АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ХАНТЫ-МАНСИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА-ЮГРЫ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ»

Задачи по планиметрии с комментариями и решениями (часть 1)

Ханты-Мансийск
2014

ББК 74.262.21
Д 64

Рекомендовано Научно-методическим советом
АУ «Институт развития образования»
Протокол №5 от 30.10.2014 г.

Рецензенты:
С. Г. Пятков - заведующий кафедрой высшей математики ГОУ ВПО «Югорский государственный университет», доктор физико-математических наук, профессор.

Д 64 **Задачи по планиметрии с комментариями и решениями (часть 1)** / авт.-сост. И. В. Долженко. – Ханты-Мансийск: редакционно-издательский отдел АУ «Институт развития образования», 2014. – 60 с.

ISBN 978-5-94611-213-0

Актуальность темы в том, что использование рассмотренных в данной работе материалов позволят школьникам приступать к решению многовариантных планиметрических задач. Часть 1 посвящена подборке теоретических материалов необходимых для решения таких задач и разбору некоторых случаев многовариантности в планиметрии.

Пособие адресовано как учителям математики общеобразовательных учреждений ХМАО-Югры, так и школьникам для самостоятельной подготовки к ЕГЭ.

ISBN 978-5-94611-213-0

ББК 74.262.21

Оглавление

Введение

Решение планиметрических задач (**Планиметрия** (от лат. planum — плоскость и метрия) - часть элементарной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, лежащих в плоскости) очень часто вызывает трудности у выпускников средней школы, поскольку требует наличия хорошего воображения объектов, составляющих задачу. В школьном курсе геометрии упор делается на задачи, имеющие единственное решение. Однако начиная с 2010 года в экзаменационных работах ЕГЭ планиметрические задачи (С4) содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате построения получается несколько чертежей, удовлетворяющих условию задачи. Подобные задачи называют *многовариантными*. Перебор вариантов является частью решения задач такого типа. Заметим, что перебор может сократиться за счет дополнительной информации, указанной в условии задачи, что нередко оказывается серьезной проблемой даже для хорошо подготовленных учеников. К решению задачи С4 обычно приступает от 10 до 15 % выпускников, но решить задание полностью удается не более четверти от них. Большинство выпускников испытывали трудности с рассмотрением второго случая расположения геометрических фигур.

При проверке задачи С4 выставление баллов производится в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**3**

В данном пособии рассматриваются примеры многовариантных планиметрических задач, включающих в себя большую часть, необходимой при подготовке к экзамену информации.

Итак, что же нужно, чтобы решать задачи:

- внимательно прочитать условие задачи;

- построить чертеж, соответствующий условию (по возможности, наиболее наглядный);
- дать характеристику фигуре, вспомнить определение, свойства, признаки;
- определить зависимости между элементами;
- рассуждать от вопроса задачи, постепенно используя данные условия.

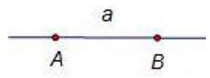
Необходимым (но, конечно, не достаточным) условием является безупречное знание и понимание основных теорем планиметрии. Они потребуются для доказательств, которые непременно сопровождают решение практически любой задачи С4, без которых часть баллов за это задание на экзамене может быть потеряна. Ниже приведем формулировки основных понятий и теорем.

1. Основные понятия, обозначения и изображения

Точка - это основная и самая простая геометрическая фигура.

Точка обозначается заглавной латинской буквой. Например, точка A.

Прямая (прямая линия) - это бесконечная линия, по которой проходит кратчайший путь между любыми двумя её точками.



Прямая однозначно определяется любой парой точек, принадлежащих этой прямой. Прямая обозначается двумя заглавными латинскими буквами или строчной латинской буквой. Например, прямая AB или a.

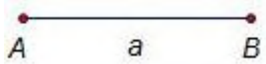
Луч (***полупрямая***) - это часть прямой линии, которая расположена по одну сторону от какой-либо точки. У луча есть начало, но нет конца.

Луч обозначается двумя заглавными латинскими буквами, причем первая точка - начало луча, а вторая точка лежит на луче. Например, луч AB.

Любая прямая разбивается произвольной точкой на две ***полупрямые,*** которые называют ***дополнительными полупрямыми.***

Отрезок - это часть прямой линии, которая ограничена двумя точками (концами отрезка). ***Длина отрезка*** - это расстояние между его концами.

Отрезок обозначается заглавными латинскими буквами. Например, отрезок AB. Длина отрезка обозначается строчной латинской буквой. Например, $AB =$ а.



В планиметрических задачах геометрической фигурой называют конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности.

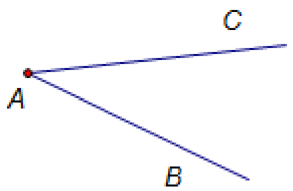
Линейной считают фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую.

Плоской геометрической фигурой называют любую совокупность точек и линий на плоскости.

Угол - это геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки. ***Вершина угла*** - это точка, в которой два луча берут начало. ***Стороны угла*** - это лучи, которые образуют угол.

Угол обозначается символом $\angle$ и тремя заглавными латинскими буквами, которыми обозначены вершина и две точки, расположенные на сторонах угла.

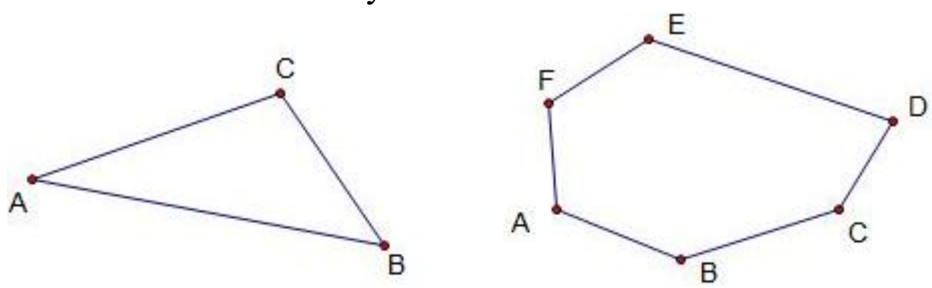
Угол можно обозначать с любого края, но не с вершины. Возможно так же обозначение угла одной заглавной латинской буквой, соответствующей вершине угла. Например, $\angle BAC$ или $\angle CAB$, $\angle A$.



Каждый угол имеет определенную **меру**, большую нуля. Меру $\angle BAC$ обозначают символом $\widehat{BAC}$ или строчной греческой буквой. Обычно угол измеряют в градусах или в радианах. Для обозначения градуса используют символ °. Например, $\widehat{BAC} = \alpha = 40°$. Для обозначения радианной меры используют число π, соответствующее 180°, т.е. π=180°.

Многоугольником называют плоскую геометрическую фигуру, ограниченную со всех сторон замкнутой ломаной линией, состоящая из трех и более отрезков.

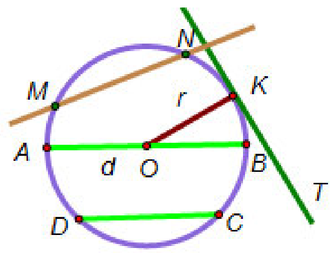
Любой многоугольник однозначно определяется своими вершинами и, соответственно, обозначается последовательным их перечислением, например треугольник *ABC* или шестиугольник *ABCDEF*.



Окружностью называется замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра окружности), которая лежит в той же плоскости, что и кривая. ***Кругом*** называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Отрезок *r*, который соединяет ***центр окружности*** *O* с любой её точкой (а также длина этого отрезка), называется ***радиусом***.

Отрезок *DC*, который соединяет какие-либо две точки окружности, называется ***хордой***.



Хорда *AB*, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром***.

Диаметр – наибольшая хорда данной окружности. Наименьшей хорды окружности не существует.

Дугой называется часть окружности, расположенная между двумя её точками.

Касательной к окружности называется прямая *KT*, имеющая с окружностью одну общую точку.

Секущей называется прямая *MN*, пересекающая окружность. Секущая всегда имеет две общие точки с окружностью.

2. Основные определения и теоремы планиметрии

2.1. Углы на плоскости

Развернутый угол – это угол, стороны которого лежат на одной прямой и не совпадают, т.е. являются дополнительными полупрямыми (см. рис. 2.1.1): $\alpha = 180°= \pi$.

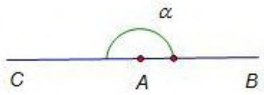


Рис. 2.1.1.

Прямой угол – это угол, равный половине развернутого угла (см. рис. 2.1.2.1): $\alpha = 90°=\frac{\pi}{2}$.

Острый угол – это угол, который меньше прямого (см. рис. 2.1.2.2): $0° < \alpha < 90° = \frac{\pi}{2}$.

Тупой угол – это угол, который больше прямого, но меньше развернутого (см. рис. 2.1.2.3): $90° < \alpha < 180° = 2\pi$.

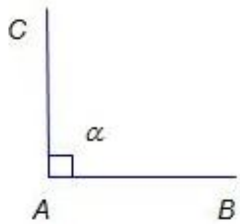


Рис. 2.1.2.1.

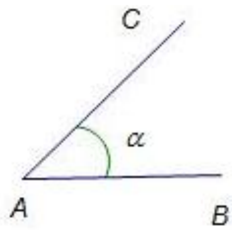


Рис. 2.1.2.2.

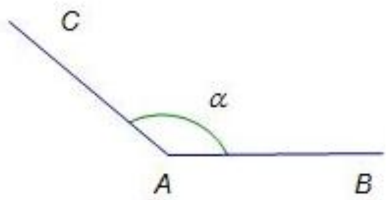


Рис. 2.1.2.3.

Смежные углы - два угла, у которых одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

Теорема. Смежные углы в сумме составляют 180° или π радиан (см. рис. 2.1.3):

$$\alpha + \beta = 180° = \pi.$$

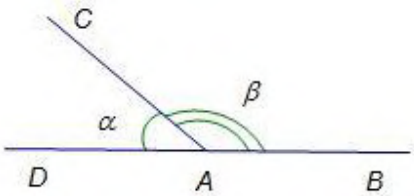


Рис. 2.1.3.

Вертикальные углы **-** два угла, у которых стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

Теорема. Вертикальные углы равны (см. рис. 2.1.4): $\alpha = \beta$.

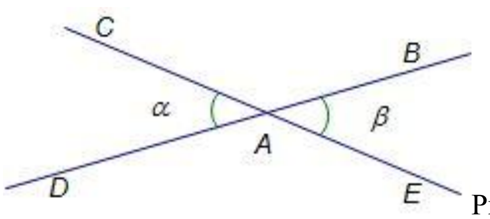


Рис. 2.1.4.

Теорема. Углы, у которых стороны попарно параллельны, либо равны либо смежные. $\alpha = \beta$ (см. рис. 2.1.5.1) или $\alpha + \beta = 180° = 2\pi$ (см. рис. 2.1.5.2).

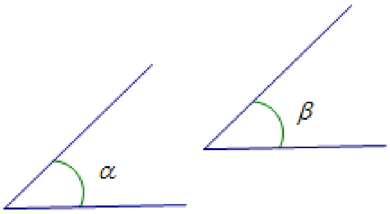


Рис. 2.1.5.1.

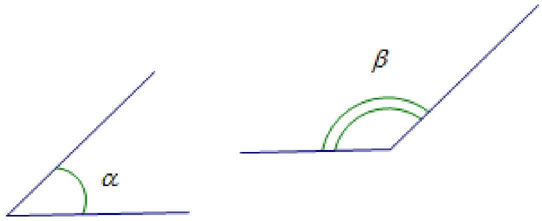


Рис. 2.1.5.2.

Теорема. Углы, у которых стороны попарно перпендикулярны, либо равны, либо составляют в сумме 180° или π радиан: $\alpha = \beta$ (см. рис. 2.1.6.1) или $\alpha + \beta = 180° = \pi$ (см. рис. 2.1.6.2).

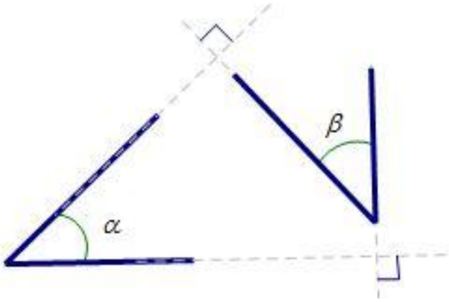


Рис. 2.1.6.1.

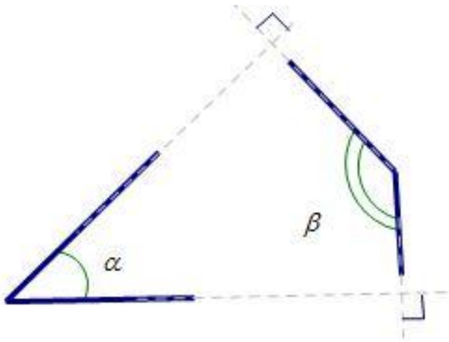


Рис. 2.1.6.2.

2.2. Прямые на плоскости

2.2.1. Параллельные прямые

Две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

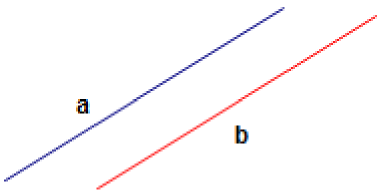


Рис. 2.2.1.

$$a \parallel b.$$

Признаки параллельности двух прямых

Теорема. Если при пересечении двух прямых третьей:

1) соответственные углы равны (см. рис. 2.2.2.1), или
2) накрест лежащие углы равны (см. рис. 2.2.2.1 и 2.2.2.3), или

3) сумма односторонних углов равна $180° = \pi$ (см. рис. 2.2.2.4 и 2.2.2.5),

то прямые параллельны.

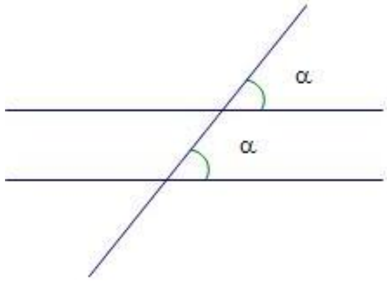


Рис. 2.2.2.1.

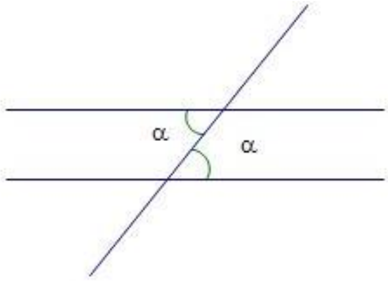


Рис. 2.2.2.2.

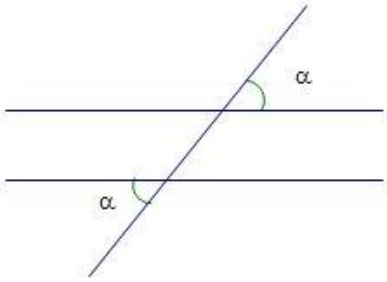


Рис. 2.2.2.3.

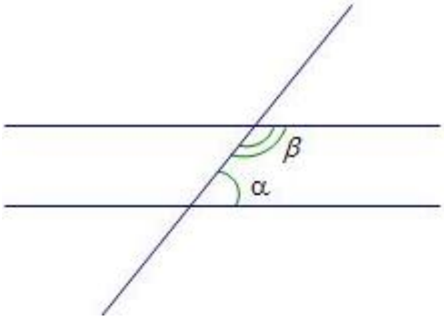


Рис. 2.2.2.4.

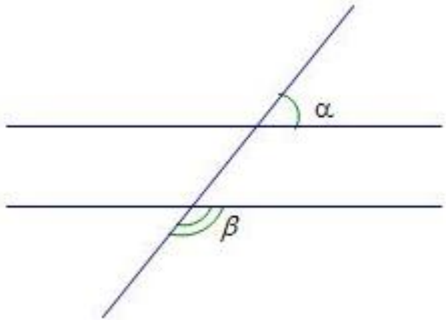


Рис. 2.2.2.5.

Верно и **обратное.**

Свойства параллельных прямых

Две различные прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны (см. рис. 2.2.3.1): $(a \parallel c, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$.

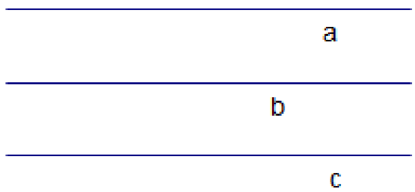


Рис. 2.2.3.1.

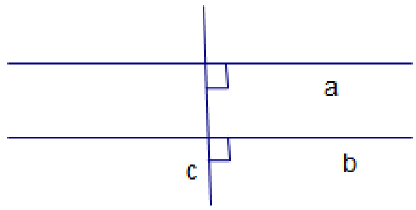


Рис. 2.2.3.2.

Две различные прямые на плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны (см. рис. 2.2.3.2): $(a \perp c, b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$.

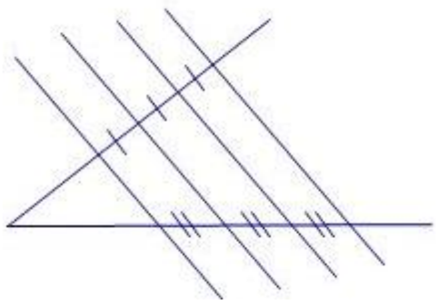


Рис. 2.2.4.1.

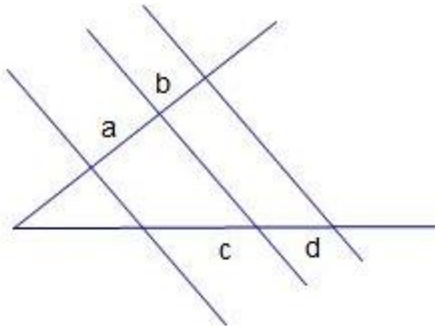


Рис. 2.2.4.2.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (см. рис. 2.2.4.1).

Верно и **обратное**. Если некоторые прямые, не пересекающиеся внутри угла, отсекают на одной стороне угла равные между собой отрезки и на другой стороне угла тоже равные между собой отрезки, то такие прямые параллельны.

Теорема. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки (см. рис. 2.2.4.2): $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2.2.2. Перпендикуляр и наклонные

Перпендикуляром, проведенным из некоторой точки до заданной прямой, называется отрезок, лежащий на прямой, перпендикулярной заданной прямой и с концами в заданной точке, и точки, лежащей на заданной прямой.

Наклонная - любой отрезок, проведенный из точки на прямую, отличный от перпендикуляра.

Отрезок, соединяющий конец перпендикуляра и наклонной к прямой, проведенных из одной точки, называется **проекцией** наклонной на прямую.

Теорема. ***Свойства перпендикуляра и наклонной.*** Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то (см. рис. 2.2.5):

а) любая наклонная больше перпендикуляра;

б) равные наклонные имеют равные проекции (и обратно);

в) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше (и обратно).

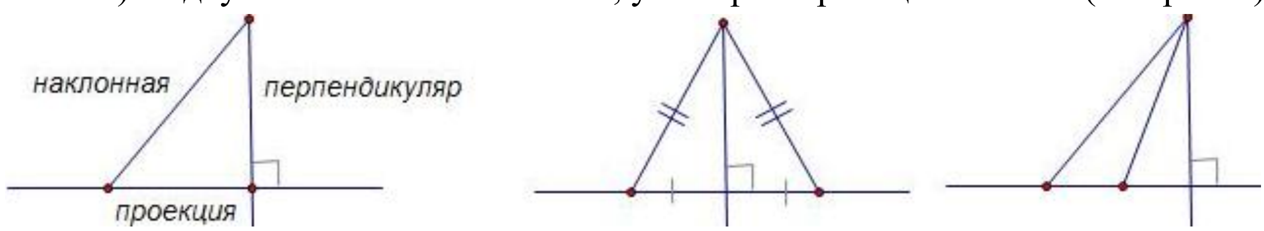


Рис. 2.2.5.

2.3. Треугольники

2.3.1. Произвольный треугольник

Треугольник – это геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой (вершин треугольника) и трёх отрезков с концами в этих точках (сторон треугольника).

Углами (внутренними углами) треугольника называются три угла, каждый из которых образован лучами, выходящими из вершин треугольника и проходящими через две другие вершины.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный внутреннему углы треугольника.

Периметром треугольника называется сумма длин всех сторон (см. рис. 2.3.1):

$$P = \mathrm{a} + b + c.$$

Полупериметром треугольника называется полусумма длин всех сторон:

$$P = \frac{\mathrm{a}+b+c}{2}.$$

2.3.2. Соотношения между сторонами и углами

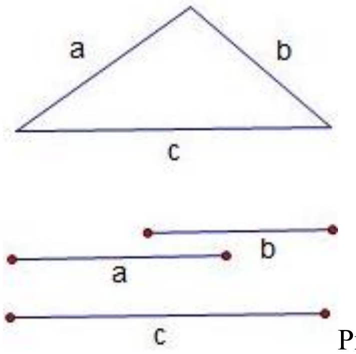


Рис. 2.3.1.

Теорема. Длина каждой стороны треугольника больше разности и меньше суммы длин двух других сторон:

$$|\mathrm{a} - b| < c < a + b;$$
$$|b - c| < a < b + c;$$
$$|c - \mathrm{a}| < b < c + \mathrm{a}.$$

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180° или π радиан:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \text{ или } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Теорема. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол (см. рис. 2.3.2.1):

$$\gamma > \alpha \Leftrightarrow \mathrm{c} > a.$$

Теорема. В треугольнике против равных углов лежат равные стороны и наоборот:

$$\gamma = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{c} = \mathrm{a}.$$

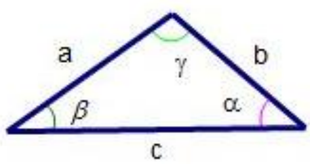


Рис. 2.3.2.1.

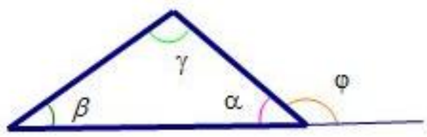


Рис. 2.3.2.2.

Теорема. Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, и больше любого внутреннего, с ним не смежного (см. рис. 2.3.2.2):

$$\varphi = \beta + \gamma; \; \varphi > \beta; \; \varphi > \gamma.$$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника ABC равен сумме квадратов двух других без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

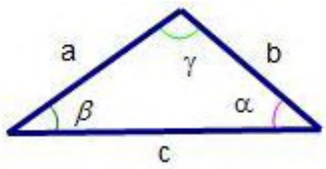


Рис. 2.3.3.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (см. рис. 2.3.4):

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

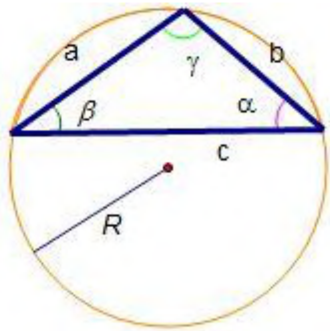


Рис. 2.3.4.

2.3.2.1. Признаки равенства треугольников

Треугольники называются ***равными***, если у них соответственные стороны равны и соответственные углы равны.

Первый признак равенства треугольников – ***по двум сторонам и углу между ними***. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны (см. рис. 2.3.5).

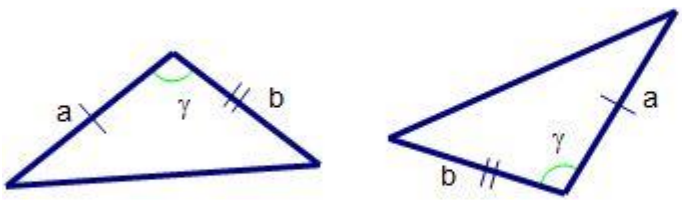


Рис. 2.3.5.

Второй признак равенства треугольников – ***по стороне и двум к ней прилежащим углам.*** Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (см. рис. 2.3.6).

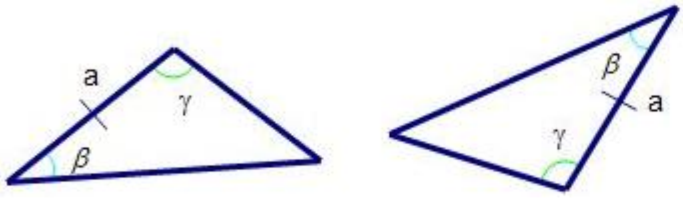


Рис. 2.3.6.

Третий признак равенства треугольников – ***по трем сторонам.*** Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (см. рис. 2.3.7).

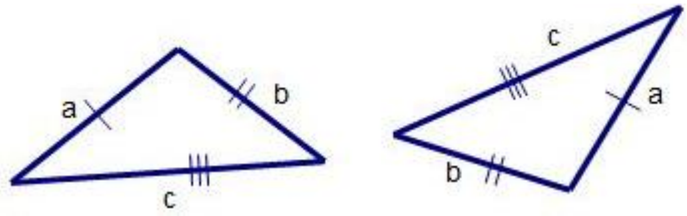


Рис. 2.3.7.

2.3.2.2. Признаки подобия треугольников

Треугольники называются ***подобными***, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника.

Для обозначения подобия используют символ ~. Например, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Первый признак подобия треугольников – ***по двум сторонам и углу между ними.*** Если в двух треугольниках две пары сторон пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны (см. рис. 2.3.8).

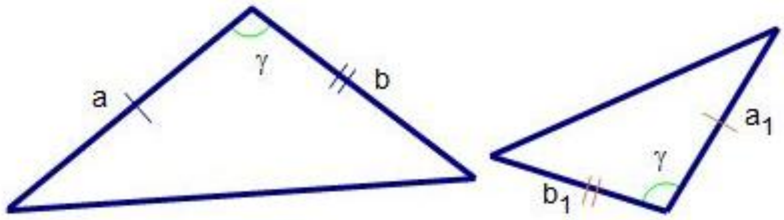


Рис. 2.3.8.

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_1} = \frac{b}{b_1} = \kappa,$$

где κ - коэффициент подобия.

Второй признак подобия треугольников – ***по двум углам***. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны (см. рис. 2.3.9).

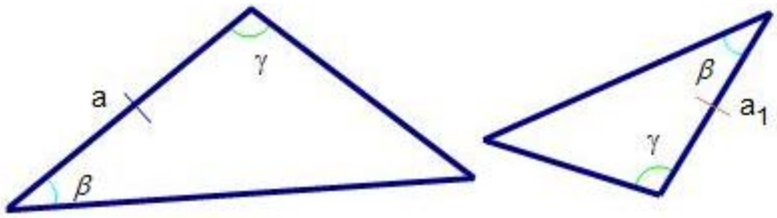


Рис. 2.3.9.

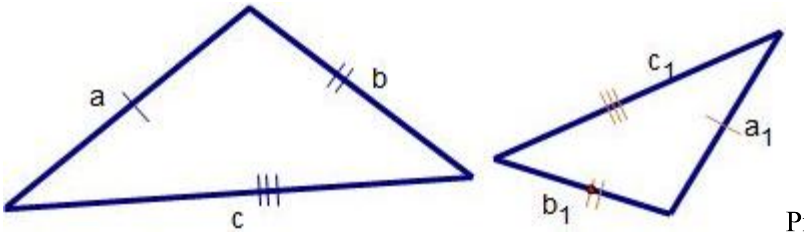


Рис. 2.3.10.

Третий признак подобия треугольников – ***по трем сторонам.*** Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны (см. рис. 2.3.10).

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = к.$$

Обобщенная теорема подобия. Если два треугольника подобны, то любой линейный элемент (или сумма линейных элементов) одного треугольника относится к соответствующему линейному элементу (или сумме соответствующих линейных элементов) другого треугольника как соответственные стороны.

Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны треугольника, отсекает треугольник, подобный данному (см. рис. 2.3.11).

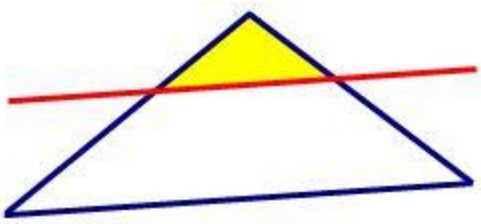


Рис. 2.3.11.

2.3.2.3. Замечательные линии треугольника

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (см. рис. 2.3.12.1).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны треугольника (см. рис. 2.3.12.2).

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение (см. рис. 2.3.12.3).

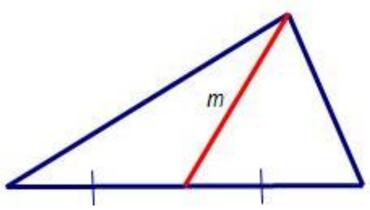


Рис. 2.3.12.1.

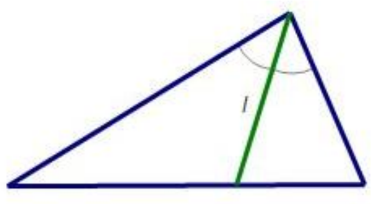


Рис. 2.3.12.2.

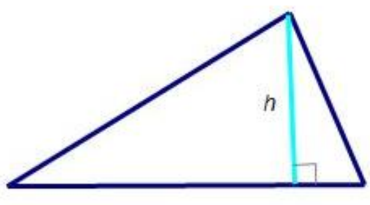


Рис. 2.3.12.3.

Теорема ***(взаимное расположение медианы, биссектрисы и высоты).*** Биссектриса произвольного треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, проведенными из той же вершины (см. рис. 2.3.13.1).

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают (см. рис. 2.3.13.2).

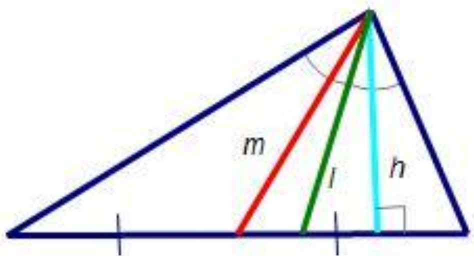


Рис. 2.3.13.1.

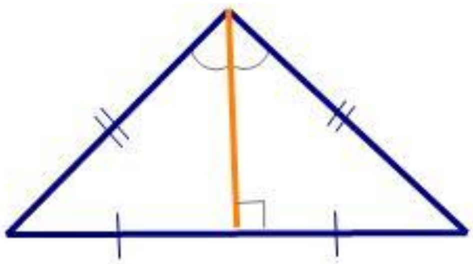


Рис. 2.3.13.2.

Серединный перпендикуляр – прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам (см. рис. 2.3.14.1).

Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника (см. рис. 2.3.14.2).

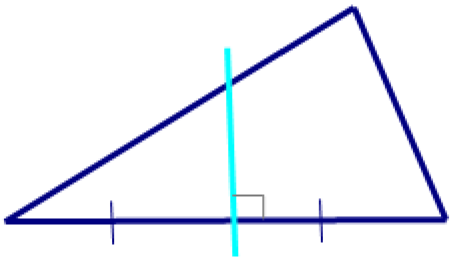


Рис. 2.3.14.1.

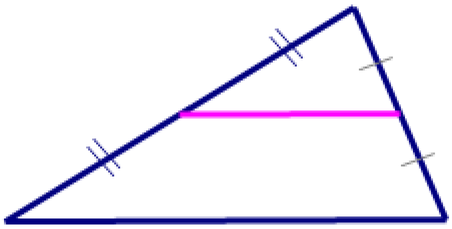


Рис. 2.3.14.2.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины (см. рис. 2.3.15). Эта точка называется ***центром тяжести*** треугольника.

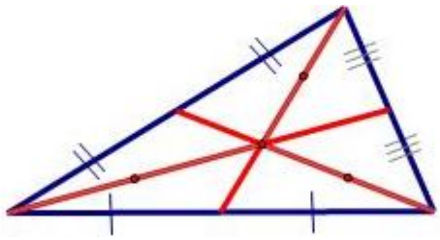


Рис. 2.3.15.

Теорема. Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих (одинаковой площади) треугольника (см. рис. 2.3.16.1 - 2.3.16.3).

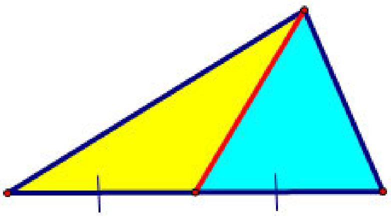


Рис. 2.3.16.1.

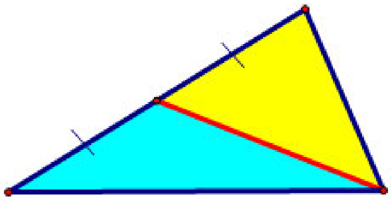


Рис. 2.3.16.2.

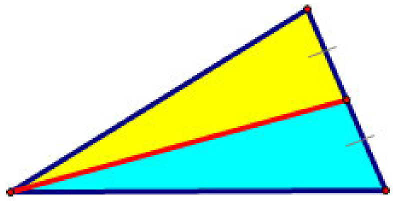


Рис. 2.3.16.3.

Теорема. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих (одинаковой площади) треугольников (см. рис. 2.3.17).

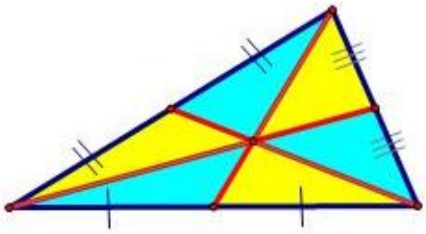


Рис. 2.3.17.

Теорема. Длины медиан, проведённых к соответствующим сторонам треугольника, равны:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

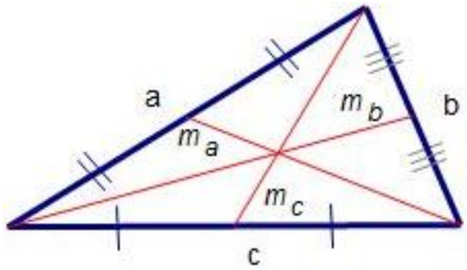


Рис. 2.3.18.

Свойства биссектрис

Теорема. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, находящейся внутри треугольника, равноудалённой от трёх его сторон, которая является центром окружности, вписанной в данный треугольник (см. рис. 2.3.18.1).

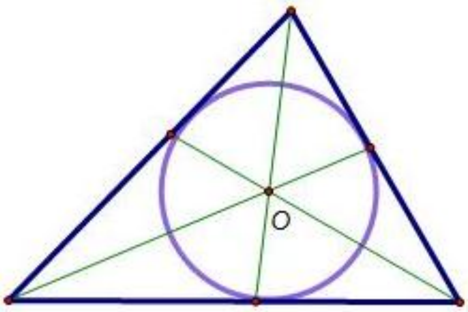


Рис. 2.3.18.1.

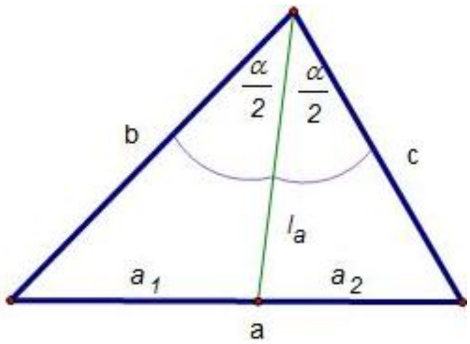


Рис. 2.3.18.2.

Теорема. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую углу сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам (см. рис. 2.3.18.2):

$$\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{a}_2} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}.$$

Длина биссектрисы:

$$l_\mathrm{a} = \frac{2bc\ \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c};$$

$$l_\mathrm{a}^2 = bc - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2;$$

$$l_\mathrm{a} = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(\mathrm{a} + b + c)(b + c - \mathrm{a})}.$$

Теорема. Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла перпендикулярны. Биссектриса внешнего угла треугольника делит (внешне) противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

CE – биссектриса угла C; CD – биссектриса внешнего угла C (см. рис. 2.3.19):

$$CE \perp CD; \ \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

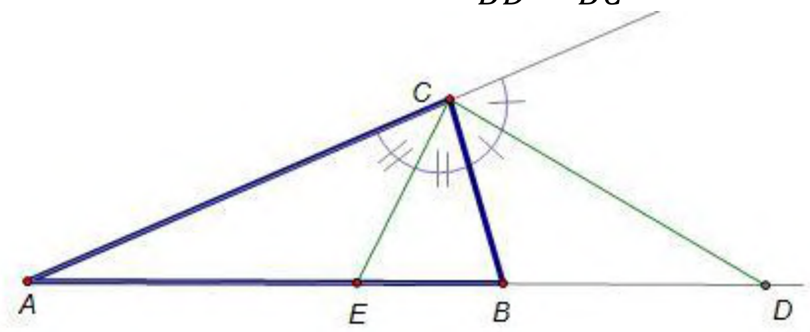


Рис. 2.3.19.

Свойства высот

Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется ***ортоцентром*** треугольника.

Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (см. рис. 2.3.20.1). Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямоугольного угла (см. рис. 2.3.20.2). Ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (см. рис. 2.3.20.3).

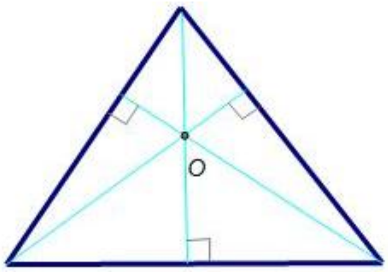


Рис. 2.3.20.1.

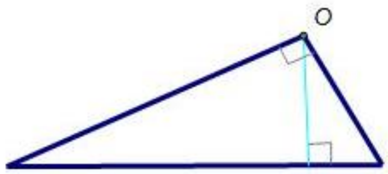


Рис. 2.3.20.2.

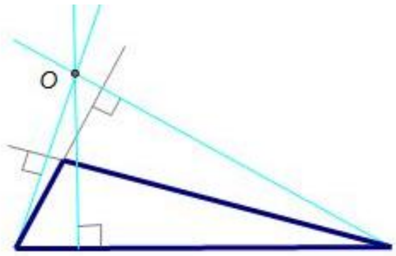


Рис. 2.3.20.3.

Теорема. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам (см. рис. 2.3.21.1):

$$h_{\mathrm{a}} : h_b : h_c = \frac{1}{\mathrm{a}} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

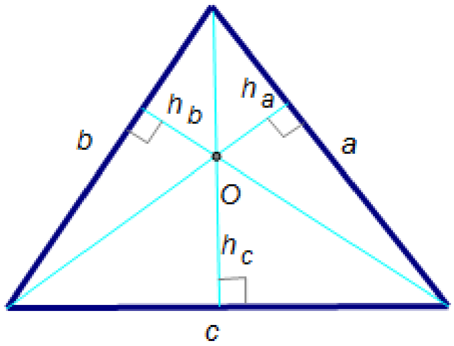


Рис. 2.3.21.1.

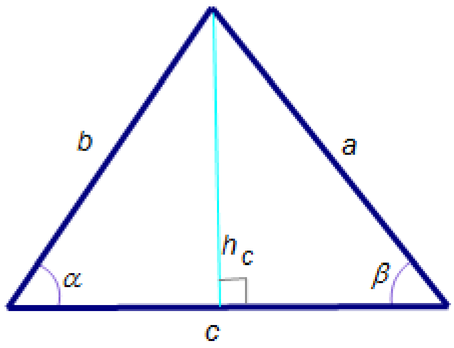


Рис. 2.3.21.2.

Теорема. Длина высоты, проведённой к стороне c (см. рис. 2.3.21.2):

$$h_c = b\sin\alpha = \mathrm{a}\sin\beta;$$

$$h_c = \frac{\mathrm{a}b}{2R};$$

$$h_c = \frac{2S}{\mathrm{a}} = \frac{2\sqrt{p(p-\mathrm{a})(p-b)(p-c)}}{\mathrm{a}},$$

где R – радиус описанной окружности, S – площадь треугольника, p – полупериметр.

Свойства серединных перпендикуляров

Теорема. Если какая-нибудь точка лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка, то она одинаково удалена от концов этого отрезка (и обратно).

Теорема. Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около данного треугольника.

Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (см. рис. 2.3.22.1). Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника совпадает с серединой гипотенузы (см. рис. 2.3.22.2). Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (см. рис. 2.3.22.3).

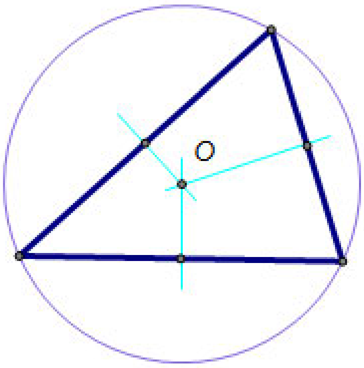


Рис. 2.3.22.1.

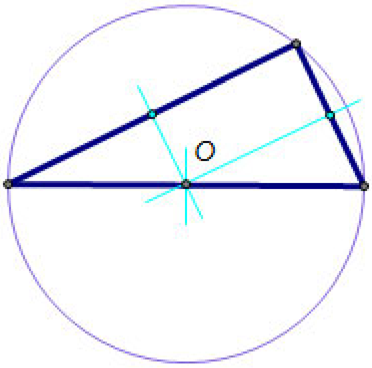


Рис. 2.3.22.2.

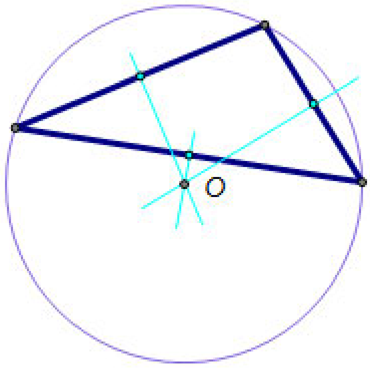


Рис. 2.3.22.3.

Теорема. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром противолежащей стороны лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

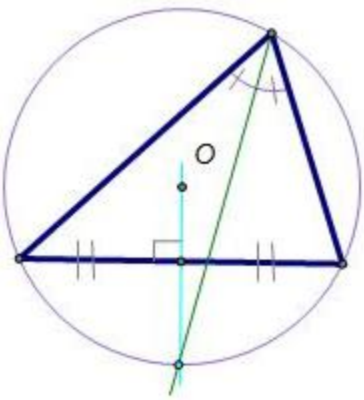


Рис. 2.3.23.

Свойства средней линии

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине (см. рис. 2.3.24.1):

$$EF \parallel AB,\ EF = \frac{1}{2}AB.$$

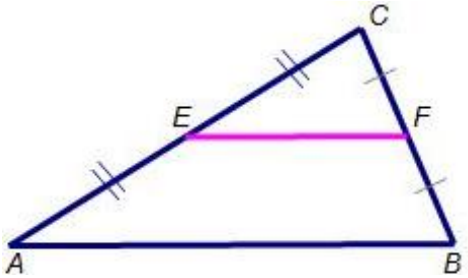


Рис. 2.3.24.1.

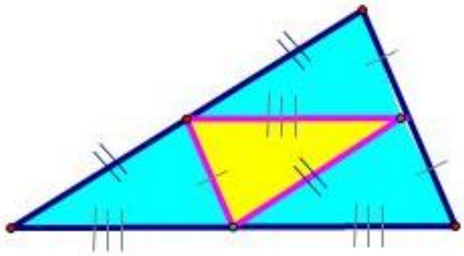


Рис. 2.3.24.2.

Средняя линия отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$: $\Delta EFC \sim \Delta ABC$.

Теорема. Три средних линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (см. рис. 2.3.24.2).

2.3.2.4. Вписанная и описанная окружности

Теорема. Во всякий треугольник можно вписать окружность, и притом только одну (см. рис. 2.3.25.1). Центр окружности, вписанный в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.

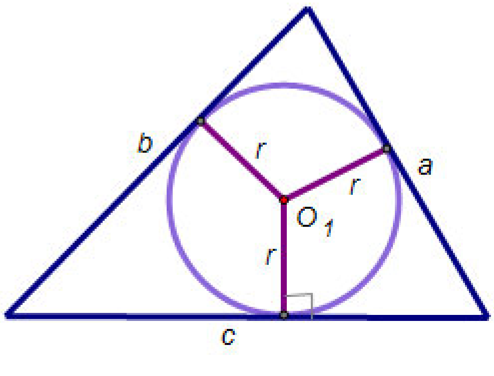


Рис. 2.3.25.1.

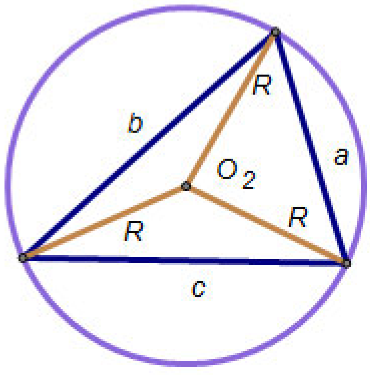


Рис. 2.3.25.2.

Радиус вписанной окружности r равен отношению площади к полупериметру:

$$r = \frac{S}{p},\ \ p = \frac{a+b+c}{2},$$

где S – площадь треугольника, p – полупериметр.

Теорема. Около всякого треугольника можно описать окружность, и притом только одну (см. рис. 2.3.25.2). Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин сторон этого треугольника.

Радиус описанной окружности R находится по формуле:

$$R=\frac{abc}{4S},$$

где S – площадь треугольника.

2.3.2.5. Площадь треугольника

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту (см. рис. 2.3.26.1):

$$S=\frac{1}{2}h_c c.$$

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними (см. рис. 2.3.26.2):

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Теорема. ***Формула Герона.*** Площадь треугольника равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{c+b+a}{2}$ – полупериметр (см. рис. 2.3.26.3).

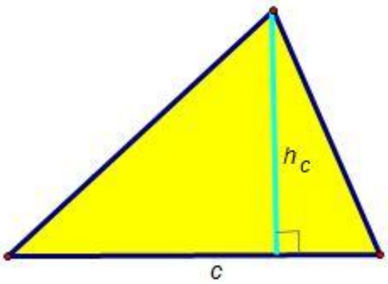


Рис. 2.3.26.1.

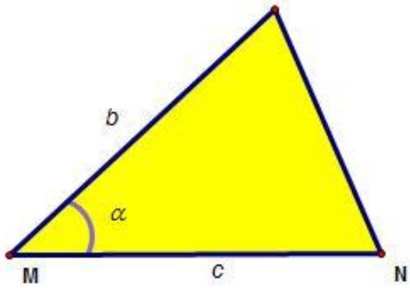


Рис. 2.3.26.2.

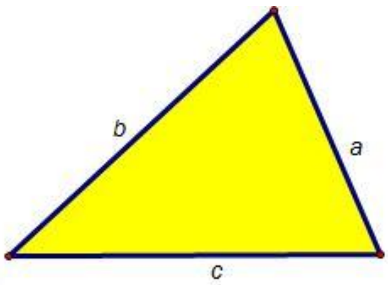


Рис. 2.3.26.3.

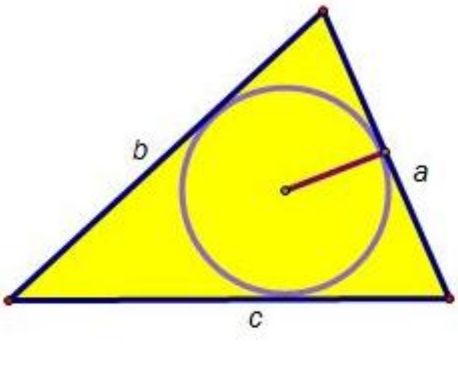


Рис. 2.3.26.4.

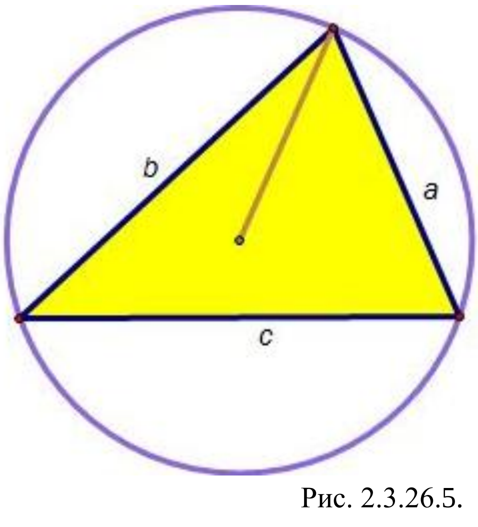


Рис. 2.3.26.5.

Теорема. Площадь треугольника равна $S=pr$, где r – радиус вписанной в треугольник окружности, p – полупериметр (см. рис. 2.3.26.4).

Теорема. Площадь треугольника равна $S=\frac{abc}{4R}$, где R - радиус описанной около треугольника окружности (см. рис. 2.3.26.5).

2.3.3. Равнобедренный треугольник

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны. Равные стороны называют боковыми сторонами, а третью – основанием равнобедренного треугольника.

Теорема.

1. ***Свойства равнобедренного треугольника.*** Если треугольник равнобедренный, то для него справедливы все следующие утверждения (см. рис. 2.3.27).

2. ***Признаки равнобедренного треугольника.*** Если для треугольника справедливо хотя бы одно из следующих утверждений, то он - равнобедренный.

1) Углы при основании равны: $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$.
2) Медиана, проведённая к основанию, является и биссектрисой, и высотой (CM – медиана, биссектриса, высота).
3) Существует ось симметрии, совпадающая с медианой, проведённой к основанию.

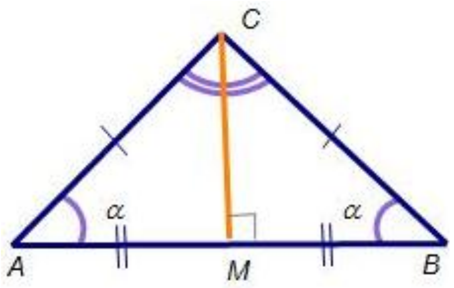


Рис. 2.3.27.

Теорема. Биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.

Основные формулы для равнобедренного треугольника:

$$c^2 = 2b^2(1-\cos\gamma); b = \frac{c}{2\cos\alpha};$$

$$S = (p-b)\sqrt{p(p-c)};$$

$$S = \frac{c}{4}\sqrt{4b^2-c^2};$$

$$S = \frac{b^2}{2}\sin\gamma;$$

$$r = \frac{a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$R = \frac{b^2}{2h_c}.$$

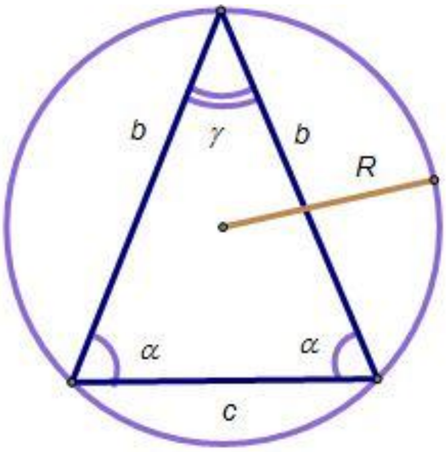


Рис. 2.3.28.

2.3.4. Равносторонний треугольник

Треугольник называется ***равносторонним*** или ***правильным***, если у него все стороны равны.

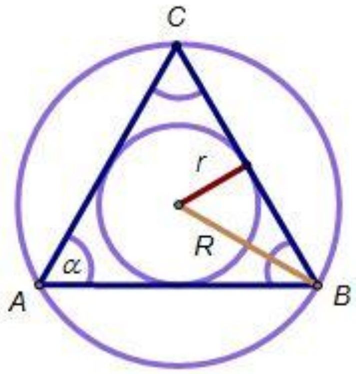


Рис. 2.3.29.1.

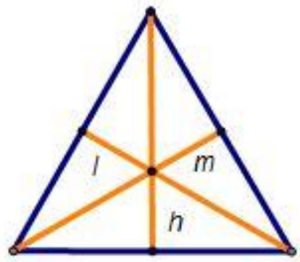


Рис. 2.3.29.2.

Теорема.

1. ***Свойства равностороннего треугольника.*** Если треугольник равносторонний, то для него справедливы все следующие утверждения.

2. ***Признаки равностороннего треугольника.*** Если для треугольника справедливо хотя бы одно из следующих утверждений, то он - равносторонний.

1) Все углы при равны (см. рис. 2.3.29.1): $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$.
2) Каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины (см. рис. 2.3.29.2).
3) Центры вписанной и описанной окружностей совпадают (см. рис. 2.3.29.1).
4) Треугольник имеет 3 оси симметрии и обладает поворотной симметрией (в $120°$ или $\frac{2\pi}{3}$ радиан) с центром, совпадающим с центром вписанной и описанной окружностей (см. рис. 2.3.29.2).

Основные формулы для равностороннего треугольника:

$$h = l = m = \mathrm{a}\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$P = 2p = 3\mathrm{a} = 2h\sqrt{3};$$

$$R = 2r = \mathrm{a}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2h}{3};$$

$$S = \frac{\mathrm{a}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = \frac{P^2\sqrt{3}}{36} =$$

$$= \frac{p^2\sqrt{3}}{9} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}.$$

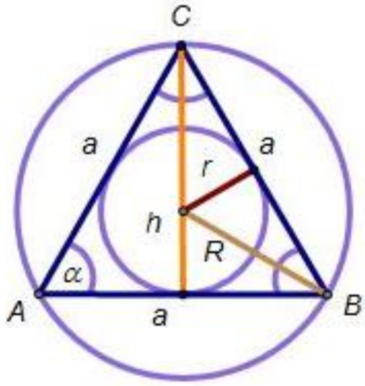


Рис. 2.3.30.

2.3.5. Прямоугольный треугольник

Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол.

Стороны, прилежащие к прямому углу, называются ***катетами***, противолежащая прямому углу – ***гипотенузой***.

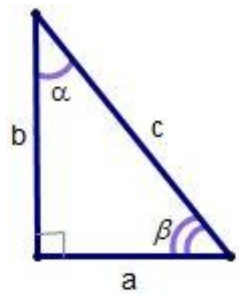


Рис. 2.3.31.

Теорема. Прямоугольные треугольники равны если у них ***равны***:

- два катета;
- катет и гипотенуза;
- катет и прилежащий острый угол;
- катет и противолежащий острый угол;
- гипотенуза и острый угол.

Теорема. ***Подобие*** прямоугольных треугольников устанавливают по:

- одному острому углу;
- из пропорциональности двух катетов;
- из пропорциональности катета и гипотенузы.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Верно и **обратное**.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда больше любого из катетов.

Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

$$\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha).$$

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta = \sin(90 - \alpha) = sin(\frac{\pi}{2} - \alpha).$$

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta = \mathrm{ctg}(90 - \alpha) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

$$\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}(90 - \alpha) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Свойства проекций катетов

Теорема. Высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу: $h_c^2 = a_c b_c$.

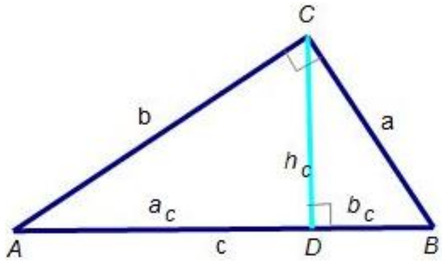


Рис. 2.3.31.

Теорема. Катет есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу:

$$a^2 = a_c c \text{ и } b^2 = b_c c.$$

Теорема. Высота, опущенная на гипотенузу, вычисляется по формуле:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

Теорема. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит данный треугольник на два треугольника, подобные данному:

$$\Delta ACD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$

Теорема. Медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$m_c = \frac{c}{2}.$$

Частные случаи прямоугольных треугольников

Для прямоугольного треугольника с углом $30° = \frac{\pi}{6}$ выполняются соотношения $a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$ (см. рис. 2.3.32.1).

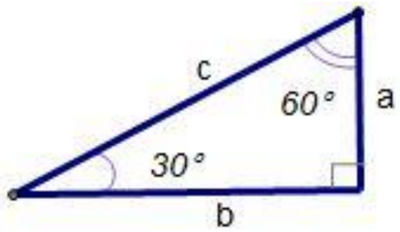


Рис. 2.3.32.1.

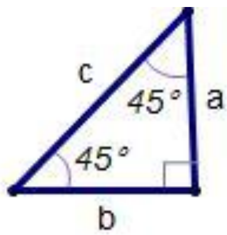


Рис. 2.3.32.2.

Для прямоугольного треугольника с углом $45° = \frac{\pi}{4}$ выполняется соотношение $a = \frac{\sqrt{2}c}{2}$ (см. рис. 2.3.32.2).

Основные формулы для прямоугольного треугольника:

Радиус вписанной окружности (см. рис. 2.3.33):

$$r=\frac{ab}{a+b+c},$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

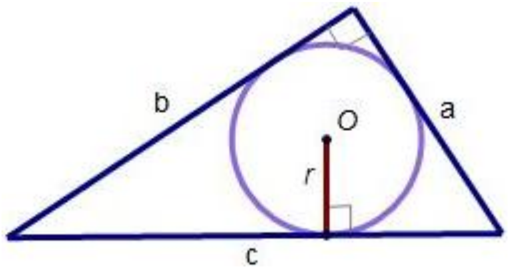


Рис. 2.3.33.

Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы, а радиус R равен (см. рис. 2.3.34):

- половине гипотенузы

$$R=\frac{c}{2};$$

- медиане, поведенной к гипотенузе

$$R=m_c.$$

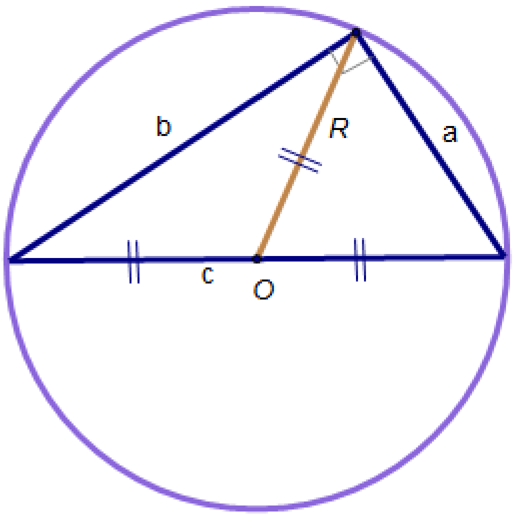


Рис. 2.3.34.

Площадь прямоугольного треугольника можно определить (см. рис. 2.3.35):

- через катеты: $S=\frac{1}{2}ab$;
- через катет и любой из острых углов:

$$S=\frac{1}{2}a^2\mathrm{tg}\beta=\frac{1}{2}a^2\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{2}b^2\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}b^2\mathrm{ctg}\beta;$$

- через гипотенузу и любой из острых углов:

$$S=\frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha=\frac{1}{2}c^2\sin 2\beta.$$

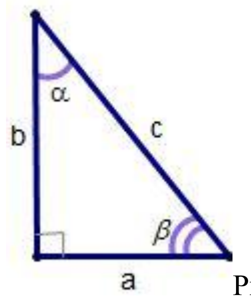


Рис. 2.3.35.

2.4. Четырехугольники

Виды четырехугольников

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх отрезков, которые последовательно соединяют вершины.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Ромбом называется это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Прямоугольником называется это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Трапеций называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны.

2.4.1. Произвольный четырехугольник

Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек (вершин) и четырёх отрезков (сторон), которые последовательно соединяют вершины. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Четырёхугольник называется ***выпуклым***, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, которая содержит любую из его сторон.

Теорема. Сумма величин внутренних углов выпуклого четырехугольника равна 360° или 2π радиан (см. рис. 2.4.1.1).

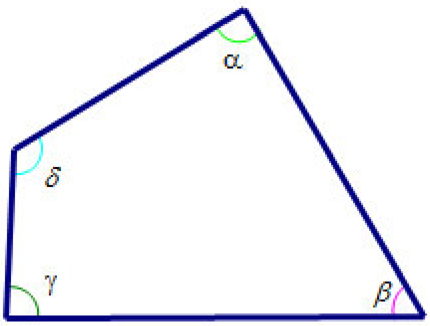


Рис. 2.4.1.1.

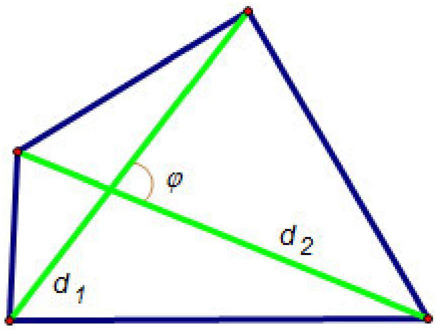


Рис. 2.4.1.2.

Теорема. Площадь выпуклого четырехугольника выражается формулой:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi,$$

где d_1 и d_2 - диагонали, а φ – угол между ними (см. рис. 2.4.1.2).

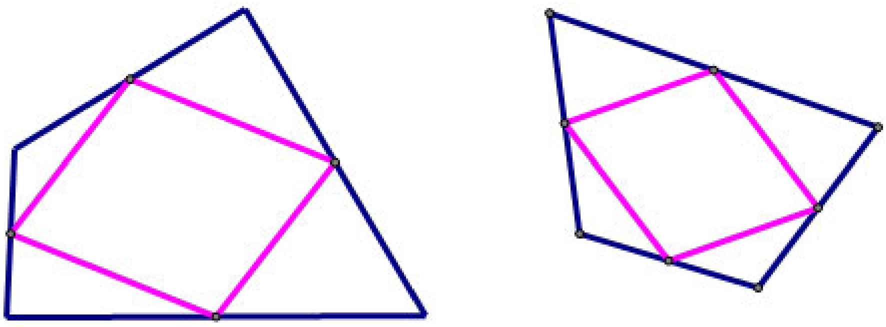


Рис. 2.4.2.

Теорема. Если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм (см. рис. 2.4.2).

Четырехугольник, описанный около окружности

Теорема. Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны (см. рис. 2.4.3):

$$\mathrm{a} + c = b + d.$$

Теорема. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.

Площадь четырехугольника, описанного около окружности, выражается формулой (см. рис. 2.4.3):

$$S = pr,$$

где $p = \frac{\mathrm{a}+b+c+d}{2}$ – полупериметр, r – радиус описанной окружности.

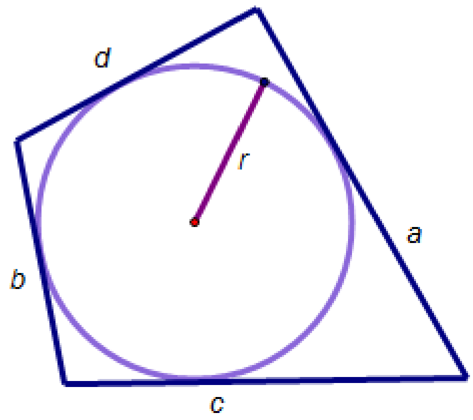


Рис. 2.4.3.

Четырехугольник, вписанный в окружность

Теорема. Четырехугольник можно вписать в окружность, если суммы противолежащих углов равны 180° или π радиан (см. рис. 2.4.4.1):

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180° = \pi.$$

Теорема. Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противолежащих углов равны 180° или π радиан.

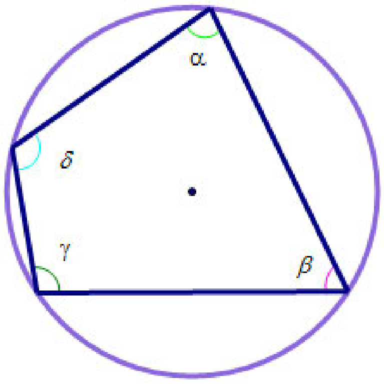


Рис. 2.4.4.1.

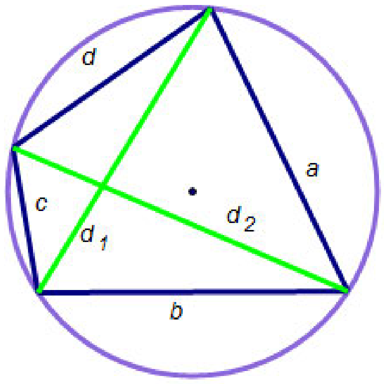


Рис. 2.4.4.2.

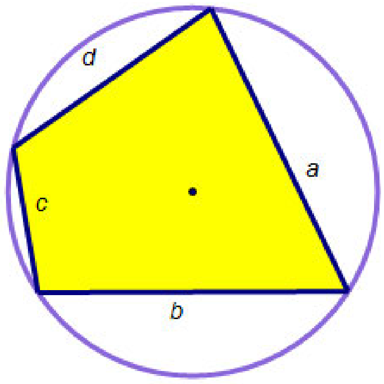


Рис. 2.4.4.3.

Теорема Птолемея. Сумма произведений длин противополжных сторон, вписанного в окружность четырехугольника, равна произведению длин его диагоналей (см. рис. 2.4.4.2):

$$\mathrm{a}c + bd = d_1 d_2.$$

Площадь четырехугольника, вписанного в окружность, выражается формулой (см. рис. 2.4.4.3):

$$S = \sqrt{(p - \mathrm{a})(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где $p = \frac{\mathrm{a}+b+c+d}{2}$ – полупериметр.

2.4.2. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Параллелограмм обладает всеми свойствами произвольного четырехугольника.

Теорема. ***Свойства параллелограмма.*** Если четырехугольник - параллелограмм, то для него справедливы все следующие утверждения.

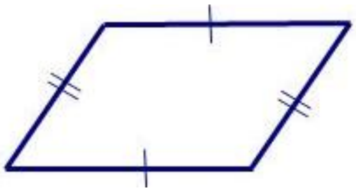


Рис. 2.4.5.1.

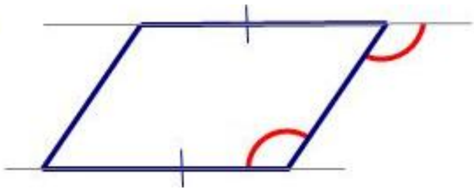


Рис. 2.4.5.2.

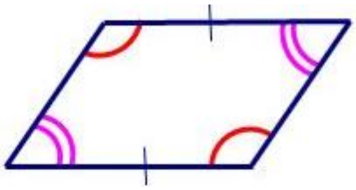


Рис. 2.4.5.3.

1) Противоположные стороны попарно равны (см. рис. 2.4.5.1).
2) Противоположные стороны равны и параллельны (см. рис. 2.4.5.2).
3) Противоположные углы попарно равны (см. рис. 2.4.5.3).
4) Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180° или 2π радиан (см. рис. 2.4.5.4).
5) Диагонали точкой пересечения делятся пополам (см. рис. 2.4.5.5).
6) Точка пересечения диагоналей является центром симметрии (см. рис. 2.4.5.5).
7) Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон (см. рис. 2.4.5.6):

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = \mathrm{a}^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

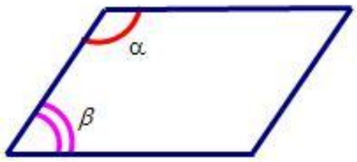


Рис. 2.4.5.4.

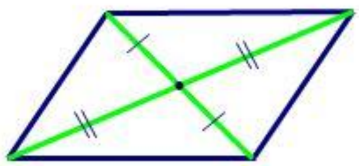


Рис. 2.4.5.5.

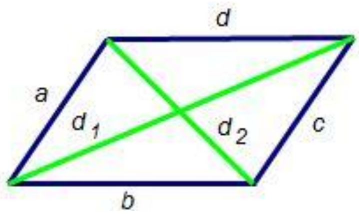


Рис. 2.4.5.6.

8) Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника (см. рис. 2.4.5.7 и 2.4.5.8).
9) Две диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника (см. рис. 2.4.5.9).

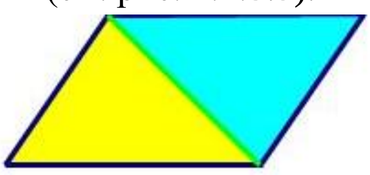


Рис. 2.4.5.7.

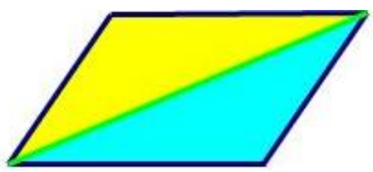


Рис. 2.4.5.8.

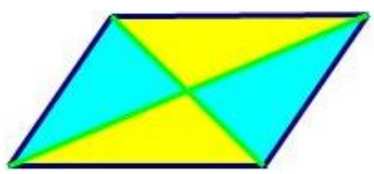


Рис. 2.4.5.9.

10) Высоты параллелограмма, опущенные из одной вершины, образуют угол,

равный углу параллелограмма при соседней вершине.

11) Высоты обратно пропорциональны соответственным сторонам.
12) Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
13) Биссектрисы смежных углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.
14) Середина любого отрезка с концами на противоположных сторонах параллелограмма лежит на прямой, проходящей через середины двух других сторон.

Теорема. ***Признаки параллелограмма.*** Если для четырехугольника справедливо хотя бы одно из утверждений 1) – 9), то он - параллелограмм.

Площадь параллелограмма выражается через

- сторону и опущенную на нее высоту (см. рис. 2.4.6.1):

$$S = \mathrm{a}h_{\mathrm{a}} = bh_b,$$

где a и b – стороны, h_{a} и h_b – высоты;

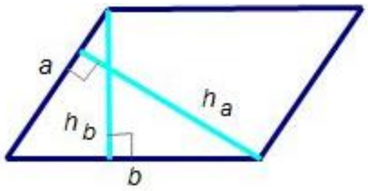


Рис. 2.4.6.1.

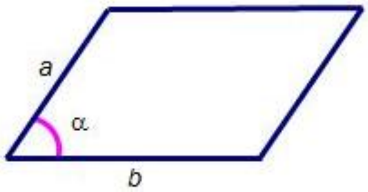


Рис. 2.4.6.2.

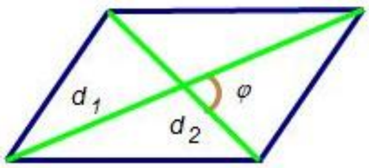


Рис. 2.4.6.3.

- две прилежащие стороны и углу между ними (см. рис. 2.4.6.2):

$$S = \mathrm{a}b\sin\alpha,$$

где a и b – стороны, а α – угол между ними;

- диагонали и углу между ними (см. рис. 2.4.6.3):

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2},$$

где d_1 и d_2 – диагонали, а φ – угол между ними.

2.4.3. Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Теорема.

1. ***Свойства ромба.*** Если четырехугольник - ромб, то для него справедливы все следующие утверждения.

2. ***Признаки ромба.*** Если для четырехугольника справедливо хотя бы одно из утверждений, то он - ромб.

1) Все стороны равны (см. рис. 2.4.7.1).
2) Диагонали ромба перпендикулярны друг другу и делятся точкой пересечения пополам (см. рис. 2.4.7.2).
3) Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов (см. рис. 2.4.7.3).
4) Диагонали ромба являются его осями симметрии (см. рис. 2.4.7.4).

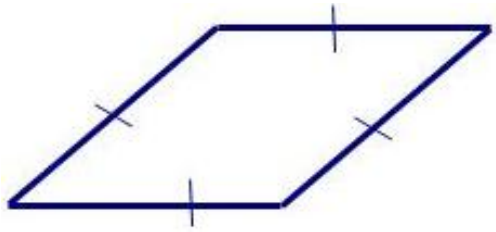


Рис. 2.4.7.1.

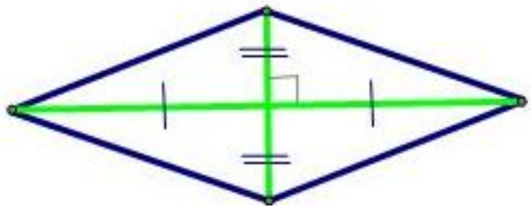


Рис. 2.4.7.2.

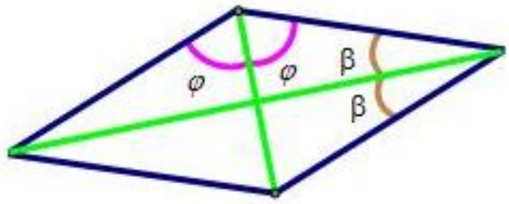


Рис. 2.4.7.3.

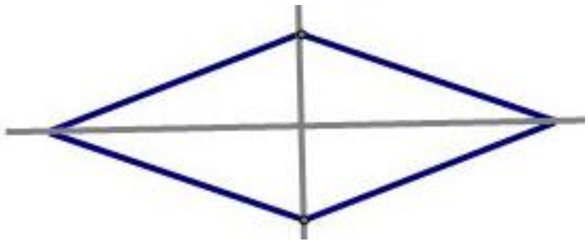


Рис. 2.4.7.4.

Свойства ромба

Теорема. Высоты ромба равны (см. рис. 2.4.7.5).

Теорема. В ромб можно вписать окружность (см. рис. 2.4.7.6).

Радиус вписанной в ромб окружности выражается через

- высоту ромба h:

$$r = \frac{h}{2};$$

- диагонали ромба и его сторону:

$$r = \frac{d_1 d_2}{4a},$$

где d_1 и d_2 – диагонали, а – сторона ромба.

Точка касания вписанной окружности делит стороны ромба на отрезки, связанные с его диагоналями и радиусом вписанной окружности следующими соотношениями (см. рис. 2.4.7.6):

$$d_1 = 2\sqrt{AH \cdot AB},$$
$$d_2 = 2\sqrt{BH \cdot AB},$$
$$r = \sqrt{AH \cdot HB}.$$

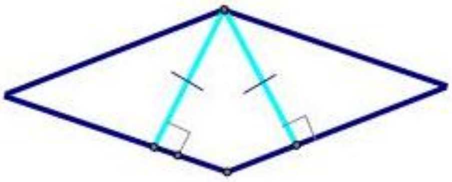


Рис. 2.4.7.5.

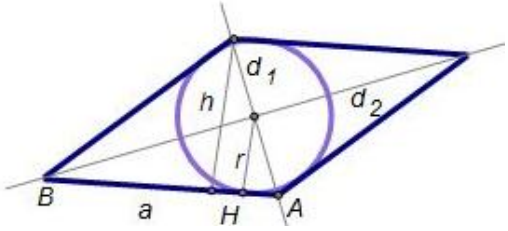


Рис. 2.4.7.6.

Площадь ромба выражается через (см. рис. 2.4.8)

- сторону и высоту:

$$S = ah;$$

- высоту и радиус вписанной окружности:

$$S = 2ar;$$

- сторону и угол:

$$S = a^2 \sin\alpha;$$

- диагонали:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

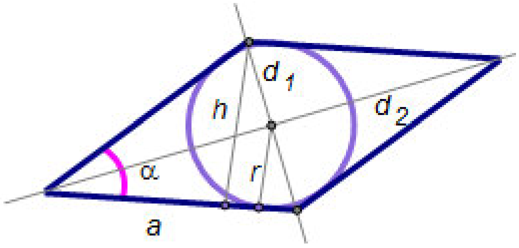


Рис. 2.4.8.

2.4.4. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

Теорема.

1. ***Свойства прямоугольника.*** Если четырехугольник - прямоугольник, то для него справедливы все следующие утверждения.
2. ***Признаки прямоугольника.*** Если для четырехугольника справедливо хотя бы одно из утверждений, то он - прямоугольник.

1) Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам (см. рис. 2.4.9.1).
2) Две стороны параллельны и углы, прилежащие к одной из них, прямые (см. рис. 2.4.9.2).

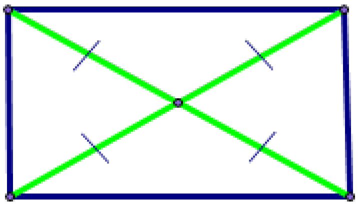


Рис. 2.4.9.1.

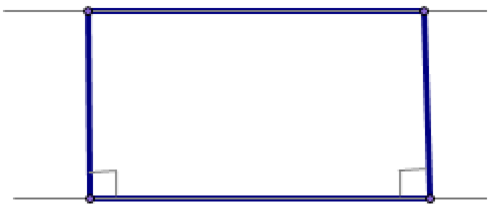


Рис. 2.4.9.2.

3) Две противолежащие стороны равны и углы, прилежащие к одной из них,

прямые (см. рис. 2.4.9.3).

4) Серединные перпендикуляры являются осями симметрии (см. рис. 2.4.9.4).

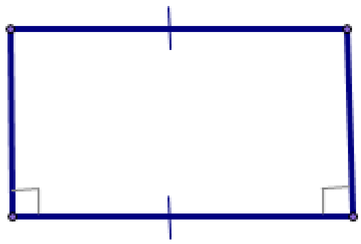


Рис. 2.4.9.3.

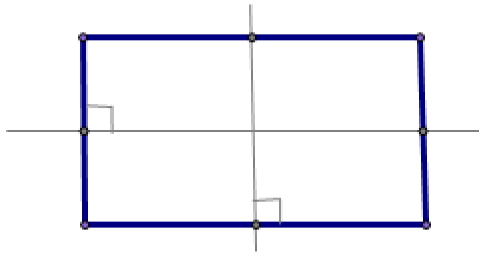


Рис. 2.4.9.4.

Теорема. Около прямоугольника можно описать окружность (см. рис. 2.4.10.1).

Радиус описанной окружности равен

$$r = \frac{d}{2}, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где d – диагональ прямоугольника.

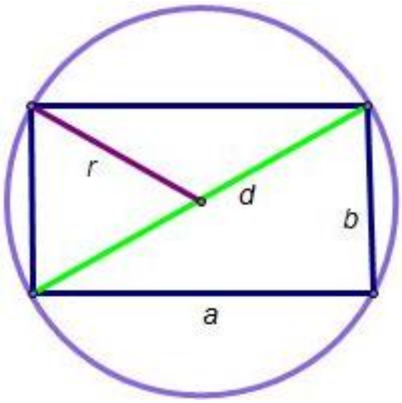


Рис. 2.4.10.1.

Площадь прямоугольника выражается через (см. рис. 2.4.10.2)

- стороны:

$$S = ab;$$

- диагонали и углу между ними:

$$S = \frac{d^2 \sin\varphi}{2}.$$

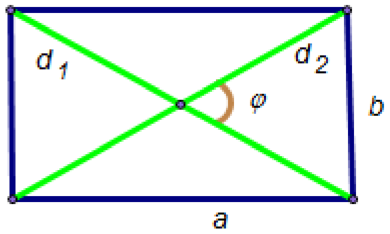


Рис. 2.4.10.2.

Теорема. Если соединить середины сторон любого прямоугольника, то получится ромб (см. рис. 2.4.11.1).

Теорема. Если соединить середины сторон любого ромба, то получится прямоугольник (см. рис. 2.4.11.2).

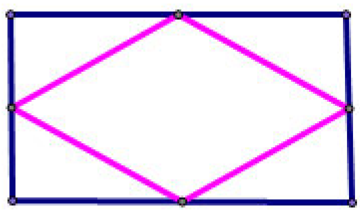


Рис. 2.4.11.1.

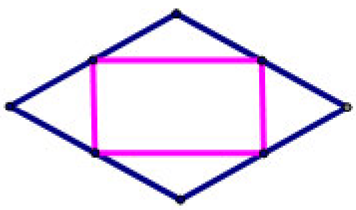


Рис. 2.4.11.2.

2.4.5. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

Теорема.

1. ***Свойства квадрата.*** Если четырехугольник - квадрат, то для него справедливы все следующие утверждения.
2. ***Признаки квадрата.*** Если для четырехугольника справедливо хотя бы одно из утверждений, то он - квадрат.

1) Все стороны равны и один из углов прямой (см. рис. 2.4.12.1).
2) Диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам (см. рис. 2.4.12.2).
3) Четырехугольник имеет 4 оси симметрии (см. рис. 2.4.12.3):
   - прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам;
   - прямые, содержащие диагонали.
4) Четырехугольник обладает поворотной симметрией: он не изменяется при повороте на 90° (см. рис. 2.4.12.1).

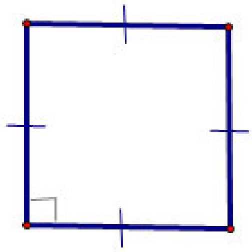


Рис. 2.4.12.1.

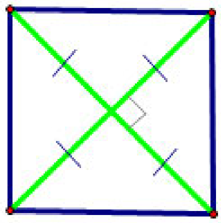


Рис. 2.4.12.2.

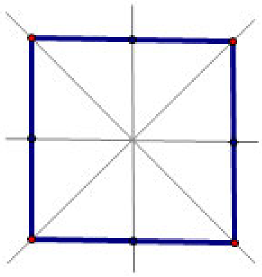


Рис. 2.4.12.3.

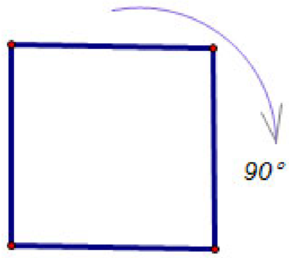


Рис. 2.4.12.4.

Теорема. Около квадрата можно описать окружность (см. рис. 2.4.13).

Радиус описанной окружности равен

$$r = \frac{d}{2}, d = \sqrt{2}a,$$

где d – диагональ квадрата.

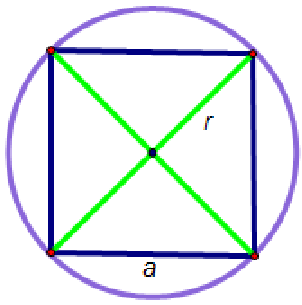


Рис. 2.4.13.

Теорема. В квадрат можно вписать окружность (см. рис. 2.4.13).

Радиус вписанной окружности равен

$$r = \frac{a}{2},$$

где a – сторона квадрата.

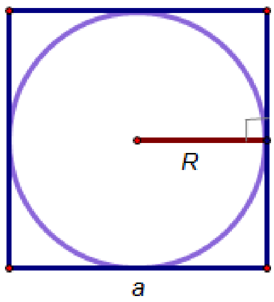


Рис. 2.4.14.

Площадь квадрата выражается через (см. рис. 2.4.15)

- сторону:

$$S = a^2;$$

- диагональ:

$$S = \frac{d^2}{2}.$$

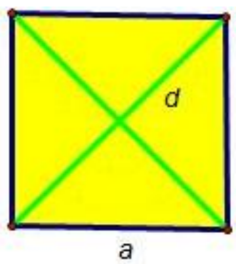


Рис. 2.4.15.

2.4.6. Трапеция

Трапеция - это четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Параллельные стороны будем называть ***основаниями***, а не параллельные – ***боковыми*** сторонами.

Высота трапеции – это перпендикуляр, проведённый из произвольной точки одного основания трапеции к прямой, содержащей другое основание трапеции.

Средней линией трапеции называется отрезок, который соединяет середины боковых сторон данной трапеции.

Теорема. ***Свойства трапеции.*** Если четырехугольник - трапеция, то для него справедливы все следующие утверждения:

1) Средняя линия трапеции параллельна её основаниям, равна их полусумме и делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, пополам (см. рис. 2.4.16.1):

$$MN \parallel AB \parallel CD;\ m = \frac{a+b}{2}.$$

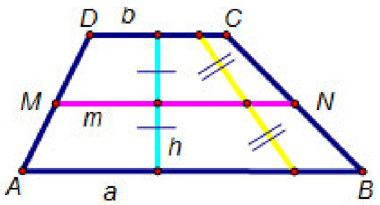


Рис. 2.4.16.1.

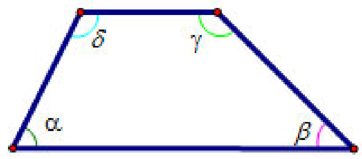


Рис. 2.4.16.2.

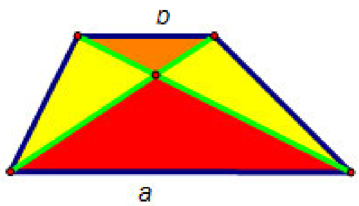


Рис. 2.4.16.3.

2) Сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° или π радиан (см. рис. 2.4.16.2):

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180° = \pi.$$

3) Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника, причем треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу (с коэффициентом подобия $к$), а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики, т.е. имеют равные площади (см. рис. 2.4.16.3):

$$\Delta AOB \sim \Delta COD,\ k = \frac{a}{b},\ S_{AOD} = S_{BOC}.$$

4) Биссектриса угла трапеции, пересекающая второе основание, отсекает от трапеции равнобедренный треугольник (см. рис. 2.4.16.4).
5) В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой: середины оснований L и K, точка пересечения диагоналей O, точка пересечения продолжений боковых сторон E (см. рис. 2.4.16.5).
6) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и ранен полуразности оснований трапеции (см. рис. 2.4.16.6):

$$KL \parallel AB \parallel CD; \;\; KL = \frac{a-b}{2}.$$

7) Отрезок, параллельный основаниям трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей и соединяющий две точки на боковых сторонах, делится точкой пересечения диагоналей пополам (см. рис. 2.4.16.6). Его длина есть среднее гармоническое оснований трапеции:

$$MN = \frac{2ab}{a+b}.$$

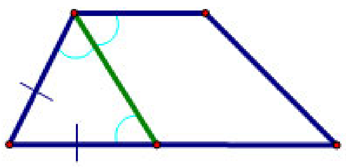


Рис. 2.4.16.4.

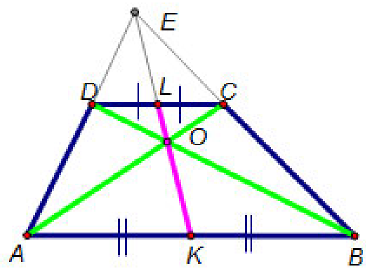


Рис. 2.4.16.5.

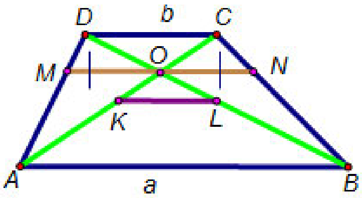


Рис. 2.4.16.6.

Площадь трапеции выражается через

- через полусумму оснований и высоту (см. рис. 2.4.17.1):

$$S = \frac{a+b}{2}h;$$

- через среднюю линию и высоту:

$$S = mh;$$

- через диагонали и угол между ними (см. рис. 2.4.17.2):

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

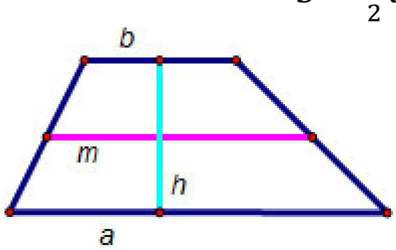


Рис. 2.4.17.1.

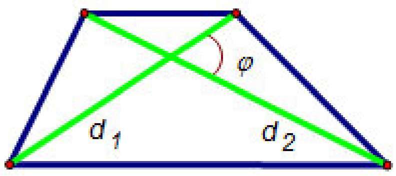


Рис. 2.4.17.2.

Теорема. В трапецию можно ***вписать окружность***, если сумма её оснований равна сумме боковых сторон (см. рис. 2.4.18):

$$a + b = c + d.$$

Центром вписанной в трапецию ***окружности*** является точка пересечения биссектрис внутренних углов трапеции.

Теорема. Боковые стороны трапеции видны из центра окружности, вписанной в данную трапецию, под прямым углом:

$$\widehat{AOD} = \widehat{COB} = 90°.$$

Радиус вписанной в трапецию окружности можно определить:

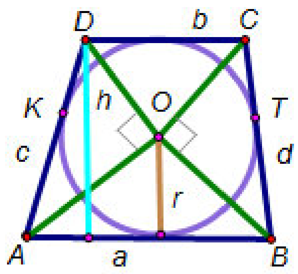


Рис. 2.4.18.

- через высоту:

$$r = \frac{h}{2};$$

- через отрезки, на которые делится боковая сторона точкой касания:

$$r = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{BT \cdot TC}.$$

2.4.6.1. Равнобокая трапеция

Равнобокой называется трапеция, у которой боковые стороны равны (см. рис. 2.4.19):

$$AB=CD.$$

Равнобокая трапеция обладает всеми свойствами произвольной трапеции.

Теорема. ***Свойства равнобокой трапеции***:

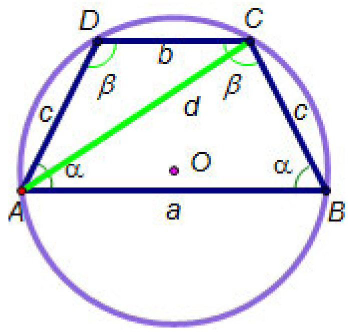


Рис. 2.4.19.

- диагонали равны: $AD = BC$;
- углы при основании равны:

$$\angle A = \angle B,\ \angle C = \angle D;$$

- сумма противолежащих углов равна 180° или π радиан:

$$\alpha + \beta = 180° = \pi.$$

Около ***трапеции*** можно ***описать окружность*** тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Теорема. Стороны и диагональ равнобокой трапеции связаны соотношением:

$$d^2 = \mathrm{a}b + c^2.$$

2.4.6.2. Прямоугольная трапеция

Трапеция называется ***прямоугольной***, если одна из её боковых сторон перпендикулярна основаниям (см. рис. 2.4.20).

Прямоугольная трапеция обладает всеми свойствами произвольной трапеции.

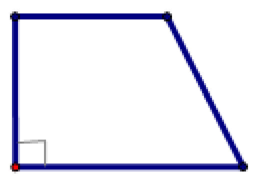


Рис. 2.4.20.

2.5. Окружность

Сектор – часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами.
Сегмент – часть круга, ограниченная дугой и хордой.

Теоремы. *Свойства хорд, секущих и касательных.*

- Хорды, равноудаленные от центра окружности, равны (см. рис. 2.5.1.1).
- Если хорды равны, то они равноудалены от центра окружности.
- Равные дуги стягиваются равными хордами.
- Большая из двух хорд находится ближе к центру окружности (см. рис. 2.5.1.2).
- Наибольшая хорда является диаметром.
- Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.
- Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам (см. рис. 2.5.1.3).
- Если диаметр делит хорду пополам, то он перпендикулярен ей.

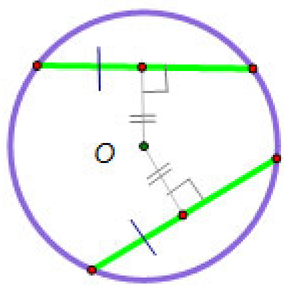


Рис. 2.5.1.1.

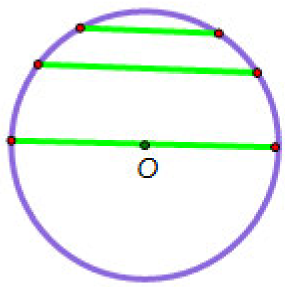


Рис. 2.5.1.2.

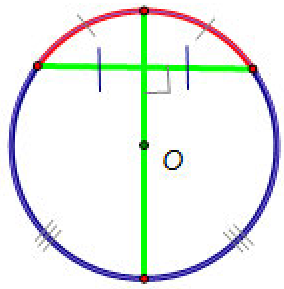


Рис. 2.5.1.3.

- Отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением (см. рис. 2.5.1.4):

$$AK \cdot KB = CK \cdot KD \text{ или } ab = cd.$$

- Длины касательных, проведенных из одной точки вне круга к окружности, равны между собой (см. рис. 2.5.1.5):

$$MA = MC.$$

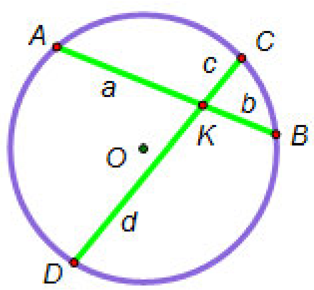


Рис. 2.5.1.4.

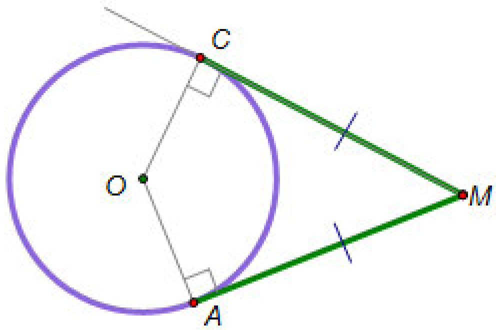


Рис. 2.5.1.5.

- Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную к этой окружности.
- Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания

(см. рис. 2.5.1.5).

- Если через точку М вне окружности провести две секущие, то произведения длин секущих на их внешние части будут равны (***теорема о секущей***) (см. рис. 2.5.1.6):

$$MB \cdot MA = MD \cdot MC.$$

- Если через точку М вне окружности провести секущую и касательную, то произведение длины секущей на ее внешнюю часть будет равно квадрату длины касательной (***теорема о секущей и касательной***) (см. рис. 2.5.1.7):

$$MB \cdot MA = MC^2.$$

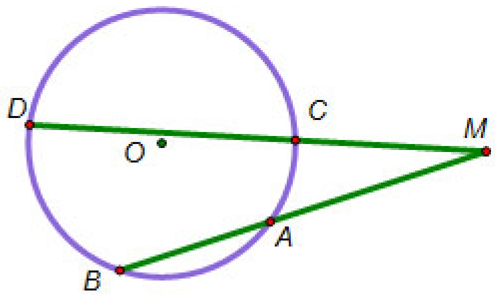


Рис. 2.5.1.6.

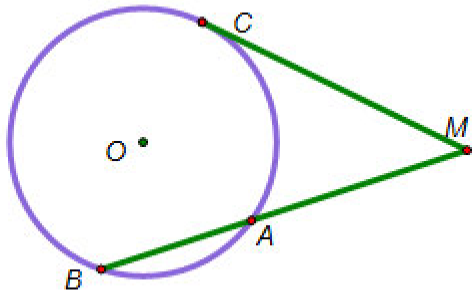


Рис. 2.5.1.7.

Углы в окружности

Центральным углом называется угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны являются радиусами.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами.

Теорема. Центральный угол измеряется дугой окружности, на которую он опирается (см. рис. 2.5.2.1):

$$\widehat{AOB} = \alpha = \overset{\smile}{AB}.$$

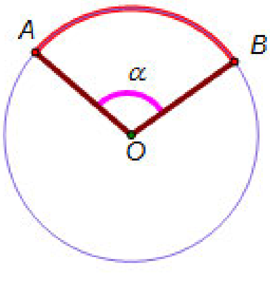


Рис. 2.5.2.1.

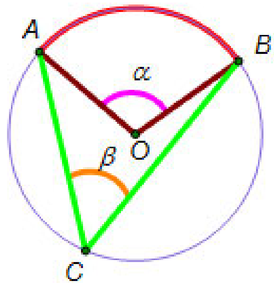


Рис. 2.5.2.2.

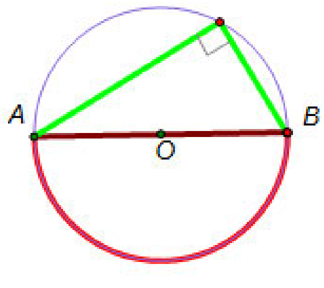


Рис. 2.5.2.3.

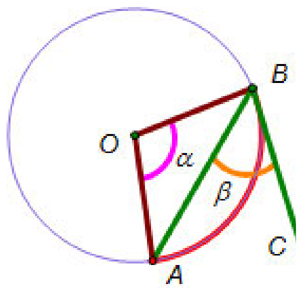


Рис. 2.5.2.4.

Свойства вписанных углов

Теорема. Вписанный угол равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности (измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается) (см. рис. 2.5.2.2):

$$\widehat{ACB} = \beta = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\breve{AB}.$$

Следствия.

- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой (см. рис. 2.5.2.3).
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные по величине дуги), равны.
- Если вписанные углы равны, то равны и дуги, на которые они опираются.
- Если две параллельные прямые пересекают окружность, то заключенные между ними дуги равны.

Теорема. Угол, составленный касательной и хордой, вершина которого лежит на окружности, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой (см. рис. 2.5.2.4).

Теорема. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды хордой (см. рис. 2.5.3.1):

$$\boldsymbol{\widehat{AKB} = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right) = \widehat{ACB} + \widehat{CBD}.}$$

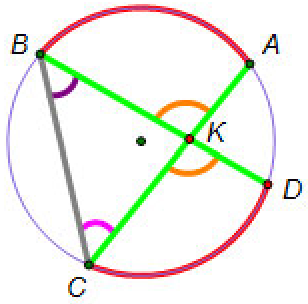


Рис. 2.5.3.1.

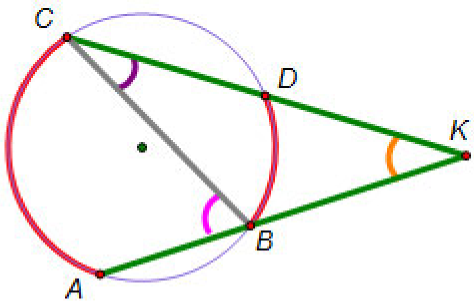


Рис. 2.5.3.2.

Теорема. Угол между секущими, выходящими из одной точки, дуг окружности, равен полуразности мер заключенных между ними (см. рис. 2.5.3.2):

$$\boldsymbol{\widehat{AKC} = \frac{1}{2}\left(\breve{AC} - \breve{BD}\right) = \widehat{ABC} - \widehat{BCD}.}$$

Следствия рассмотренных утверждений:

- Синусы вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.
- Если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр окружности.

- Сумма величин противоположных углов выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, равна π (см. рис. 2.5.4):

$$\widehat{ADB} = \gamma = 180° - \beta = \pi - \frac{\alpha}{2}..$$

- Равные хорды отсекают равные дуги.

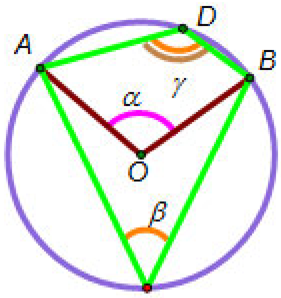


Рис. 2.5.4.

Длина дуги и окружности

Формула длины дуги:

$$l = r\varphi = \frac{\pi x}{180} r,$$

где r – радиус окружности, φ – величина центрального угла в радианах, содержащего x градусов, π – постоянная, не зависящая от окружности (см. рис. 2.5.5.1).

Формула длины окружности:

$$L = 2\pi r,$$

где r – радиус окружности (см. рис. 2.5.5.2).

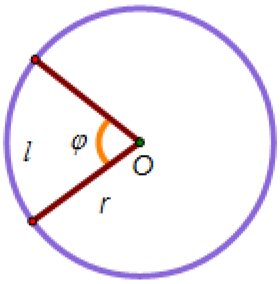


Рис. 2.5.5.1.

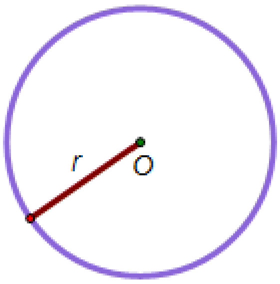


Рис. 2.5.5.2.

Площадь круга и его частей

Формула площади круга (см. рис. 2.5.6.1):

$$S = \pi r^2,$$

где r – радиус круга.

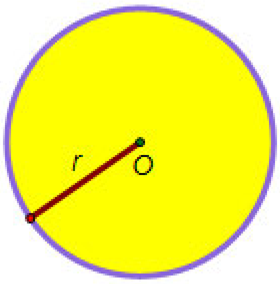


Рис. 2.5.6.1.

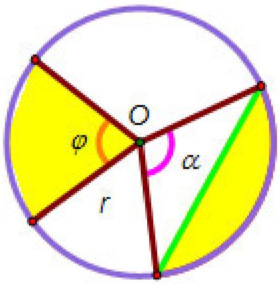


Рис. 2.5.6.2.

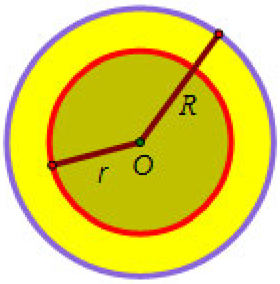


Рис. 2.5.6.3.

Формулы площади:

- ***сектора*** (см. рис. 2.5.6.2):

$$S = \frac{1}{2}\varphi r^2 = \frac{\pi x}{360} r^2;$$

- ***сегмента*** (см. рис. 2.5.6.2):

$$S = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} - \sin \boldsymbol{\alpha})\, \boldsymbol{r^2};$$

- ***кольца***, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R и r ($R>r$), вычисляется по формуле (см. рис. 2.5.6.3):

$$S = \pi(R^2 - r^2).$$

Взаимное расположение двух окружностей

Общей касательной к двум окружностям называется прямая, касающаяся обеих окружностей.

Одна окружность лежит внутри другой – общих точек и касательных нет.

Расстояние между центрами окружностей радиусов R и r ($R>r$) меньше разности их радиусов (см. рис. 2.5.7.1):

$$O_1O_2 < \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}.$$

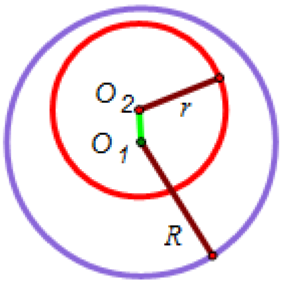


Рис. 2.5.7.1.

Одна окружность касается другой изнутри – окружности имеют одну общую точку, лежащую на прямой O_1O_2.

Одна общая касательная a проходит через эту точку и перпендикулярна прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей равно разности их радиусов (см. рис. 2.5.7.2):

$$O_1O_2 = R - r.$$

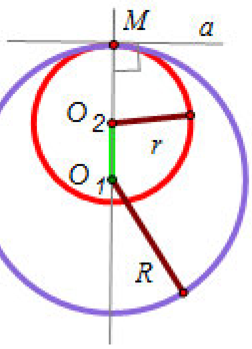


Рис. 2.5.7.2.

Окружности пересекаются – имеют две общих точки N и M.

Есть две общих касательных a и b. Если радиусы окружностей равны, то касательные параллельны, а если не равны, то касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Общая хорда MN перпендикулярна прямой O_1O_2 и делится ею пополам:

$$MN \perp O_1O_2,\ MK = KN.$$

Расстояние между центрами окружностей больше разности их радиусов, но меньше суммы (см. рис. 2.5.7.3):

$$R - r < O_1O_2 < R + r.$$

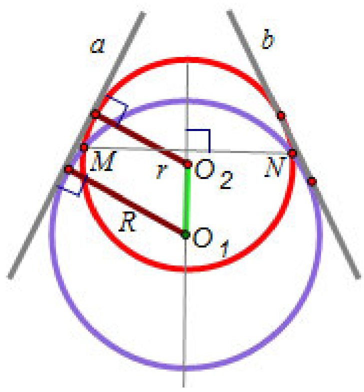


Рис. 2.5.7.3.

Одна окружность касается другой снаружи – окружности имеют одну общую точку, лежащую на прямой O_1O_2.

Есть три общих касательных. Одна из них (a) проходит через точку касания и перпендикулярна прямой O_1O_2. Если радиусы окружностей равны, то две другие общие касательные (b и c) параллельны, а если не равны, то эти общие касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов (см. рис. 2.5.7.4):

$$O_1O_2 = R + r.$$

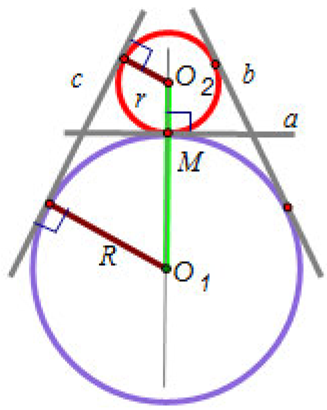


Рис. 2.5.7.4.

Одна окружность лежит вне другой – общих точек нет.

Есть четыре общих касательных. Две из них (a и b) называются ***внутренними*** и всегда пересекаются в точке, лежащей на отрезке O_1O_2. Две другие общие касательные (c и d) называют ***внешними***. Если радиусы окружностей равны, то внешние касательные параллельны, а если не равны, то внешние касательные пересекаются в точке, лежащей на прямой O_1O_2.

Расстояние между центрами окружностей больше суммы их радиусов (см. рис. 2.5.7.5):

$$O_1O_2 < R - r.$$

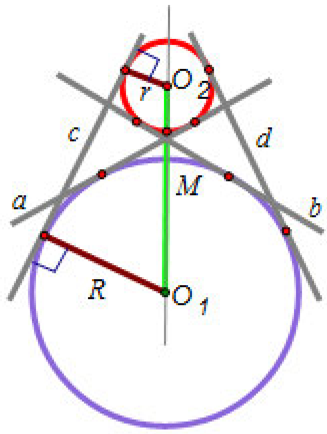


Рис. 2.5.7.5.

3. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения элементов фигуры

Анализ содержания школьных учебников по геометрии показывает, что многовариантных задач практически нет, поэтому школьники не готовы к их решению на ЕГЭ. Подобные задачи нужно решать, начав с достаточно простых и постепенно увеличивая их сложность.

Ниже предложим некоторую классификацию типов многовариантных задач, связанных с неоднозначностью описания взаимного расположения элементов фигуры.

3.1. Расположение точек на прямой

В данном пункте рассмотрим расположение точек на одной прямой или на двух прямых.

Для начала рассмотрим следующую задачу.

Задача 3.1.1. На прямой взяты точки A, B и C так, что расстояние между точками A и B равно 6, а между B и C равно 8. Найти расстояние между точками A и C.

Замечание. В данной задаче не указано, как расположены точки относительно друг друга.

Рассмотрим все возможные случаи расположения трех точек A, B и C, лежащих на прямой (см. рис 3.1.1).

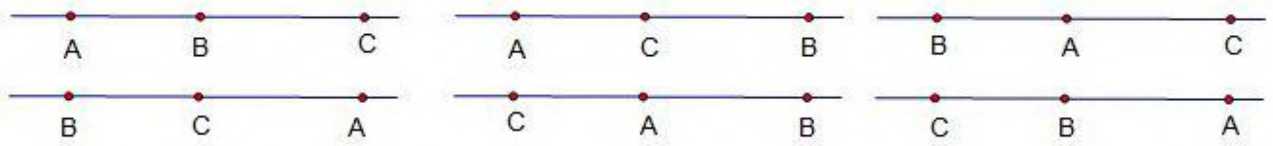


Рис. 3.1.1.

В нашем примере возможны не все случаи: 1) 6+8, 3) 8-6, 5) 8-6, 6) 8+6. Второй и четвертый случай невозможны, т.к. точка C лежит на прямой дальше от точки B, чем точка A, поэтому точка C не может быть между точками A и B.

Ответ: 14 или 2.

Задача 3.1.2. На прямой взяты точки A, B и C так, что $AB{:}BC$=4. Найти отношение AB к AC.

Решение. Т.к. $AB=4\cdot BC$, то точка A не может быть между точками B и C (невозможны 2) и 4) случаи). Тогда $AC=5\cdot BC$ (1) и 6) случаи) или $AC=3\cdot BC$ (2) и 4) случаи).

Комментарий. Наличие дополнительной информации о расположении точек на прямой (левее, правее, деление отрезка в заданном отношении) сокращает перебор случаев.

Например, если в задаче 2 известно, что точка B расположена левее точки A, то решение сводится только к случаям 4) и 6); а если точка B расположена левее остальных, то решение вообще становится единственным (4) случай).

Задача 3.1.3. (ЕГЭ, 2010). В треугольнике ABC AB=12, BC=5, CA=10. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD{:}DC$=4:9. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найти длину отрезка EF.

Решение. Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Тогда для окружности, вписанной в треугольник ADC, имеем $DE=\frac{d+y-10}{2}$, а окружности, вписанной в треугольник ADB, $DF=\frac{d+x-12}{2}$.

Комментарий. Поскольку в условии сказано, что точка D лежит на прямой BC, то существует два ее положения, при которых будет выполняться условие $BD:DC=4:9$. Соответственно, существует два рисунка, удовлетворяющих условию задачи.

1. Пусть точка D лежит на отрезке BC (см. рис. 3.1.2.1). Тогда $x=\frac{20}{17}$, $y=\frac{45}{13}$. Значит, $EF=|DE-DF|=\left|\frac{d+y-10}{2}-\frac{d+x-12}{2}\right|=\frac{51}{26}$.

2. Пусть точка D лежит вне отрезка BC (см. рис. 3.1.2.2). Тогда $x=4$, $y=x+BC=9$. Значит, $EF=|DE-DF|=\frac{7}{2}$.

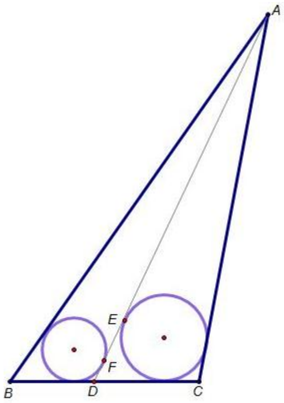


Рис. 3.1.2.1.

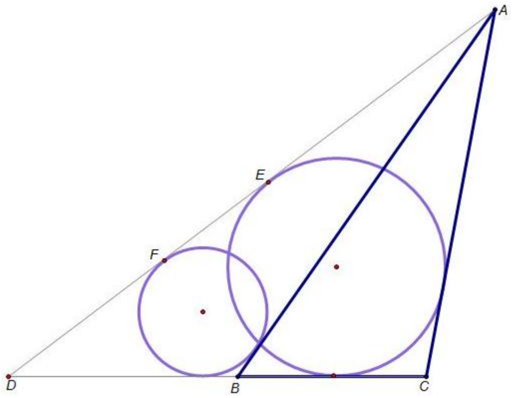


Рис. 3.1.2.2.

Случай расположения точки D правее точки C невозможен.

Замечание. Так как в решении не исследовано расположение точек E и F на отрезке AD, то при вычислении длины отрезка EF использован знак модуля.

Ответ: $\frac{7}{2}$ или $\frac{51}{26}$.

Задача 3.1.4. (ЕГЭ, 2012). В треугольнике ABC известны стороны, $AB=7$, $BC=8$, $AC=9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Комментарий. Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

1. Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис.

3.1.3.1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда

$$BL = k\ AB,\ BK = k\ BC,\ KL = k\ AC.$$

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC.$$

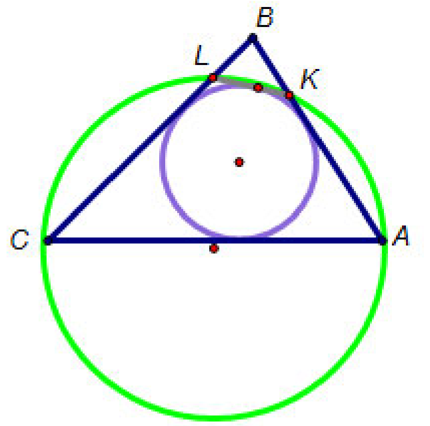


Рис. 3.1.3.1.

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k);\quad k = \frac{AB+BC-AC}{AB+BC+AC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{7+8-9}{7+8+9} = \frac{1}{4}$.

Следовательно. $KL = \frac{1}{4}AC = \frac{9}{4}$.

2. Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 3.1.3.2).

Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK**.** так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$**.**

Замечание. $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

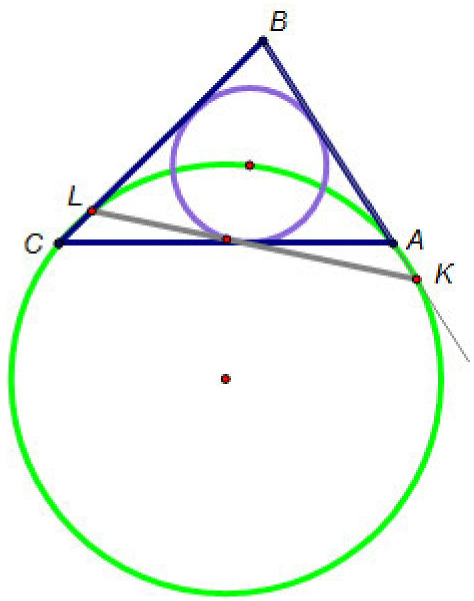


Рис. 3.1.3.2.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не может быть достигнут.

Ответ: $\frac{9}{4}$ или 9.

Задача 3.1.5. (ЕГЭ, 2012). Угол C треугольника ABC равен 60°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB: DC = 2:3$. Найдите угол A.

Решение.

Комментарий. Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому

$\angle ADB = 90°$. Аналогично, $\angle ADC = 90°$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис. 3.1.4.1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис. 3.1.4.2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB — острый.

Положим $DB = 2t$, $DC = 3t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ADB находим:

$$AD = CD\sqrt{3} = 3t\sqrt{3},\ AB = \sqrt{AD^2 + DB^2} = \sqrt{27\,t^2 + 4\,t^2} = t\sqrt{31}.$$

1. Рассмотрим первый случай. По теореме синусов имеем:

$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$ или $\frac{\sin A}{5t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{31}}$, откуда следует, что $\sin A = \frac{5\sqrt{93}}{62}$.

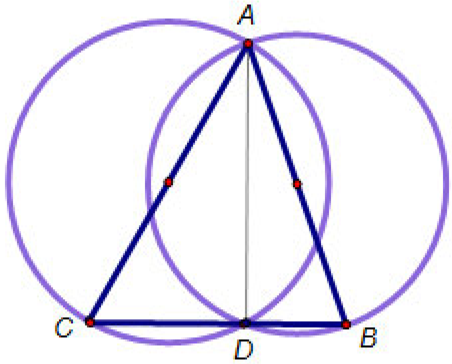


Рис. 3.1.4.1.

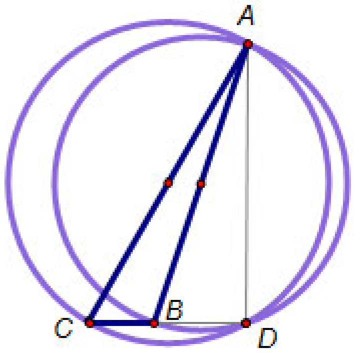


Рис. 3.1.4.2.

2. Во втором случае $\frac{\sin A}{t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t\sqrt{31}}$, откуда следует, что $\sin A = \frac{\sqrt{93}}{62}$.

Найдем AC: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{27\,t^2 + 9\,t^2} = 6t$. Поскольку $AC > BC$, получаем $\angle CBA > \angle BAC$, значит $\angle BAC$ – острый и равен $\arcsin\frac{5\sqrt{93}}{62}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{93}}{62}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{93}}{62}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{93}}{62}$.

Задача 3.1.6. (ЕГЭ, 2013). Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найти MN.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности радиуса $6\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45°} = 12.$$

Комментарий. Поскольку точки O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в угол A, то они лежат на прямой AO_1, причем с одной стороны от точки A. Следовательно, возможны только два случая расположения точек O_1 и O_2.

1. Точка O_2 лежит между точками A и O_1 (см. рис 3.1.5.1), тогда $O_2A = O_1A - O_2O_1 = 12 - 8 = 4$. откуда радиус второй окружности

$O_2M = 4\sin 45° = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем O_1O_2=8, $O_1M = 6\sqrt{2}$ и $O_2M = 2\sqrt{2}$.

Поскольку общая хорда *MN* окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине *MN*.

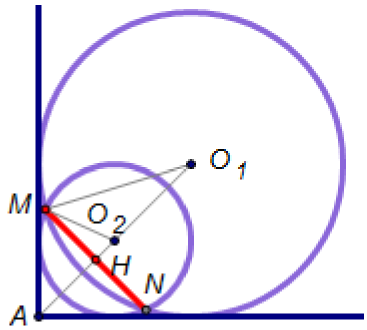


Рис. 3.1.5.1.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 4\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{2},$$

откуда $MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{2}$ и $MN = MH = 4\sqrt{2}$.

2. Точка O_1 лежит между точками A и O_2 (см. рис 3.1.5.2), тогда $O_2A = O_1A + O_2O_1 = 12 + 8 = 20$. откуда радиус второй окружности

$O_2M = 4\sin 45° = 10\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем O_1O_2=8, $O_1M = 6\sqrt{2}$ и $O_2M = 10\sqrt{2}$.

Поскольку общая хорда *MN* окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине *MN*.

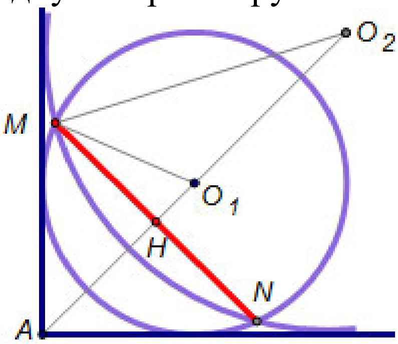


Рис. 3.1.5.1.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 8\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{14},$$

откуда $MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{14}$ и $MN = MH = 4\sqrt{14}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$.

Задачи для самостоятельного решения

(ЕГЭ, 2012). На прямой, содержащей медиану *AD* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C*, взята точка *E*, удаленная от вершины *A* на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника *BCE*, если *BC* = 6**,** *AC* = 4**.**

Ответ: 2,4 или 21,6.

(ЕГЭ, 2012). В треугольнике *ABC* известны стороны, *AB*=5, *BC*=6,

AC=7. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Ответ: $\frac{14}{9}$ или 7.

(ЕГЭ, 2012). В треугольнике угол C равен 60°. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются кроме точки A в точке D. $DB:DC$=1:3 . Найдите угол A в этом треугольнике.

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$ или $\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

(ЕГЭ, 2013). Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный 60°. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN.

Ответ: $\sqrt{7}$ или $3\sqrt{15}$.

3.2. Расположение точек вне прямой

Рассмотрим примеры расположения прямой и точки; примеры расположения двух точек по одну сторону от прямой или по разные; примеры взаимного расположения одной или нескольких точек и двух параллельных прямых. При этом точки могут располагаться в одной или разных полуплоскостях и связанны некоторым условием (например, лежат на одной прямой, принадлежат одной окружности и т.д.).

Задача 3.2.1. Концы отрезка отстоят от прямой на расстоянии 8 и 4. Найдите расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

Комментарий. Неоднозначность формулировки состоит в том, что в условии не указано, лежат концы отрезка в одной или разных полуплоскостях относительно прямой. Возможно два варианта (см. рис. 3.2.1).

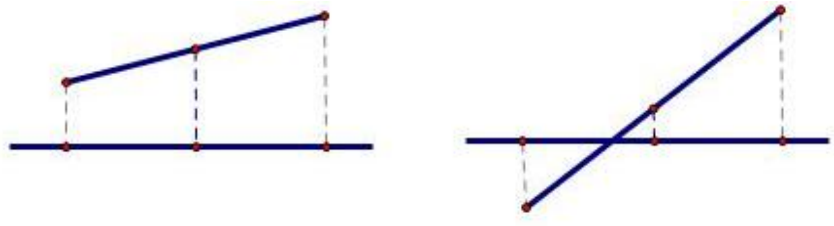


Рис. 3.2.1.

Ответ: 6 или 2.

Задача 3.2.2. Окружность радиуса r касается стороны AC прямоугольного треугольника ABC в точке B. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если катеты треугольника AC и BC равны $2{,}5r$ и $2r$ соответственно.

Комментарий. В данном примере возможно два варианта рисунков, удовлетворяющих условию задачи, так как центр окружности может лежать выше или ниже прямой BC (см. рис. 3.2.2).

Дальше, используя теорему Пифагора, нетрудно получить ответ:

$$\sqrt{(2{,}5\,r - r)^2 + (2\,r)^2} = \sqrt{6{,}25}\,r = 2{,}5\,r$$

или $\sqrt{(2{,}5\,r + r)^2 + (2\,r)^2} = \sqrt{16{,}25}\,r$.

Ответ: $2{,}5\,r$ или $\sqrt{16{,}25}\,r$.

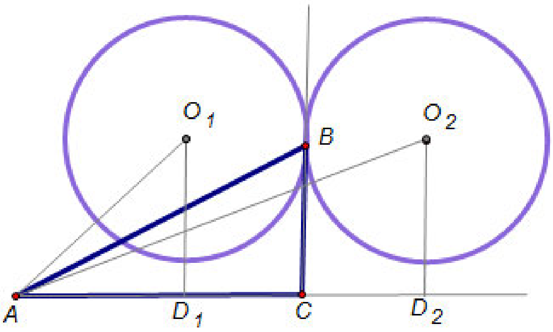


Рис. 3.2.2.

Задача 3.2.3. На стороне BC квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник BCP. Найти высоту треугольника APD, проведенную из вершины D, если известно, что сторона квадрата равна а.

Комментарий. Возможно два варианта чертежа, удовлетворяющих условию задачи: точки D и P лежат по одну сторону прямой BC и по разные.

Решение.

1) Пусть точки D и P лежат по одну сторону прямой BC (см. рис. 3.2.3.1), тогда в равнобедренном треугольнике PBA получаем

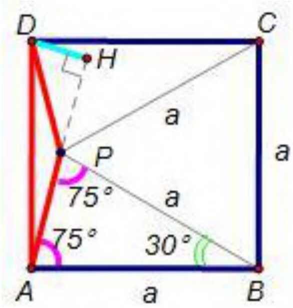


Рис. 3.2.3.1.

$\widehat{PBA} = 30°$ и $\widehat{PAB} = \widehat{APB} = 75°$. Тогда в ΔAPD имеем $\widehat{PAD} = 15°$ и высоту DH:

$$|DH| = |AD|\sin HAD = |AD|\sin PAD =$$

$$= \mathrm{a}\,sin\,15° = \mathrm{a}\sqrt{\frac{1 - cos\,30°}{2}} = \mathrm{a}\sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} =$$

$$= \mathrm{a}\sqrt{\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}} = \mathrm{a}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

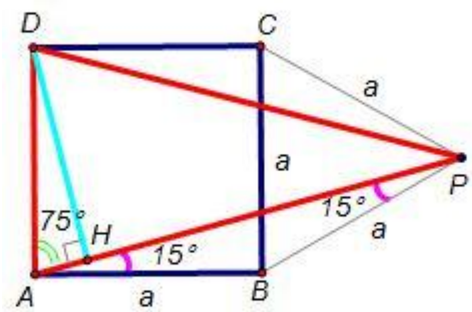


Рис. 3.2.3.2.

2) Пусть точки D и P лежат по разные стороны прямой BC (см. рис. 3.2.3.2), тогда аналогично первому случаю, рассматривая равнобедренный ΔPBA и ΔAPD, выражаем высоту DH:

$$|DH| = |AD|\sin HAD = \mathrm{a}\sin 75° = \mathrm{a}\sqrt{\frac{1-\cos 150°}{2}} = \mathrm{a}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\mathrm{a}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\mathrm{a}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.3. Выбор обозначений вершин многоугольника

К задачам этого типа относят такие задачи, условие которых допускает различные решения в зависимости от варианта буквенного обозначения вершин многоугольника.

Задача 3.3.1. В параллелограмме *ABCD* точки *E* и *F* являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой *EF* от параллелограмма *ABCD*, равна *S*. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки *E, F* и *C*.

Комментарий. При решении данной задачи необходимо рассмотреть четыре случая (см. рис. 3.3.1.1. – 3.3.1.4).

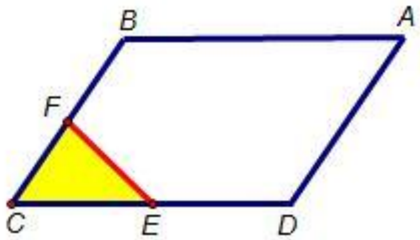


Рис. 3.3.1.1.

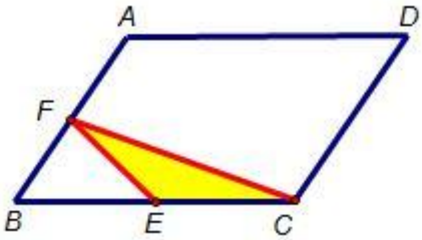


Рис. 3.3.1.2.

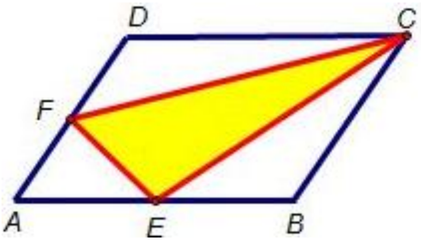


Рис. 3.3.1.3.

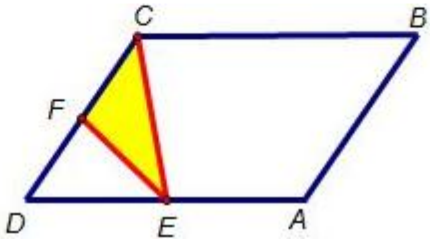


Рис. 3.3.1.4.

Решение. В первом случае искомый треугольник совпадает с отсеченным и его площадь равна *S*. Аналогичная ситуация во втором и четвертом случаях. В третьем случае площадь ΔEFC находится по следующей формуле: $S_{\Delta EFC} = S_{ABCD} - S_{AEF} - S_{FDC} - S_{EBC} = 8S - S - 2S - 2S = 3S$.

Ответ: *S* или *3S*.

Задача 3.3.2. Диагонали AC и BD трапеции *ABCD* пересекаются в точке *N*. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника *CND* равна *G*, а точка *N* делит одну из диагоналей в отношении 1 : k .

Решение.

Комментарий. При решении данной задачи неоднозначность в условии, как и в предыдущем примере, состоит в выборе варианта буквенного обозначения вершин трапеции и дополнительно к этому в выборе большего основания. Пусть точка *N* делит диагональ в отношении 1 : *k*, считая от вершины верхнего основания.

1. Рассмотрим трапецию с основаниями *AB* и *CD* (см. рис. 3.3.2.1). Треугольники *ANB* и *CND* подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $\frac{DN}{BN} = k$. Значит $S_{ANB} = k^2 S_{CND}$. Обозначим площадь треугольника *CND* через *S*: $S_{CND} = S$, тогда $S_{ANB} = k^2 S$.

Замечание. Точка *N* делит обе диагонали в отношении 1 : *k*.

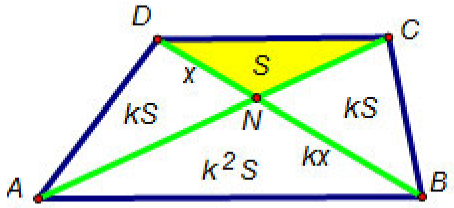


Рис. 3.3.2.1.

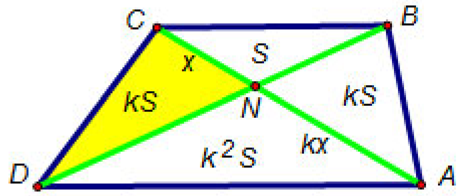


Рис. 3.3.2.2.

Треугольники *CND* и *CNB* имеют общую высоту, поэтому

$$\frac{S_{CNB}}{S_{CND}} = \frac{NB}{ND} = k \text{ или } S_{CNB} = kS.$$

Аналогично получаем, что $S_{AND} = kS$.

Следовательно, искомая площадь равна

$$S + kS + kS + k^2 S = (k+1)^2 S.$$

Замечание. Данные соотношения площадей 4 треугольников в трапеции на зависят от обозначения вершин.

Поскольку в рассматриваемом случае $S_{CND} = G = S$, то искомая площадь $S_{ABCD} = (k+1)^2 G$.

2. В случаях, когда трапеции обозначены как *DABC* (см. рис. 3.3.2.2) или *BCDA* (см. рис. 3.3.2.4), имеем $S_{CND} = G = kS$ и $S_{ABCD} = \frac{(k+1)^2}{k} G$.

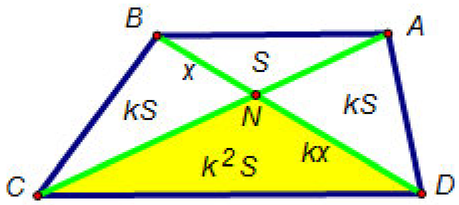


Рис. 3.3.2.3.

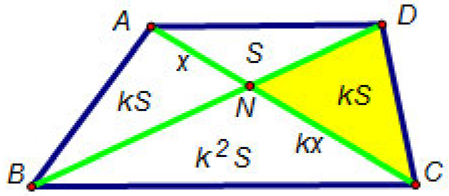


Рис. 3.3.2.4.

3. В случае трапеции *CDAB* (см. рис. 3.3.2.4), имеем

$$S_{CND} = G = k^2 S \text{ и } S_{ABCD} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 G.$$

Ответ: $(k+1)^2 G$, $\frac{(k+1)^2}{k} G$ или $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 G$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу 3.3.2 для случаев *k*=3 и *G*=9; *k*=5 и *G*=25.

Ответ: 1) 16; 48; 144; 2) 36; 180; 900.

Задача 3.3.3. (ЕГЭ 2012). Боковые стороны *KL* и *MN* трапеции *KLMN* равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые *KL* и *MN* пересекаются в точке ***A*.** Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ALM*.

Решение. В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, ранен полуразности оснований трапеции, а средняя линия - полусумме оснований трапеции (см. выше свойства трапеции). В нашем случае полуразность оснований равна 7,5, а полусумма оснований равна 17,5, поэтому основания трапеции равны 10 и 25.

Комментарий. В нашем примере возможны два случая обозначения вершин.

1. Предположим, что $LM = 25$, $KN = 10$ (см. рис. 3.3.3.1). Стороны *LM* и *KN* треугольников *ALM* и *AKN* параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит,

$$\frac{AL}{KL} = \frac{AL}{AL - AK} = \frac{AL}{AK - k \cdot AL} = \frac{1}{1-k} = \frac{5}{3},$$

откуда получаем $AL=\frac{40}{3}$. Аналогично получаем $AM=\frac{85}{3}$.

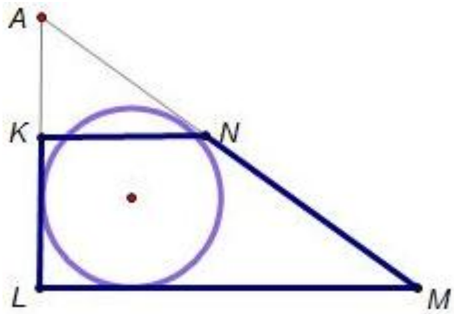


Рис. 3.3.3.1.

В любом треугольнике, у которого известны все стороны a, b и c, радиус вписанной окружности можно выразить через площадь и полупериметр:

$$r = \frac{S}{p},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$ и $S = \sqrt{p(p-\mathrm{a})(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

Подставляя значения, получим r=5.

2. Пусть теперь $KN = 25$, $LM = 10$ (см. рис. 3.3.3.2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника *AKN* равен 5.

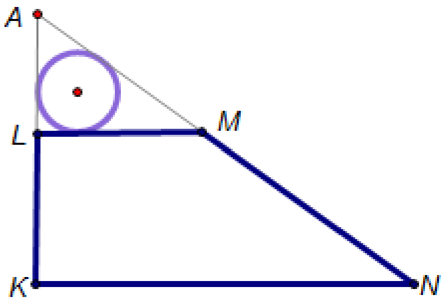


Рис. 3.3.3.2.

Треугольники *AKN* и *ALM* подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника *ALM* равен $r=5k=2$.

Ответ: 5 или 2.

Замечание. Данную задачу можно решить с меньшими алгебраическими преобразованиями, если заметить, что в большем треугольнике (обозначим его по первому случаю *ALM*) величины сторон удовлетворяют равенству:

$$AL^2 + LM^2 = AM^2.$$

Последнее означает, что треугольник *ALM* – прямоугольный. Радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника можно найти по формуле:

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2}.$$

3.4. Выбор некоторого элемента фигуры

К задачам этого типа относят такие задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано какого конкретно из имеющихся. Такими элементами могут быть как линейные, так угловые элементы.

Задача 3.4.1. Найти площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны α, если одна из его сторон равна b.

Комментарий. Для получения ответа необходимо рассмотреть два случая. В первом случае b - это основание, во втором – боковая сторона.

Ответ: $\frac{b^2}{4} tg\alpha$ или $\frac{b^2}{2}\sin 2\alpha$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу 3.4.1 для случаев α=30°, 45°, 60° и b=8, 10, 12.

Замечание. В случае α=60° треугольник становится равносторонним и решение задачи единственным

Задача 3.4.2. Найти площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны b, а один из углов равен α.

Комментарий. В этой задаче аналогично предыдущей необходимо рассмотреть два случая. В первом случае α – это угол при основании, во втором – при вершине.

Ответ: $\frac{b^2}{4}\sin 2\alpha$ или $\frac{b^2}{4}\sin\alpha$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить задачу 3.4.2 для случаев α=30°, 45°, 60° и b=8, 10, 12.

Замечание. В случае α=60° треугольник становится равносторонним и решение задачи единственным

Задача 3.4.3. (ЕГЭ 2012). Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри нею расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором AB=BC=4, $\angle BAC$=120°. Пусть AH высота треугольника ABC**.** Тогда H -середина BC**,**

$$BC = 2 \cdot BH = \mathbf{2} \cdot AB \cdot \cos 30° = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Комментарий. В данном примере возможно два варианта расположения окружностей: они касаются основания или боковой стороны равнобедренного треугольника.

1. Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ACB и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D (см. рис. 3.4.1.1).

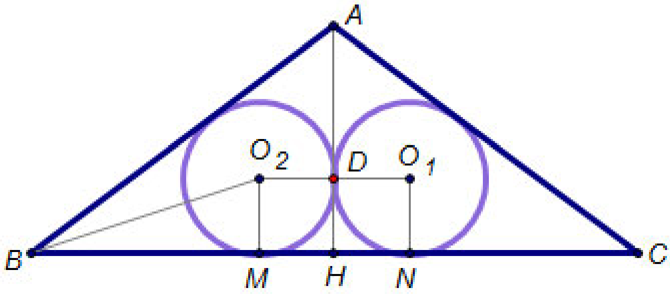


Рис. 3.4.1.1

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM = 15°,$$

$$tg15° = \frac{\sin 30°}{1+\cos 30°} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$$BM = O_2M \cdot ctgMBO_2 = r \cdot ctg15° = r \cdot (2+\sqrt{3}).$$

Тогда CN = BM = = $r \cdot (2+\sqrt{3})$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, MN = $O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$$4\sqrt{3} = BC = BM + MN + CN =$$
$$r \cdot (2+\sqrt{3}) + 2r + r \cdot (2+\sqrt{3}) = r \cdot (6+2\sqrt{3}),$$

откуда находим $r = \frac{4\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}$.=$\sqrt{3}$-1.

2. Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке N, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC**,** касается боковой стороны AB в точке M**,** а также касается первой окружности (см. рис. 3.4.1.2).

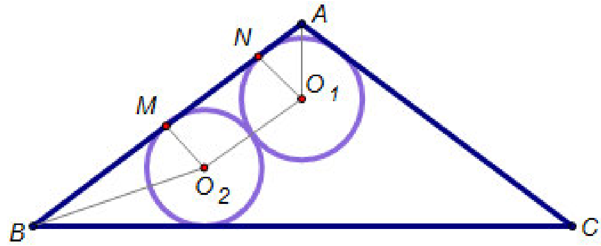


Рис. 3.4.1.2

Из прямоугольных треугольников ANO_1 и BMO_2 находим:

$$AN = O_1N \cdot ctgNAO_1 = r \cdot ctg60° = \frac{r}{\sqrt{3}},$$

$BM = O_2M \cdot ctgMBO_2 = r \cdot ctg15° = r \cdot (2+\sqrt{3}).$

Следовательно,

$$4 = AB = AN + NM + MB = AN + O_1O_2 + MB =$$
$$= \frac{r}{\sqrt{3}} + 2r + r \cdot \left(2+\sqrt{3}\right),$$

откуда находим $r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. В случае, когда окружности вписаны в углы *BAC и ABC* получим тот же результат.

Ответ: $\sqrt{3}$-1 или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

3.5. Выбор плоской фигуры

Задачи данного пункта могут быть связаны с неопределенностью выбора отношения площадей фигур, выбором подобных треугольников и т.д.

Задача 3.5.1. Дан произвольный треугольник, одна из сторон которого равна а. Прямая, параллельная известной стороне, разбивает треугольник на 2 фигуры, площади которых относятся как 4 : 5. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри треугольника.

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник *ABC*, в котором *BC*=а. Прямая, параллельная *BC,* пересекает стороны треугольника в точках *K* и *N*, *KN*=*x* (см. рис. 3.5.1). Обозначим $S_{ABC} = S$, $S_{AKN} = S_1$, $S_{BKNC} = S_2$. Очевидно, что $S = S_1 + S_2$.

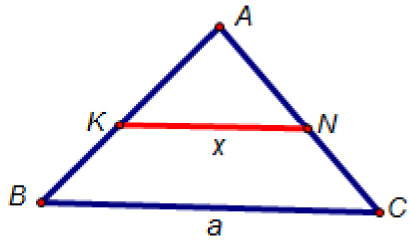


Рис. 3.5.1.

$\Delta AKN \sim \Delta ABC$ (см. признаки подобия треугольников) с коэффициентом подобия $k = \frac{x}{\text{a}}$.

Комментарий. В данном примере возможно два варианта отношения площадей.

1. Пусть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}$, тогда $\frac{S_1}{S} = \frac{4}{9}$ и, т.к. треугольники подобны, $\frac{S_1}{S}$=k^2.

Следовательно, имеем $\frac{4}{9} = k^2 = \left(\frac{x}{\text{a}}\right)^2$, $x = \sqrt{\frac{4}{9}}\text{a} = \frac{2}{3}\text{a}$.

2. Пусть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$, тогда $\frac{S_1}{S} = \frac{5}{9}$ и $x = \sqrt{\frac{5}{9}}\text{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}\text{a}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$a или $\frac{\sqrt{5}}{3}$a.

Задача 3.5.1. Основания трапеции равны b и c. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 3 : 2 . Найти длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Решение. Пусть параллельная прямая пересекает боковые стороны AD и BC трапеции в точках K и N соответственно, $KN=x$ (см. рис. 3.5.2). Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника ABM.

Обозначим $S_{KNCD} = S_1,\ S_{ABNK} = S_2,\ S_{MDC} = S.$

Очевидно, что $\Delta MDC \sim \Delta MKN \sim \Delta MAB$. Поэтому имеем:

$$\frac{S_{MAB}}{S_{MDC}} = \frac{S+S_1+S_2}{S} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{S_{MKN}}{S_{MDC}} = \frac{S+S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2}.$$

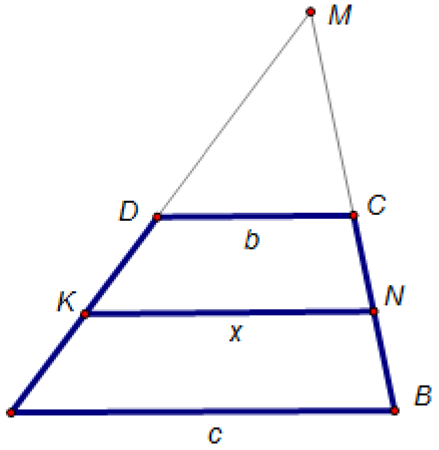


Рис. 3.5.1.

Откуда следует:

$$1 + \frac{S_1+S_2}{S} = \frac{c^2}{b^2},\ \frac{S_1+S_2}{S} = \frac{c^2-b^2}{b^2}\ (*)$$

и $1 + \frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{b^2},\ \frac{S_1}{S} = \frac{x^2-b^2}{b^2}\ (**)$

Разделив первое на второе равенство, получаем:

$$\frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{c^2-b^2}{x^2-b^2}.$$

Комментарий. В данном примере возможно два варианта отношения площадей.

1. Пусть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$, тогда $S_2 = \frac{2}{3}S_1$ и $\frac{c^2-b^2}{x^2-b^2}=\frac{5}{3}$, откуда $x = \sqrt{\frac{3c^2+2b^2}{5}}$.
2. Пусть $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$, тогда $S_2 = \frac{3}{2}S_1$ и $\frac{c^2-b^2}{x^2-b^2}=\frac{5}{2}$, откуда $x = \sqrt{\frac{2c^2+3b^2}{5}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{3c^2+2b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{2c^2+3b^2}{5}}$.

4. Заключение

Предложенные материалы могут применяться учителями математики при углубленном изучении материала, в частности на факультативах.

Данная работа так же может быть использована учащимися средних и старших классов для самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике.

Отметим, что меняя значения начальных данных в рассмотренных выше задачах, мы легко получаем абсолютно новые задачи, решить которые простым повторением действий удается далеко не всегда.

Выпускники средних общеобразовательных школ должны не только овладеть материалом школьных программ, но и уметь творчески применять его, находить решение любой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордин, Р.К. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 148 с.
2. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012, 192 с.
3. Кожухов, С.К. Планиметрические задачи с неоднозначным ответом. // Математика в школе. – 2011 – №5.
4. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2013: Математика / авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – 111 с. (Федеральный институт педагогических измерений).
5. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2012 (открытый банк заданий).
6. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.
7. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.
8. http://reshuege.ru/ – Решу ЕГЭ, Образовательный портал для подготовки к экзаменам.
9. http://webmath.exponenta.ru/ege_11/c4/e1.html – ЗНО ЕГЭ in Maple
10. http://zadachi.mccme.ru/2012 – Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии».
11. http://www.problems.ru – Интернет-проект «Задачи».
12. egetrener.ru – «ЕГЭ: онлайн-помощник по математике», сайт О.И. Себедаш.

Долженко Игорь Валентинович

Задачи по планиметрии
с комментариями и решениями
(часть 1)

Оригинал-макет изготовлен
редакционно-издательским отделом
АУ «Институт развития образования»

Дизайн обложки:
Белов М.В.

Формат 60*84/16. Гарнитура Times New Roman.
Заказ № 350. Усл.п.л.4. Тирах 50 экз.

АУ «Институт развития образования»

628011, Ханты-Мансийский автономный округ-Югра,
г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 12.