1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

<u>Лекционное занятие № 4</u>

Тема № 1.5: «Уравнения и неравенства»

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие
по Теме № 1.5 «Уравнения и неравенства»

Цель занятия: линейные, квадратные, дробно-линейные уравнения и неравенства.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по повторению пройденного материала, проверке знаний, умений по пройденному материалу).

Метод проведения занятия: повторное доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий

Время проведения: 2 ч (90 мин.)

Основные вопросы:

1. Линейные уравнения.
2. Квадратные уравнения.
3. Дробно-линейные уравнения.
4. Линейные неравенства.
5. Квадратные неравенства.
6. Дробно-линейные неравенства.
7. Выполнение практических заданий.

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Линейные уравнения.</u>

Линейным называется уравнение, содержащее переменную в первой степени. Уравнение будет линейным, даже если в нем присутствуют дроби. Главное, чтобы переменной не было в знаменателе. ***Корень линейного уравнения*** – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Линейные уравнения

Уравнение - это математическое равенство, которое содержит неизвестное.

Решить уравнение - значит найти все его корни или доказать, что корней нет

Корень уравнения - число, при подстановке которого вместо неизвестного, уравнение обращается в верное равенство

Линейное уравнение

$$ax + b = 0$$

неизвестное **любые числа**

Если $a \neq 0$, **один корень**
Если $a = 0$, **корней нет**
Если $a = 0$, $b = 0$, корень - **любое число**

Правило переноса членов уравнения

1 **При переносе** члена уравнения из одной части уравнения в другую нужно **менять знак на противоположный**

$$\boxed{x + 5} = \boxed{7}$$

Левая часть уравнения Правая часть уравнения

2 Все **члены с X** оставляем **слева**, а все **числа** - переносим **вправо**

$$\boxed{x} = \boxed{7 - 5}$$

+5 перенесли в правую часть со знаком -

Левая часть уравнения Правая часть уравнения

Корень уравнения $\longrightarrow$ $x = 2$

Второй вопрос: <u>Квадратные уравнения.</u>

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, в котором a, b и c — действительные числа, и $a \neq 0$, называется **квадратным уравнением**.

$4x^2 - 3x + 1 = 0$;
$a = 4$;
$b = -3$;
$c = 1$.

Корни квадратного уравнения вычисляют по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a},$$ где $D = b^2 - 4ac$.

D называется **дискриминантом**.

По значению дискриминанта можно определить количество корней квадратного уравнения.
Если $D < 0$ (отрицательный), то у уравнения **нет** действительных корней.
Если $D = 0$, то у уравнения два равных корня.
Если $D > 0$ (положительный), то у уравнения два различных корня.

Приведённое квадратное уравнение (коэффициент при x^2 равен 1, т. е. $a = 1$)
$x^2 + bx + c = 0$ можно решить с помощью обратной теоремы Виета: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$

Неполные квадратные уравнения

Неполные квадратные уравнения имеют 2 вида.
1 вид. Если $c = 0$, то $ax^2 + bx = 0$.
2 вид. Если $b = 0$, то $ax^2 + c = 0$.

Неполные квадратные уравнения можно решать с помощью формул дискриминанта, но рациональнее вı
специальные способы:

1 вид. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ можно решить, разложив на множители (вынести за скобку x)
$x \cdot (ax + b) = 0$.
$x = 0$ или $ax + b = 0$. Значит, один корень равен 0, а второй корень $x = \dfrac{-b}{a}$
(т. к. произведение двух чисел равно 0 только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0).

$2x^2-30x=0;$

$x(2x-30)=0;$

$x=0,$ *или* $2x-30=0;$

$2x=30;$

$x=15.$

Ответ: $x=0;\ x=15.$

Третий вопрос: <u>Дробно-линейные уравнения.</u>

Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называется дробным.

Для решения дробного уравнения, необходимо:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Пример:

реши дробное уравнение $\dfrac{3}{x-1}+2=\dfrac{4-x}{x-1}.$

1. Находим значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл:

$$\frac{3}{x-1}+2=\frac{4-x}{x-1};\quad x-1\neq 0,\ \text{поэтому}\ x\neq 1.$$

2. Находим общий знаменатель дробей и умножаем на него обе части уравнения:

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2^{\backslash(x-1)}}{1}=\frac{4-x}{x-1};$$

$$\frac{3+2(x-1)}{x-1}=\frac{4-x}{x-1}\quad\Big|\cdot(x-1).$$

3. Решаем полученное уравнение:

$$3+2(x-1)=4-x;$$
$$3+2x-2=4-x;$$
$$3x=3;$$
$$x=1.$$

4. Исключаем те корни, при которых общий знаменатель равен нулю.

В первом пункте получилось, что при $x=1$ уравнение не имеет смысла, поэтому число 1 не может являться корнем данного дробного уравнения. Следовательно, у данного уравнения вообще нет корней.

При решении уравнения можно использовать основное свойство пропорции.

Основное свойство пропорции: если $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, то $a\cdot n=b\cdot m$.

$$\frac{1}{6x-12}=\frac{1}{9x+18}; \quad 6x-12\neq 0; \quad 9x+18\neq 0;$$
$$x\neq 2; \quad x\neq -2.$$
$$\frac{1}{6x-12} \times \frac{1}{9x+18};$$
$$1\cdot(9x+18)=1\cdot(6x-12);$$
$$9x+18=6x-12;$$
$$3x=-30;$$
$$x=-10; \quad -10\neq 2; \quad -10\neq -2.$$

Корень $x=-10$.

Проверка:

$$\frac{1}{6\cdot(-10)-12}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9\cdot(-10)+18};$$

$$\frac{1}{-60-12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{-90+18};$$

$$\frac{1}{-72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{-72}.$$

Четвёртый вопрос: **Линейные неравенства.**

Линейным неравенством называется неравенство, которое дано или преобразуемо в форму $ax > b$ или $ax < b$, также $ax \geq b$ или $ax \leq b$,
где a, b — числа и x — переменная.

Пример:

$a - 5 > 0$;
$a > 5$.
Ответ : $a \in (5; +\infty)$

$-2y - 100 < 0$;
$-2y < 100 | : (-2)$
(меняем знак неравенства на противоположный);
$y > 100 : (-2)$;
$y > -50$.
Ответ : $y \in (-50; +\infty)$

$-3c \geq -15 \; |: (-3)$
(меняем знак неравенства на противоположный);
$c \leq -15 : (-3)$;
$c \leq 5$.
Ответ : $c \in (-\infty; 5]$

При умножении или делении неравенства на положительное число знак неравенства не меняется. При умножении или делении неравенства на отрицательное число знак неравенства заменяется противоположным.

Пятый вопрос: <u>Квадратные неравенства.</u>

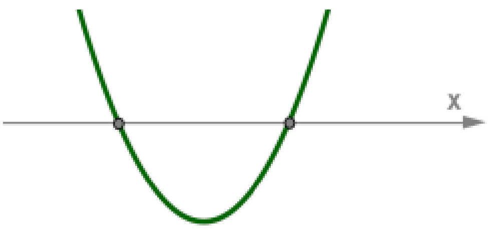
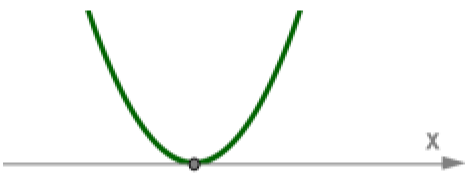
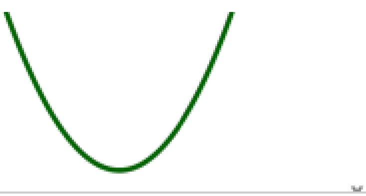
Общий вид квадратных неравенств — это $ax^2+bx+c>0$ $(<0,\ \leq 0,\ \geq 0)$, где $a\neq 0$.

Множество решений квадратного неравенства легко определить, приблизительно начертив график функции $y=ax^2+bx+c$ (параболу).

Шаги решения квадратного неравенства.

1. Определяются точки пересечения параболы и оси x с помощью решения уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Вспомним формулы корней квадратного уравнения:
$D=b^2-4ac;$
$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$

Если $D>0$, у уравнения — два разных корня, парабола пересекает ось x в двух точках	
Если $D=0$, у уравнения — два одинаковых корня, вершина параболы находится на оси x	
Если $D<0$, у уравнения нет реальных корней, парабола не	

пересекает ось x

2. Учитывая количество корней и знак коэффициента a, чертится график параболы.

Обрати внимание!

Если $a > 0$, то ветви параболы устремлены вверх, если $a < 0$, то вниз.

Совет: если хочешь, чтобы ветви параболы всегда были устремлены вверх, в случаях, когда $a < 0$, сначала обе части неравенства перемножь на (-1).
Не забудь, что на противоположный поменяется также знак неравенства.

3. Выбираются пустые или закрашенные точки, в зависимости от вида знака неравенства:
●, если стоит знак нестрогого неравенства — $\leq$ или $\geq$;
o, если стоит знак строгого неравенства — $<$ или $>$.

4. Закрашивается правильный интервал.

5. Записывается ответ.

Пример:

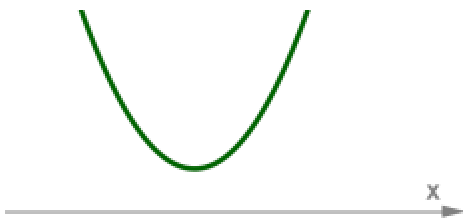
решить квадратное неравенство $-2x^2 + 4x - 5 \leq 0$.
Решение:

$-2x^2 + 4x - 5 \leq 0 \,\big|\cdot(-1)$

$2x^2 - 4x + 5 \geq 0;$

$D = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24;$

парабола не пересекает ось Ox.



По рисунку видно, что график положителен любому значению x.

Ответ:
$x \in (-\infty; +\infty)$, или $x \in R$

Шестой вопрос: <u>Дробно-линейные неравенства.</u>

Дробно-рациональные неравенства — это неравенства, в которых есть дроби. Знаменатель дроби не должен равняться нулю, а значит, для корней будут дополнительные ограничения.

Поэтому для решения таких неравенств необходимо знать ограничения основных функций алгебры и тригонометрии плюс знать «метод интервалов», который постоянно используется для нахождения ответа.

Метод решения

Чтобы всё сразу было наглядно, возьмём простой пример.

Итак, необходимо решить следующее дробно-рациональное неравенство:

$$\frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x}$$

Сразу для этого неравенства смотрим на функции в числителях и знаменателях и их ограничениях:

1) В числителях ограничений не будет, так как функции f(x) = 4-x и f(x) = 1 являются прямыми, а у прямых нет ограничений ни по оси OX, ни по оси OY.

2) Подробно остановимся на знаменателях.

2.1) f(x) = x-5 — прямая, но так как она находится в знаменателе, то будет ограничена следующим образом:

$$x - 5 \neq 0$$

и

$$x \neq 5$$

2.2) $f(x) = 1 - x$ — прямая, но так как она находится в знаменателе, то будет ограничена так же, как и предыдущая:

$$1 - x \neq 0$$

Откуда

$$x \neq 1$$

Теперь мы можем начать решать наше неравенство, и когда найдём решение, то после применим ограничение по корням:

$$\frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x}$$

Для начала перенесём справа всё в левую часть:

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \geq 0.$$

Напоминаю, что знак неравенства не меняется (не переворачивается на 180 градусов), если мы просто переносим слагаемое из одной части в другую.

$$\frac{(4-x)\cdot(1-x)-(x-5)}{(x-5)(1-x)} \geq 0$$

$$\frac{4-4x-\mathrm{x}+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} \geq 0$$

Приравнивая числитель к нулю, решаем уравнение:

$$x^2-6x+9=0,$$

получим корень $x_1 = 3.$

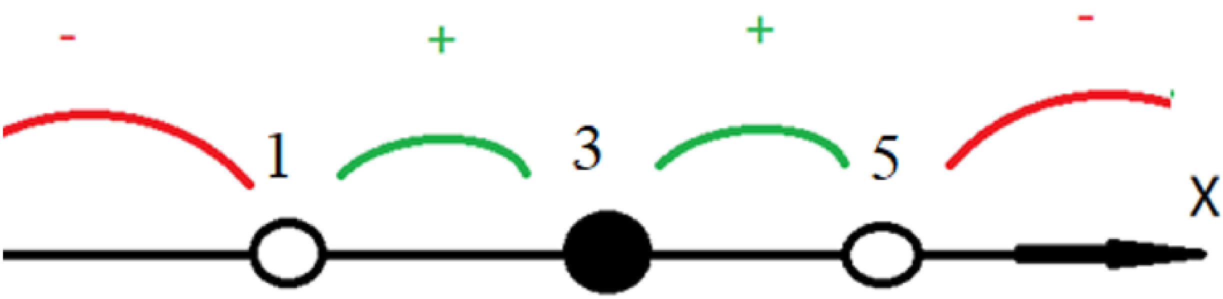
$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} \geq 0$$

В нашем неравенстве условие было «больше или равно», так что нам надо узнать, на каких промежутках наша функция будет принимать положительные значения (f(x) > 0). Для этого необходимо выбрать любое число на прямой между теми значениями, что уже нанесены на прямую, и подставить в функцию.

Возьмём x = 6.

$$\frac{(6-3)^2}{(6-5)(1-6)} < 0$$

Причём, так как нам надо знать только знак («+» или «-») функции, то и вычислять досконально не требуется. В нашем случае на промежутке от числа 5 до бесконечности функция принимает отрицательные значения. Дальше, чередуя плюс и минус, заполняем все четыре интервала. При расстановке знаков учитываем, что линейный множитель $(x-3)^2$ стоит в чётной степени. В этом случае при переходе через точку 3 знак не меняется. Теперь с помощью метода интервалов расставляем корни на числовой прямой, также не забывая и про «ограничения»:



Точки, которые не должны попасть в ответ, иначе ответ будет неверным, на числовой прямой выколоты (незакрашенная точка). А корни, которые были получены из числителя, будут закрашены главным образом потому, что неравенство было нестрогое (то есть присутствует знак «больше или равно» или «меньше или равно»).

Итак, ищем знаки «+» и выписываем слева направо эти интервалы в ответ. Причём какой бы ни был знак в условии неравенства (строгий или нет), у знака «бесконечность» скобка будет всегда круглая.

Ответ: $x \in (1;3| \vee |3;5)$ или $x \in (1;5)$

Седьмой вопрос: <u>Выполнение практических заданий.</u>

Задание: рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), приведенных при рассмотрении с первого по шестой вопросов текущего План-конспекта занятия.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, рассмотреть примеры выполнения практических заданий – решение задач, приведенных при рассмотрении с первого по шестой вопросов текущего План-конспекта занятия.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.