13. Планиметрия (Геометрия)

13. Планиметрия (Геометрия на плоскости)

Оглавление:

Основные теоретические сведения

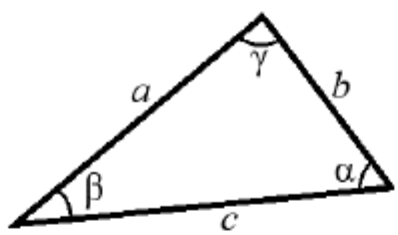
Треугольник

К оглавлению...

При решении задач по геометрии помимо всех геометрических формул и свойств, которые будут приведены ниже, нужно очень хорошо помнить основные формулы по тригонометрии (/index.php/materials/math/trigonometria#head11). Укажем для начала несколько основных свойств различных типов углов:

- Смежные углы в сумме равны 180 градусов.
- Вертикальные углы равны между собой.

Теперь перейдем к свойствам треугольника. Пусть имеется произвольный треугольник:



Тогда, **сумма углов треугольника**:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi \text{ рад}$$

Запомните также, что **сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны**. Площадь треугольника через две стороны и угол между ними:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Площадь треугольника через сторону и высоту опущенную на неё:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$$

Полупериметр треугольника находится по следующей формуле:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

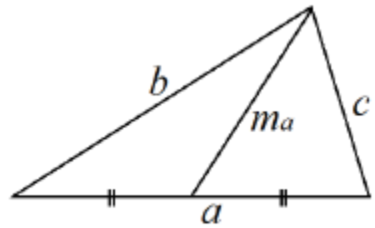
Формула Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Площадь треугольника через радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Формула медианы (медиана - линия проведенная через некоторую вершину и середину противоположной стороны в треугольнике):

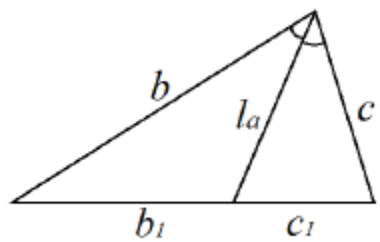


$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Свойства медиан:

- Все три медианы пересекаются в одной точке.
- Медианы делят треугольник на шесть треугольников одинаковой площади.
- В точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1, считая от вершин.

Свойство биссектрисы (биссектриса - линия, которая делит некоторый угол на два равных угла, т.е. пополам):



$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$$

Важно знать: **Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис** (все три биссектрисы пересекаются в этой одной точке). Формулы биссектрисы:

$$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$$

$$l_a = \frac{\sqrt{cb(b+c+a)(b+c-a)}}{c+b}$$

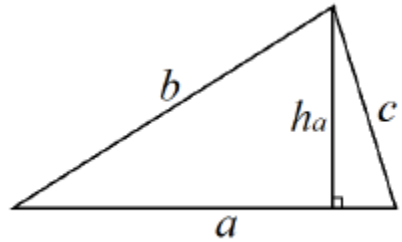
Основное свойство высот треугольника (высота в треугольнике - линия проходящая через некоторую вершину треугольника перпендикулярно противоположной стороне):

$$\frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$$

Все три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. Положение точки пересечения определяется типом треугольника:

- Если треугольник остроугольный, то точка пересечения высот находится внутри треугольника.
- В прямоугольном треугольнике высоты пересекаются в вершине прямого угла.
- Если треугольник тупоугольный, то точка пересечения высот находится за пределами треугольника.

Формула высоты:



$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Еще одно полезное свойство высот треугольника:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Центр окружности описанной около треугольника лежит на пересечении посерединных перпендикуляров. Все три посерединных перпендикуляра пересекаются в одной этой точке. Посерединный перпендикуляр - линия проведенная через середину стороны треугольника перпендикулярно ей.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Площадь правильного треугольника:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Теорема Пифагора для прямоугольного треугольника (*c* - гипотенуза, *a* и *b* - катеты):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

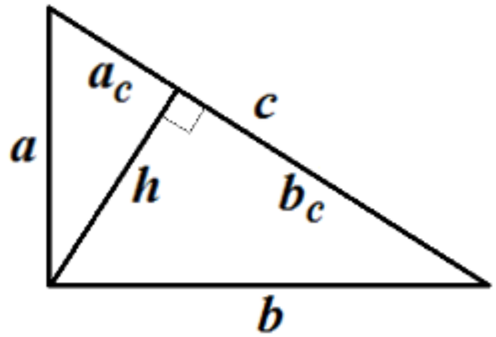
Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника:

$$R = \frac{c}{2}$$

Площадь прямоугольного треугольника (*h* - высота опущенная на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc$$

Свойства высоты, опущенной на гипотенузу прямоугольного треугольника:



$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = a_c \cdot c$$

$$b^2 = b_c \cdot c$$

Подобные треугольники - треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого. В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т.п.) пропорциональны. **Сходственные стороны** подобных треугольников - стороны, лежащие напротив равных углов. **Коэффициент подобия** - число *k*, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Отношение длин биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. **Признаки подобия треугольников:**

- По двум углам. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.
- По двум сторонам и углу между ними. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.
- По трём сторонам. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сходственным сторонам другого, то треугольники подобны.

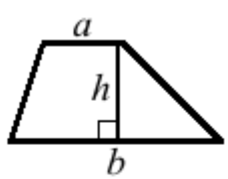
Трапеция

К оглавлению...

Трапеция - четырёхугольник, у которого ровно одна пара противолежащих сторон параллельна. Длина средней линии трапеции:

$$l = \frac{a+b}{2}$$

Площадь трапеции:



$$S = l \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Некоторые свойства трапеций:

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям.
- Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
- В трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон находятся на одной прямой.
- Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Треугольники, сторонами которых являются основания - подобны, а треугольники, сторонами которых являются боковые стороны - равновелики.
- Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90 градусов, то отрезок соединяющий середины оснований равен полуразности оснований.

- У равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.
- У равнобедренной трапеции диагонали равны.
- В равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка, один из которых равен полусумме оснований, другой - полуразности оснований.

Параллелограмм

К оглавлению...

Параллелограмм - это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых. Площадь параллелограмма через сторону и высоту опущенную на неё:

$$S = bh$$

Площадь параллелограмма через две стороны и угол между ними:

$$S = ab \cdot \sin \gamma$$

Некоторые свойства параллелограмма:

- Противоположные стороны параллелограмма равны.
- Противоположные углы параллелограмма равны.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180 градусов.
- Сумма всех углов параллелограмма равна 360 градусов.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон.

Квадрат

К оглавлению...

Квадрат - четырёхугольник, у которого все стороны равны, а все углы равны по 90 градусов. Площадь квадрата через длину его стороны:

$$S = a^2$$

Площадь квадрата через длину его диагонали:

$$S = \frac{1}{2} d^2$$

Свойства квадрата – это все свойства параллелограмма, ромба и прямоугольника одновременно.

Ромб и прямоугольник

К оглавлению...

Ромб - это параллелограмм, у которого все стороны равны. Площадь ромба (первая формула - через две диагонали, вторая - через длину стороны и угол между сторонами):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 = a^2 \sin \gamma$$

Свойства ромба:

- Ромб является параллелограммом. Его противолежащие стороны попарно параллельны.
- Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам.
- Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Прямоугольник - это параллелограмм, у которого все углы прямые (равны 90 градусам). Площадь прямоугольника через две смежные стороны:

$$S = ab$$

Свойства прямоугольника:

- Диагонали прямоугольника равны.

- Прямоугольник является параллелограммом - его противоположные стороны параллельны.
- Стороны прямоугольника являются одновременно его высотами.
- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его не противоположных сторон (по теореме Пифагора).
- Около любого прямоугольника можно описать окружность, причем диагональ прямоугольника равна диаметру описанной окружности.

Произвольные фигуры

К оглавлению...

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника через две диагонали и угол между ними:

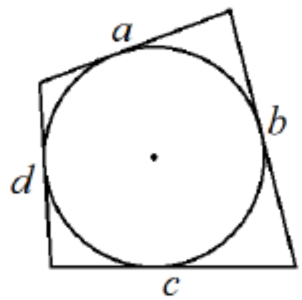
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

Связь площади произвольной фигуры, её полупериметра и радиуса вписанной окружности (очевидно, что формула выполняется только для фигур в которые можно вписать окружность, т.е. в том числе для **любых треугольников**):

$$\boldsymbol{S = p \cdot r} \qquad r = \frac{S}{p}$$

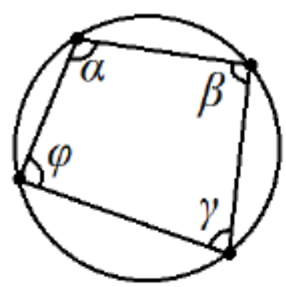
Обобщённая теорема Фалеса: Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки.

Условие, при выполнении которого возможно вписать окружность в четырёхугольник:



$$a + c = b + d$$

Условие, при выполнении которого возможно описать окружность вокруг четырёхугольника:



$$\alpha + \gamma = \beta + \varphi = 180°$$

Многоугольники

К оглавлению...

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, обладающий тем свойством, что все его точки лежат по одну сторону от любой прямой, проходящей через две его соседние вершины. **Сумма внутренних углов** плоского выпуклого n-угольника равна:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180° \cdot (n-2) = \pi \cdot (n-2) \text{ рад}$$

Число диагоналей всякого многоугольника равно (где: n – число сторон):

$$N_d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны и все углы между собой равны. **Внутренний угол правильного многоугольника** равен:

$$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$$

Центральный угол правильного *n*-угольника равен:

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n} \text{ рад}$$

Площадь правильного многоугольника с числом сторон *n*, длиной стороны *a*, радиусом описанной окружности *R*, полупериметром *p* и радиусом вписанной окружности *r*, может быть рассчитана по следующим формулам:

$$S = r \cdot p = \frac{n}{2} \cdot r \cdot a$$

$$S = \frac{n}{4} \cdot a^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

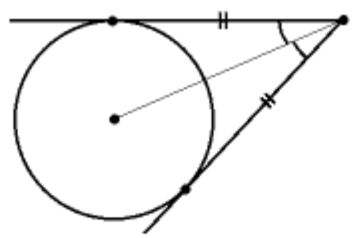
$$S = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$S = r^2 \cdot n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

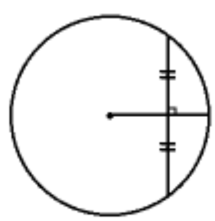
Окружность

К оглавлению...

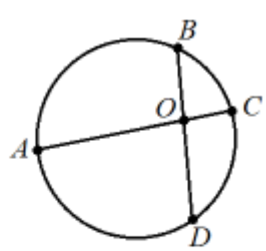
Свойство касательных:



Свойство хорды:

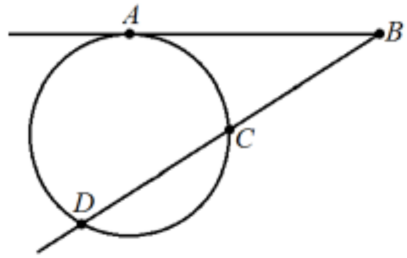


Теорема о пропорциональных отрезках хорд:



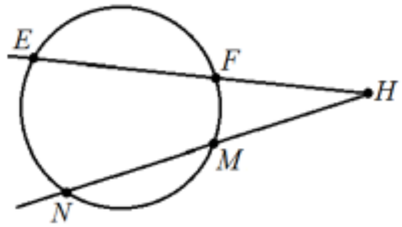
$$BO \cdot OD = AO \cdot OC$$

Теорема о касательной и секущей:



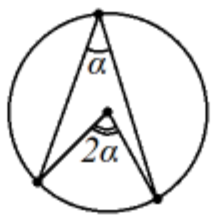
$$BA^2 = BC \cdot BD$$

Теорема о двух секущих:



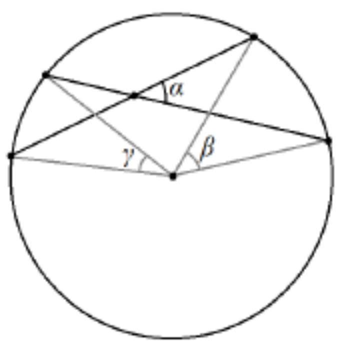
$$HF \cdot HE = HM \cdot HN$$

Теорема о центральном и вписанном углах (величина центрального угла в два раза больше величины вписанного угла, если они опираются на общую дугу):



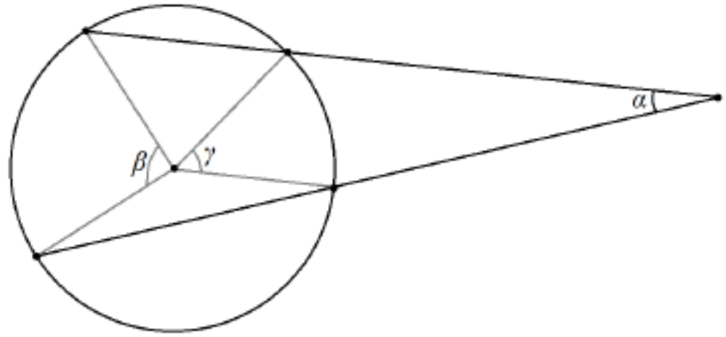
Свойство вписанных углов (все вписанные углы опирающиеся на общую дугу равны между собой):

Свойство центральных углов и хорд:



$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Свойство центральных углов и секущих:



$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Длина окружности:

$$L = 2\pi R$$

Длина дуги окружности:

$$L_{\text{дуги}} = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha_{\text{град}}}{180} = \alpha_{\text{рад}} R$$

Площадь круга:

$$S = \pi R^2$$

Площадь сектора:

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha_{\text{град}}}{360} = \frac{\alpha_{\text{рад}} R^2}{2}$$

Площадь кольца:

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Площадь кругового сегмента:

$$S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

Назад (/index.php/materials/math/progressii) Вперёд (/index.php/materials/math/stereometria)

Как успешно подготовиться к ЦТ по физике и математике?

Для того чтобы успешно подготовиться к ЦТ (/index.php/inform/ct) по физике и математике, среди прочего, необходимо выполнить три важнейших условия:

1. Изучить все темы и выполнить все тесты и задания приведенные в учебных материалах (/index.php/materials) на этом сайте. Для этого нужно всего ничего, а именно: посвящать подготовке к ЦТ по физике и математике, изучению теории и решению задач по три-четыре часа каждый день. Дело в том, что ЦТ это экзамен, где мало просто знать физику или математику, нужно еще уметь быстро и без сбоев решать большое количество задач по разным темам и различной сложности. Последнему научиться можно только решив тысячи задач.
2. Выучить все формулы и законы в физике, и формулы и методы в математике (/index.php/formuly). На самом деле, выполнить это тоже очень просто, необходимых формул по физике всего около 200 штук, а по математике даже чуть меньше. В каждом из этих предметов есть около десятка стандартных методов решения задач базового уровня сложности, которые тоже вполне можно выучить, и таким образом, совершенно на автомате и без затруднений решить в нужный момент большую часть ЦТ. После этого Вам останется подумать только над самыми сложными задачами.
3. Посетить все три этапа репетиционного тестирования (/index.php/inform/rt) по физике и математике. Каждый РТ можно посещать по два раза, чтобы прорешать оба варианта. Опять же на ЦТ, кроме умения быстро и качественно решать задачи, и знания формул и методов необходимо также уметь правильно спланировать время,