{a^2+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$. **835.** Указание. Воспользоваться равенством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки, а также равенством отрезков внешних касательных к двум окружностям. **836.** Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе треугольника (п. 91). **837.** Указание. Воспользоваться тем, что отношение площадей треугольников $ABD$ и $ACD$ равно, с одной стороны, отношению отрезков $BD$ и $CD$, а с другой стороны, отношению высот, проведённых из вершин $B$ и $C$. **838.** а) $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$, $\dfrac{BO}{OB_1}=\dfrac{c+a}{b}$, $\dfrac{CO}{OC_1}=\dfrac{a+b}{c}$. Указание. Для нахождения отношения $\dfrac{AO}{OA_1}$ провести отрезок $A_1D$, параллельный $BB_1$ (точка $D$ лежит на стороне $AC$), и далее использовать подобие получившихся треугольников и теорему о биссектрисе треугольника (п. 91). в) Нет. Указание. В пунктах б), в), г) использовать формулы пункта а). **839.** Указание. Воспользоваться формулой (6) из п. 92. **840.** Указание. Пусть прямая $BM$ пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Воспользоваться тем, что треугольники $AMD$ и $CMD$ имеют общую высоту. **841.** 3 : 4. Указание. Достроить данный треугольник до параллелограмма. **842.** $\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$ см$^2$. **843.** 72 см$^2$. Указание. Воспользоваться результатом задачи 841. **844.** Указание. Пусть точка $L$ лежит на стороне $AB$, $M$ — на стороне $AC$, $O$ — точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$, $OL=OM=r$. Воспользоваться равенством $\dfrac{S_{LOM}}{S_{ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\angle LOM}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}=\dfrac{r^2}{AB\cdot AC}$, аналогичными равенствами для отношений $\dfrac{S_{MON}}{S_{ABC}}$ и $\dfrac{S_{NOL}}{S_{ABC}}$ и формулами (5) и (6) из п. 92. **845.** б) Указание. Воспользоваться формулой из пункта а), а также формулой (5) из п. 92. **846.** Указание. Продолжить стороны $b$ и $d$ до пересечения и воспользоваться результатом задачи 845 а). Если же стороны $b$ и $d$ параллельны, то воспользоваться формулой площади трапеции. **847.** Указание. а) Воспользоваться тем, что $S=S_{ABC}+S_{ADC}$; б) воспользоваться формулой из п. а). **848.** Указание. а) Воспользоваться результатом задачи 847 а) и свойством сторон описанного четырёхугольника (п. 89); б) воспользоваться формулой из пункта а). **849.** Указание. Сначала выразить отрезки $BD$, $BH$, $DM$ и $BK$ через стороны треугольника $ABC$. **851.** Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе треугольника (п. 91), результатом задачи 837 и теоремой Менелая. **852.** Указание. Воспользоваться результатом задачи 837 и теоремой Менелая. **853.** Указание. Воспользоваться теоремой Менелая. **854.** Указание. Дважды используя теорему Менелая, доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон, проходит через середины оснований. **855.** Указание. Воспользоваться теоремой Менелая применительно к треугольникам $ABC$ и $ADC$. **856.** Указание. Воспользоваться свойством сторон описанного четырёхугольника (п. 89) и результатом задачи 855 а). **857.** Указание. Воспользоваться теоремой Менелая применительно к треугольнику $OO_1O_2$. **858.** Указание. Воспользоваться теоремой Менелая. **859.** Указание. Воспользоваться теоремой Чевы. **860.** Указание. Воспользоваться теоремой Чевы. **861.** Указание. Пусть луч $CT$ пересекает сторону $AB$ в точке $C_1$, а луч $CO$ пересекает сторону $AB$ в точке $C_2$. Используя теорему Чевы, доказать, что точки $C_1$ и $C_2$ делят отрезок $AB$ в одном и том же отношении и, следовательно, совпадают. **862.** Указание. а) Сначала доказать, что $\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$, а затем воспользоваться теоремой Чевы. б) Задача решается аналогично задаче из пункта а). **863.** а) $\frac{x^2}{9}+y^2=1$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $x=-\frac{9\sqrt{2}}{4}$ и $x=\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **864.** Пересекаются в точках $(0;\ -2)$ и $\left(\frac{36}{13};\ \frac{10}{13}\right)$. **865.** а) Пересекаются в четырёх точках: $(-2;\ -\sqrt{3})$, $(-2;\ \sqrt{3})$, $(2;\ -\sqrt{3})$, $(2;\ \sqrt{3})$; б) касаются в точке $(4;\ 0)$, пересекаются в точках $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3};\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$. **866.** а) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$; б) 2; в) $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{2}$. **867.** Пересекаются в четырёх точках: $\left(-\sqrt{6};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{3};\ 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{6};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **868.** Эксцентриситет равен $\sqrt{2}$, уравнения директрис: $y+x-\sqrt{2k}=0$ и $y+x+\sqrt{2k}=0$. Указание. Воспользоваться замечанием 3 п. 98. **869.** Уравнение директрисы $y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$; координаты фокуса $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$. Указание. Сначала сделать параллельный перенос осей координат так, чтобы начало координат совпало с вершиной параболы. **870.** При $R=\frac{1}{2}$ касаются в точке $(0;\ 0)$, при $R>\frac{1}{2}$ касаются в точке $(0;\ 0)$ и пересекаются в точках $(-\sqrt{2R-1};\ 2R-1)$ и $(\sqrt{2R-1};\ 2R-1)$.

### Задачи для подготовки к ЕГЭ

$\boxed{3}$ **1.** 10 см$^2$. **2.** 6 см$^2$. **3.** 10 см$^2$. **4.** 5,5 см$^2$. **5.** 12 см$^2$. **6.** 12 см$^2$. **7.** 14 см$^2$. **8.** 10 см$^2$. **9.** 10 см$^2$. **10.** 12. **11.** 2. **12.** 24. **13.** 24. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 100. **17.** 0,25. **18.** 1. **19.** 15. **20.** 13. **21.** 6. **22.** 6. **23.** 45°. **24.** –5. **25.** 5. **26.** 10. **27.** –1. **28.** 8. **29.** 2. **30.** –6. **31.** 5. **32.** 3. **33.** 3. **34.** 10. **35.** 10. **36.** 0. **37.** 3. **38.** 0,5.

$\boxed{6}$ **1.** $\frac{24}{25}$. **2.** 12. **3.** 2,5. **4.** 5. **5.** 0,6. **6.** $\frac{7}{25}$. **7.** $-\frac{24}{25}$. **8.** 0,7. **9.** $\frac{24}{25}$. **10.** 5. **11.** 2. **12.** 41°. **13.** 48°. **14.** 130°. **15.** 45°. **16.** 55°. **17.** 3. **18.** 5. **19.** 18. **20.** 30°. **21.** 126°. **22.** 0,5. **23.** 1,5. **24.** 46°. **25.** 1,5.

$\boxed{8}$ **1.** 98. **2.** 45°. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 5. **6.** 46. **7.** 60°. **8.** 5. **9.** 2. **10.** В 27 раз. **11.** 8. **12.** 5. **13.** 4. **14.** 120. **15.** 8. **16.** 4,5. **17.** 18. **18.** 4,5. **19.** 4. **20.** 13. **21.** 16. **22.** 48. **23.** 3. **24.** 9. **25.** 128. **26.** 9. **27.** В 4 раза. **28.** 5. **29.** 8.

$\boxed{14}$ **1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.** 60°. **4.** 2. **5.** 1,5. **6.** 0,25. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **8.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **9.** 30°. **10.** 2. **11.** $\frac{6}{5}$. **12.** $\frac{2}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **15.** 5. **16.** 4. **17.** 2. **18.** $2\sqrt{7}$. **19.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **22.** 2 или 14.

$\boxed{16}$ **1.** $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $\frac{c}{2}\cdot\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. **2.** 1 : 2. **3.** 6. **4.** $2\sqrt{3}$. **5.** 45°. **6.** $8\sqrt{3}$ или 24. **7.** 75°, 60° и 45°; 120°, 15° и 45°; 105°, 45° и 30°; 135°, 30° и 15°. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{4}$. **11.** 3 и 5. **12.** 5. **13.** $\sqrt{21}$. **14.** 28 или $\sqrt{724}$. **15.** 90°. **16.** $2R$. **17.** 39 или 9. **18.** 2. **19.** 8 и 15. **20.** $\frac{\sqrt{2}a}{1+\sqrt{3}}$ и $\frac{2a}{1+\sqrt{3}}$. **21.** $2\sqrt{2}$. **22.** $a\sqrt{1+\frac{r}{R}}$ или $a\sqrt{1-\frac{r}{R}}$. **23.** $2+\frac{4\sqrt{2}}{3}$ или $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **24.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$. **25.** 105° или 165°. **26.** $\sqrt{35}+\sqrt{15}$ или $\sqrt{35}-\sqrt{15}$. **27.** $\frac{12}{5}$. **28.** 2,4; 16,9; 14,3. **29.** 150° и 210°. **30.** 1 или 7. **31.** $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. **32.** 45°. **33.** 1,44 или 36. **34.** $\frac{ab}{c}$. **35.** 1 : 1. **36.** $18\sqrt{2}$. **37.** 48. **38.** 60. **39.** $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$. **40.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **41.** 37,2. **42.** $\frac{4}{3}\sqrt{2}R^2$. **43.** $\frac{1323}{20}$.

## Предметный указатель

## Р



## С

# Оглавление

## Глава III
## Многогранники

## Глава IV
## **Цилиндр, конус и шар**



## Глава V
## **Объёмы тел**

## Глава VI
## Векторы в пространстве



## Глава VII
## Метод координат в пространстве. Движения

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

**Атанасян** Левон Сергеевич
**Бутузов** Валентин Фёдорович
**Кадомцев** Сергей Борисович
**Позняк** Эдуард Генрихович
**Киселёва** Людмила Сергеевна

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**

# ГЕОМЕТРИЯ
## 10—11 классы

**Учебник для общеобразовательных организаций**
**Базовый и углублённый уровни**

Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией **Е. В. Эргле**
Ответственный за выпуск **Л. В. Кузнецова**
Редактор **Л. В. Кузнецова**
Младший редактор **Е. А. Андреенкова**
Художники **О. М. Шмелёв, О. П. Богомолова**
Художественный редактор **Т. В. Глушкова**
Фотографии *ООО «Лори»*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка **А. Г. Хуторовской**
Корректоры **Т. А. Дич, Е. В. Павлова**

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 29.03.19. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,22. Тираж 60 000 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Смоленский полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1. Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru