

1 курс

**ПЛАН – КОНСПЕКТ**  
проведения вводного занятия по теме 1.3  
(к практическому занятию № 1)  
по дисциплине «Математика»

**Раздел 1. «Повторение курса математики основной школы.»**

**Тема № 1.3: «Геометрия на плоскости.»**

Подготовил: преподаватель  
В.Н. Борисов

### Тема № 1.3. «Геометрия на плоскости»

**Цели занятий:** повторить со студентами основные сведения по геометрии на плоскости, в том числе о видах плоских фигур, вычислении их площадей.

#### Основные вопросы:

1. Геометрия на плоскости: основные понятия, определения.
2. Виды плоских фигур и их площадь.

**Первый вопрос: Геометрия на плоскости: основные понятия, определения.**

#### Определение геометрии.

Название «геометрия» происходит от греческих слов «гео» — земля и «метрео» — измеряю. Геометрия берёт свое начало именно с измерений на земле, вычисления [площади](#) плодородных участков. Также астрологи рассчитывали расположение различных небесных объектов и светил.

Геометрия не есть изолированная отрасль, не пересекающаяся с другими разделами математики. Дело состоит ровно наоборот. Многие задачи из алгебры, [арифметики](#), математического анализа, теории дифференциальных уравнений, теоретической механики решаются как раз при помощи построений на плоскости и в пространстве, то есть путём применения геометрических методов. Более того, огромная часть [уравнений](#) решается геометрическим способом путем построений фигур или графиков функций.

Базовыми объектами в геометрии являются «точка», «луч», «прямая», «отрезок», «плоскость», «[угол](#)» и «фигура». Со своей стороны геометрия использует инструментарий алгебры и теории уравнений. Многие геометрические задачи на нахождение элементов фигур и [площадей](#) решаются путем сведения их к уравнениям. Геометрия также имеет дело и с [числами](#), как и любая другая часть математики.

#### Базовые понятия в геометрии

Всё начинается с точки. Это простейшее понятие в геометрии. «Точка» на плоскости или в пространстве представляет собой неделимый объект, который занимает заданное местоположение, иными словами, имеющий определённые координаты. Если две точки имеют одни и те же координаты, то эти точки совпадают. Сравнить точки между собой, как например мы сравниваем числа, какая из них больше или меньше, тяжелее или легче (как мы сравниваем массы предметов) в геометрии не имеет смысла. Все они равные или, иначе выражаясь, одинаковые, ни легче, ни тяжелее, ни меньше, не больше по размеру и весу. Поэтому точка — это некий абстрактный и типичный объект. Точки принято обозначать большими латинскими буквами А, В, С и др.

Если две точки не совпадают, их можно соединить линией. Линии бывают прямые или не прямые, то есть кривые. При этом две различные точки можно соединить только одной прямой, проходящей через эти точки.

Это является одной из основных аксиом геометрии. В самом деле, в классической геометрии [Евклида](#), если провести через две точки вторую линию, отличную от первой прямой, то это будет уже не прямая, а кривая. Данный факт не трудно представить и визуализировать на листе бумаги.

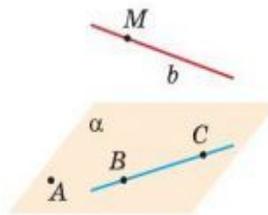
**Геометрия** — это раздел математики, который занимается изучением геометрических фигур, в том числе основные понятия и определения, свойства и признаки точек, линий, углов, двумерных и трехмерных объектов, а также их размеров и взаимного расположения.

Свойства фигур формулируются в виде аксиом и теорем.

- **Аксиома** — это утверждение, которое принимается без доказательства. Например: через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну.
- **Теорема** — это утверждение, которое требует доказательства. **Теорема** - верное утверждение, справедливость которой устанавливается путем логических рассуждений, которое называется доказательством. Доказательство каждой теоремы опирается на аксиомы и ранее доказанные теоремы. Например: на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой.

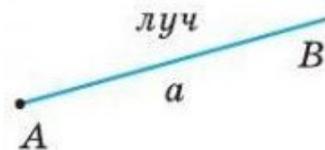
**Основные геометрические фигуры — точка, прямая и плоскость.** На рисунке:

- А, В, С, М - **точки**, обозначаются большой буквой,
- ВС (или СВ) и b - **прямые**, обозначаются двумя большими или одной малой буквой латинского алфавита.
- $\alpha$  (альфа) - **плоскость**, обозначается тремя большими буквами латинского или одной малой буквой греческого алфавита.



## Луч

**Луч** — это часть прямой, который состоит из точки (начало луча) и всех ее точек, лежащих по одну сторону от данной точки. То есть, то часть прямой, ограниченная одной точкой. Он обозначается одной малой буквой ( $b$ ) или двумя большими буквами ( $AB$ ), где первой всегда записывается начало луча. При этом вторая точка может быть не отмечена на луче.

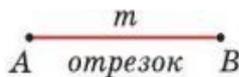


Два луча называются дополнительными (противоположными), если они имеют общее начало и лежат на одной прямой. На рисунке изображены дополнительные лучи  $OM$  и  $OK$ . Они дополняют друг друга до прямой.



## Отрезок

**Отрезок** - это часть прямой, ограниченная двумя точками. Точки, ограничивающие отрезок, принадлежат отрезку и называются концами отрезка, остальные точки отрезка — его внутренними точками. Обозначение:  $AB$  (или  $BA$ , или  $m$ ).

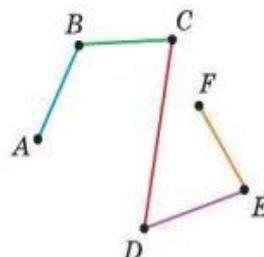


Расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки. Серединой отрезка называется точка, которая делит отрезок на два равных отрезка. На рисунке точка  $M$  — середина отрезка  $EF$ , то есть  $EM = MF$ .



## Ломаная

**Ломаной** называется геометрическая фигура, образованная отрезками, последовательно соединенными своими концами. На рисунке изображена ломаная  $ABCDEF$ . Указанные отрезки называются звеньями ломаной, а точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  — вершинами ломаной.



«**Угол**» представляет собой два луча, исходящих из одной точки. Углы делятся на острые (градусная мера менее 90 градусов), прямые (90 °), тупые (от 90 ° до 180 °), развернутые (180 °). Углы принято обозначать либо одной заглавной латинской буквой, обозначающей его вершину А, В, С и т. д. Либо тремя буквами ABC, MNK и т. п. Углы также принято измерять в радианах, при этом 180° это  $\pi$  радиан. 1 радиан — это центральный **угол**, длина дуги которого равна радиусу окружности. Пример угла в 1 радиан можно видеть на рисунке.



отрезки

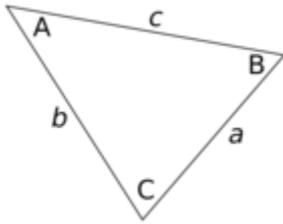
«**Отрезок**» — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Если одну точку принять за начало, а вторую точку принять за конец, то такой отрезок будет направленным и называться «вектором». Отрезки обозначаются двумя латинскими буквами, то есть обозначение начала и конца отрезка АВ, CD и т. п. Пример отрезков можно видеть на рисунке.

«**Плоскость**» — поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые её точки. Понятие, знакомое каждому, при этом столь же важное в геометрии как точка и прямая. Плоскости обычно обозначают греческими буквами  $\alpha$ ,  $\beta$  и др.

## **Второй вопрос: Виды плоских фигур и их площадь.**

Базовыми фигурами в геометрии на плоскости являются треугольник, четырёхугольник, многоугольник, окружность. В пространстве — это призма, пирамида, сфера, конус.

«**Треугольник**» — простейшая фигура в геометрии, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих вершины треугольника. Отрезки при этом будут называться сторонами треугольника. У треугольника три угла и три стороны. Поэтому можно выделить прямоугольные треугольники (один из углов — прямой), остроугольные треугольники (все углы — острые), тупоугольные треугольники (если один угол тупой). Замечательным свойством треугольника будет формула о сумме его углов, которая равна 180°. Иными словами, если  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы треугольника, то верно равенство  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .



### Треугольник ABC

Если классифицировать треугольники с позиции сторон, то треугольники делятся на равносторонние (все стороны равны), равнобедренные (две стороны из трех равны, но не равны третьей) и произвольные. В треугольнике против наибольшего угла лежит наибольшая сторона и наоборот. Огромное значение треугольники играют в геометрии благодаря тому, что почти любая фигура разбивается на треугольники каким-либо методом. Таким образом, чтобы уметь анализировать более сложные фигуры, нужно знать свойства треугольника.

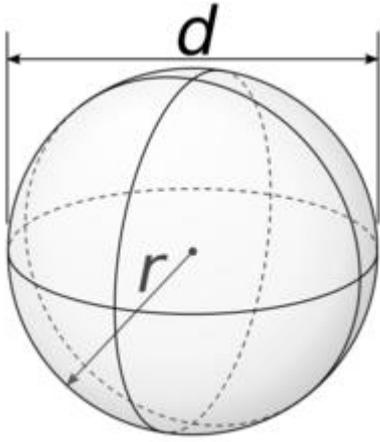
Базовое значение в геометрии играет [теорема Пифагора](#), которая гласит, что в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов. Для решения большинства задач в геометрии так или иначе используются [теорема Пифагора](#).

«**Четырёхугольник**» — фигура, состоящая из четырёх вершин и четырёх отрезков, последовательно соединяющих его вершины, являющихся его сторонами, при этом никакие три вершины не лежат на одной прямой. Последнее требование позволяет исключить вырожденные четырёхугольники, которые представляют собой треугольники или прямые. Важными представителями четырёхугольников являются параллелограмм и трапеция, поскольку почти все остальные четырёхугольники можно анализировать на основе их свойств.

- Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны.
- Трапеция — четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и две другие не параллельны.

Наиболее популярными четырёхугольниками на практике являются квадраты, прямоугольники и ромбы, которые уже определяются на основе параллелограммов.

- [Ромб](#) — четырёхугольник, у которого все стороны равны.
- Прямоугольник — четырёхугольник, у которого все углы прямые.
- [Квадрат](#) — четырёхугольник, у которого все углы прямые и все стороны равны.



Сфера с радиусом  $r$  и диаметром  $d$

Любой многоугольник уже разбивается на вышеописанные фигуры, поэтому его свойства можно изучать на основе рассмотренных фигур. Особняком стоит окружность или круг. Введение понятие «**окружности**» или «равноудалённости» значительно расширяет функционал и угол зрения геометрической [науки](#). В свою очередь широкое применение круга на практике заставляет геометров пристально изучать свойства окружности, чтобы найденные таким образом закономерности инженеры могли применить в промышленности и других практических областях.

**Окружность** — это множество точек одной плоскости, равноудаленных от одной точки (центра окружности). При этом расстояние от любой точки окружности до её центра называется радиусом окружности или круга. Термин круг используется, если требуется включить все точки внутри окружности в одну фигуру. Отсюда следует, что окружность в отличие от круга не имеет площади. Но окружность является границей круга.

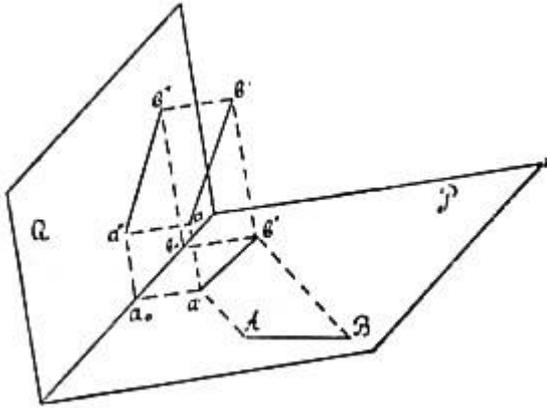
Если в определении окружности убрать требование на нахождение точек в одной плоскости, то получится сфера или шар.

- **Сфера** — это множество точек пространства, равноудаленных от одной точки (центра сферы). Сфера является границей шара.
- **Призма** — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками. Эти параллелограммы называются боковыми гранями призмы, а оставшиеся два многоугольника называются её верхними и нижними основаниями. Наиболее популярной призмой является куб.
- **Пирамида** — многогранник, основанием которого является многоугольник, а остальные грани представляют собой треугольники, имеющие общую вершину.
- **Конус** — геометрическая фигура в пространстве, образованная множеством лучей (образующих конуса), соединяющих все точки некоторой плоской кривой (направляющей конуса) с данной точкой пространства (вершиной конуса).

## Виды геометрии

Геометрия как наука в свою очередь делится на разделы и виды:

- Планиметрия — геометрия, в которой изучаются свойства фигур и объектов в рамках одной плоскости. В качестве примеров таких фигур можно указать названные выше треугольник, трапеция, окружность.



задача из начертательной геометрии

- Стереометрия — геометрия, в которой изучаются свойства фигур и объектов в трехмерном пространстве. Здесь большое внимание уделяется углу между плоскостями (двугранный угол), а также фигурам — шар, пирамида, призма и др.
- Аналитическая геометрия — геометрия, в которой для изучения свойств геометрических объектов и фигур используется инструментарий алгебры, а именно метод координат. Например, плоские фигуры изучаются путем введения двумерных координат для каждой точки. Пространственные фигуры из стереометрии анализируются путем введения координат.

Например, уравнением прямой на плоскости служит уравнение  $ax + by + c = 0$ . Имея две прямые и два уравнения, их описывающие, можно найти точку пересечения данных прямых или доказать их параллельность. Треугольник можно задать координатами его вершин, а далее найти расстояние по формуле нахождения расстояния между двумя точками. После нахождения длин сторон можно найти площадь треугольника по формуле Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $p$  — полупериметр треугольника. В аналитической геометрии существуют признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

- Начертательная геометрия — вид геометрии, где пространственные фигуры изучаются методом их проецирования на плоскости. Обычно такая геометрия изучается на инженерных специальностях в ВУЗах.
- Дифференциальная геометрия — это раздел высшей геометрии, где свойства фигур изучаются при помощи интегрального исчисления, при помощи инструментария линейной алгебры, дифференциальных уравнений. Основоположником данной геометрии является великий русский математик Н.И. Лобачевский (1792—1856)<sup>[4]</sup>. Данную геометрию

принято называть неевклидовой геометрией, где аксиома о том, что через точку вне прямой на данной плоскости проходит только одна прямая параллельная данной, не верна.

### Виды плоских фигур и их площадь.

Основные понятия геометрии – *геометрическое тело, поверхность, линия, точка*.

*Геометрическое тело* рассматривается вне физических свойств предмета. Считается, что оно может свободно перемещаться и изменять своё положение

среди других тел, не меняя размера, формы и взаимного расположения своих частей.

Тело отделяется *поверхностью* от прилегающих к нему других тел. У геометрической поверхности нет толщины.

При пересечении поверхностей образуется *линия*. У линии нет ширины.

При пересечении двух линий образуется *точка*. Точка не имеет никакого размера.

Простейшая из всех линий – *прямая*. Простейшая поверхность – *плоскость*.

*Фигурой на плоскости* называется всякое множество точек этой плоскости, содержащее хотя бы одну точку. Термин «фигура» происходит от латинского слова *figura*, что означает *образ, вид*.

*Треугольник* – это многоугольник, у которого три стороны. Треугольник относится к простейшим геометрическим фигурам. Очевидно, всякий треугольник является выпуклой фигурой.

Приведём иные определения треугольника:

1) Замкнутая ломаная линия, состоящая из трех звеньев, называется *треугольником*.

2) *Треугольник* – это многоугольник, у которого три стороны.

3) *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. При этом точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами* треугольника.

Основными элементами треугольника являются его *стороны* и *углы*.

Треугольники различаются между собой, во-первых, по характеру углов, а во-вторых, по характеру сторон.

По *характеру углов* выделяют следующие виды треугольников:

1) *остроугольный*, если все его углы острые;

2) *прямоугольный*, если один из его углов прямой; сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, а стороны, образующие прямой угол, катетами;

3) *тупоугольный*, если один из его углов тупой.

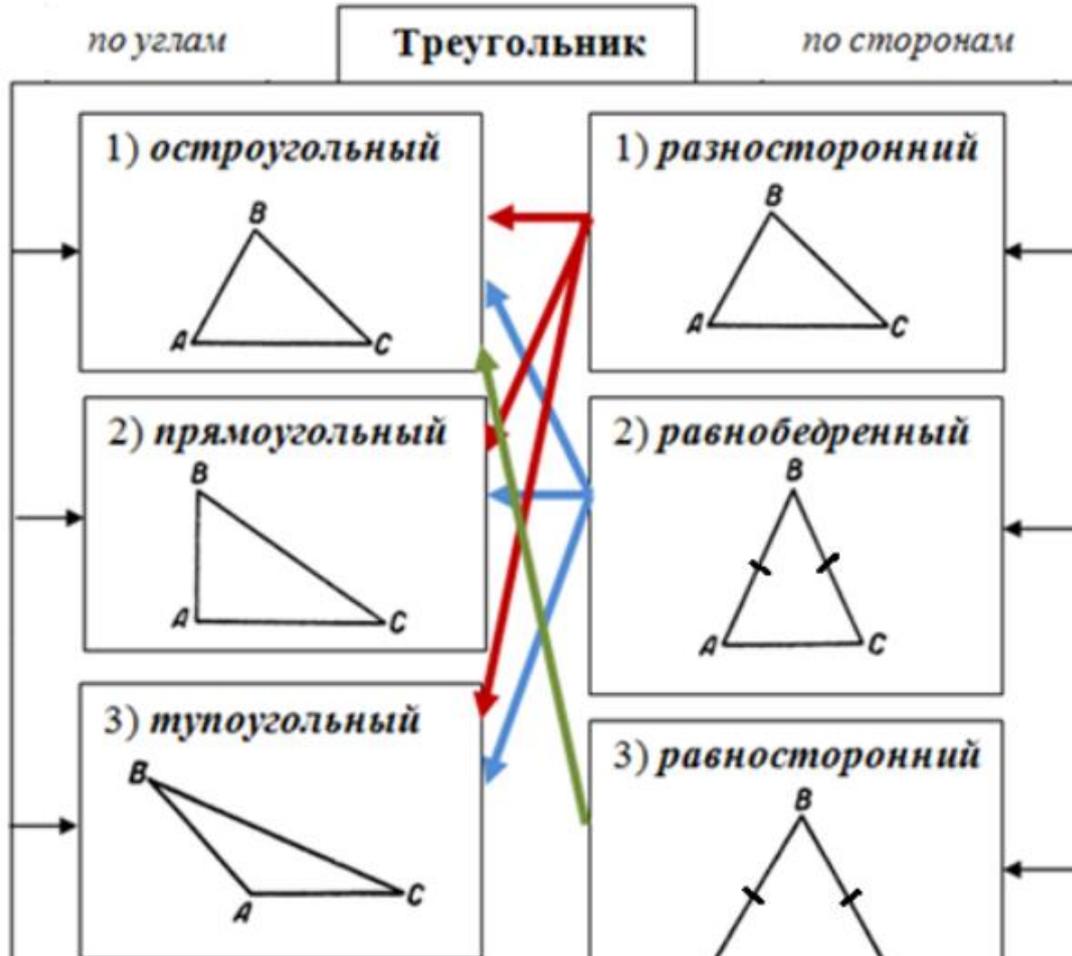
По характеру сторон классифицируют следующие виды треугольников:

1) *разносторонний*, если все его стороны имеют разную длину;

2) **равнобедренный**, если две его стороны равны между собой; сторона, не равная двум другим, называется **основанием**;

3) **равносторонний** (правильный), если все три его стороны имеют одинаковую длину.

Представим классификацию треугольников в виде схемы.



К основным линиям треугольника относятся: медиана, биссектриса, высота и серединный перпендикуляр.

**Медиана треугольника** – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

**Биссектриса треугольника** – это отрезок биссектрисы угла, который соединяет вершину угла с точкой, которая лежит на противолежащей стороне треугольника.

**Высота треугольника** – это перпендикуляр, который проведён из вершины фигуры к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

**Срединным перпендикуляром (медиатрисой)** треугольника называют прямую, которая проходит через середину отрезка (стороны треугольника) перпендикулярно ему.

Сведения о плоских фигурах, их площадях представлены в Приложении.