Министерство образования, науки и молодежной политики Краснодарского края
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Краснодарского края
«Армавирский машиностроительный техникум»

Методическое пособие

по учебной дисциплине
«Математика: алгебра и начала анализа; геометрия»

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ШКОЛЬНОГО КУРСА

для обучающихся 1-х и 2-х курсов
всех специальностей и профессий

2016

Содержание

Введение

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают одно из ведущих мест: они имеют не только важное теоретическое значение, но и служат для практических целей. На их изучение отводится больше времени, чем на любую другую тему. Решение уравнений является одним из наиболее трудных вопросов, так как чтобы правильно решить уравнение нужно:

знать:

- большое количество формул;
- какие способы решения уравнений в каких случаях целесообразно применить;

уметь:

- проводить тождественные преобразования входящих в него выражений;
- безошибочно вычислять.

Цель настоящего пособия состоит в том, чтобы систематизировать и обобщить знания обучающихся по теме «Уравнения в школьном курсе математики», а также помочь им вспомнить, самостоятельно изучить основные методы решения различных видов уравнений и преодолеть трудности, встречающиеся при изучении уравнений.

Разработка данного пособия была вызвана, с одной стороны, отсутствием в техникуме единого учебника, в котором содержались бы все необходимые сведения по данному разделу, с другой, крайне низкими результатами входного контроля и необходимостью помочь слабоуспевающим обучающимся научиться решать уравнения. Именно поэтому в пособии нет уравнений повышенного уровня сложности. Основной упор дан на отработку стандартных методов решения уравнений. Не рассматривается в пособии и функционально-графический метод решения уравнений.

Содержательные части всех тем, включенных в данное пособие, построены одинаково, а именно, сначала дается краткий систематизированный материал по теории, затем на примерах, в процессе решения типовых уравнений, иллюстрируются различные методы их решения. В конце каждой темы для отработки понятий и методов имеются уравнения для самостоятельного решения. Ко всем уравнениям даются ответы, чтобы обучающиеся могли контролировать правильность своего решения.

1. Основные понятия

<u>Опр.</u> ***Уравнение*** – это равенство с одной или несколькими переменными (***неизвестными***).

<u>Опр.</u> Значения неизвестных, при которых данное уравнение обращается в тождество, называются ***корнями уравнения***.

<u>Опр.</u> Процедура нахождения *всех* корней уравнения называется ***решением*** уравнения.

(!!) *Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.*

Подстановка любого корня вместо неизвестного обращает уравнение в *верное числовое равенство*.

<u>Опр.</u> Два или несколько уравнений называются ***равносильными***, если они имеют одни и те же корни.

Решение уравнения – это процесс, состоящий в основном в замене заданного уравнения другим уравнением, ему равносильным. Такая замена называется ***тождественным преобразованием***.

При решении уравнений используются следующие основные тождественные преобразования:

1) *Замена одного выражения другим, тождественно равным ему.*

Например: уравнение $(3x + 2)^2 = 15x + 10$ можно заменить следующим равносильным: $9x^2 + 12x + 4 = 15x + 10$.

2) *Перенос членов уравнения из одной стороны в другую с обратными знаками.*

Так, в предыдущем уравнении можно перенести все его члены из правой части в левую со знаком «–»: $9x^2 + 12x + 4 - 15x - 10 = 0$, после чего получим: $9x^2 - 3x - 6 = 0$.

3) *Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение (число), отличное от нуля.*

Это очень важно, так как новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, если выражение, на которое мы умножаем или делим, может быть равно нулю.

Пример. Уравнение $x - 1 = 0$ имеет единственный корень $x = 1$.

Умножив обе его части на $x - 3$, получим уравнение $(x - 1)(x - 3) = 0$, у которого два корня: $x = 1$ и $x = 3$. Последнее значение не является корнем заданного уравнения $x - 1 = 0$. Это так называемый ***посторонний корень***.

И наоборот, деление может привести к ***потере корня***. Так, в нашем случае, если $(x - 1)(x - 3) = 0$ является исходным уравнением, то корень $x = 3$ будет потерян при делении обеих частей уравнения на $x - 3$.

В последнем уравнении (п.2) можно разделить все его члены на 3 (не ноль!) и окончательно получим: $3x^2 - x - 2 = 0$.

Это уравнение равносильно исходному: $(3x+ 2)^2 = 15x + 10$.

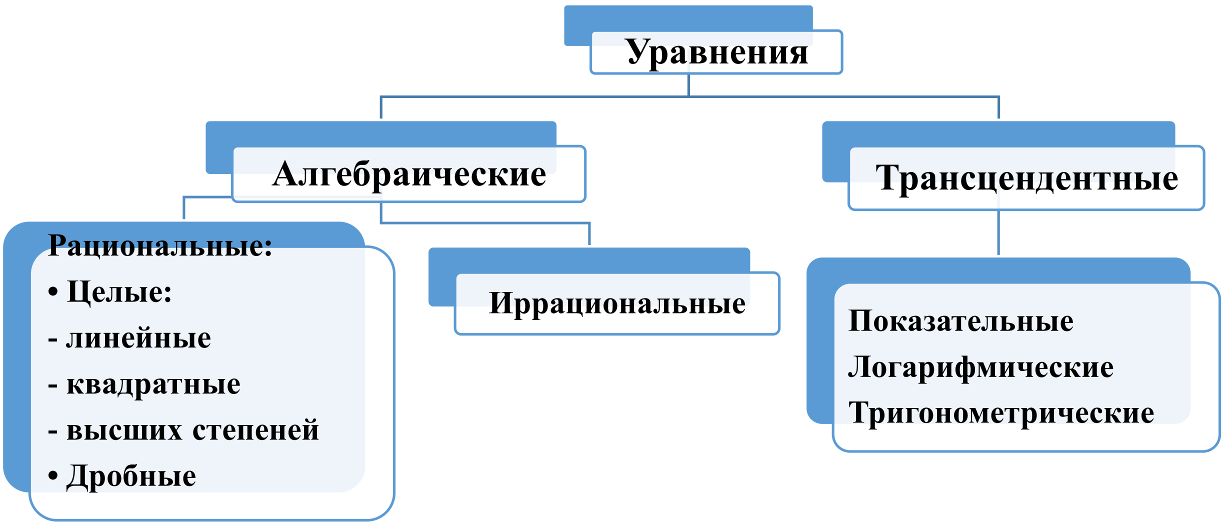
4) *Возведение обеих частей уравнения в нечетную степень* или *извлечение из обеих частей уравнения корня нечетной степени.*

Необходимо помнить, что:

а) возведение в *четную степень* может привести *к приобретению посторонних корней*;

б) *неправильное* извлечение *корня четной степени* может привести к *потере корней*.

2. Классификация уравнений



3. Целые уравнения с одной переменной и их решение

<u>**Опр.**</u> Уравнения вида P(x) = 0, где P(x) – многочлен в стандартном виде, называются ***целыми***. Степень этого многочлена является ***степенью*** уравнения.

3.1. Решение линейных уравнений

<u>**Опр.**</u> Уравнения вида $\boldsymbol{ax + b = 0}$, где a и b – некоторые числа, а также приводимые к ним называются ***уравнениями 1-й степени***.

а) Если $\boldsymbol{a \neq 0}$, то уравнение называется ***линейным***.

(!!) *Линейное уравнение всегда имеет 1 корень:* $\boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$

б) Если $\boldsymbol{a = 0}$, то возможны два случая:

1. $\boldsymbol{b = 0}$, тогда $0 \cdot x + 0 = 0$. Здесь x *может быть любым числом*.
2. $\boldsymbol{b \neq 0}$, тогда $0 \cdot x + b = 0$. Здесь *нет решений*.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) 5x – 40 = 0
   5x = 40
   x = 8
Ответ: 8

2) 18x – 24 = 15x + 3
   18x – 15x = 3 + 24
   3x = 27
   x = 9
Ответ: 9

3) 2/3 x – 4 = 1/5 x + 3 / · 15
   10x – 60 = 3x + 45
   10x – 3x = 45 + 60
   7x = 105
   x = 15
Ответ: 15

Решите уравнения:

1) 5x – 3 = 12 *Ответ: 3*

2) – 4x + 1 = 13	*Ответ: - 3*
3) 6x – 14 = 1 + 3x	*Ответ: 5*
4) – 8x + 3 = – x + 24	*Ответ: - 3*
5) 5(x – 2) – 4 = 6x + 7	*Ответ: - 21*
6) $\frac{7}{9}x + 4 = \frac{2}{3}x + 8$	*Ответ: 36*
7) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = x - 3$	*Ответ: 9*
8) 5,1 – 8x = 3,3 – 10x	*Ответ: - 0,9*
9) 0,7(2 – 3y) = – 7	*Ответ: 4*

3.2. Решение квадратных уравнений

Опр. Уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$, а также приводимые к ним называются ***квадратными***.

Если $a = 0$, то уравнение становится линейным.

Если b или c (или оба) равны нулю, то это уравнение называется ***неполным***.

3.2.1. Неполные квадратные уравнения

3.2.1.1. Уравнения вида $x^2 = m$ и приводимые к ним

1) Если $m > 0$, то уравнение имеет два корня: $\sqrt{m}$ и $-\sqrt{m}$.

2) Если $m = 0$, то уравнение имеет один корень: 0.

3) Если $m < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $x^2 = 49$

$x = \pm\sqrt{49}$

$x = \pm 7$

Ответ: ± 7

2) $2x^2 = -8$

$x^2 = -4$

Нет корней

Ответ: Ø

3) $4x^2 - 12 = 0$

$4x^2 = 12$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$

4) $(x - 8)^2 = 64$

$x - 8 = 8$ или $x - 8 = -8$

$x = 16$ $\quad$ $x = 0$

Ответ: 0; 16

Решите уравнения:

1) $x^2 = \frac{9}{25}$	*Ответ:* $\pm\frac{3}{5}$
2) $x^2 = -0{,}36$	*Ответ: Ø*
3) $16 - x^2 = 0$	*Ответ:* ± 4
4) $x^2 - 0{,}06 = 0{,}03$	*Ответ:* $\pm 0{,}3$
5) $-0{,}2x^2 = -1{,}8$	*Ответ:* ± 3
6) $y^2 - 16 = -(12 + 3y^2)$	*Ответ:* ± 1
7) $48 - 3x^2 - (3 - x) = 2x^2 + x$	*Ответ:* ± 3
8) $(x + 5)^2 = 36$	*Ответ: - 11; 1*
9) $x^2 - 6x + 9 = 0$	*Ответ: 3*

3.2.1.2. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ и приводимые к ним

В левой части этого уравнения есть ***общий множитель х***. ***Вынесем общий множитель*** за скобки, получим: $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Поэтому получаем два уравнения: $x = 0$, $ax + b = 0$. Таким образом, данное уравнение имеет ***два корня***: $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{-b}{a}$.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $2x^2 + 5x = 0$
$x(2x + 5) = 0$
$x = 0$ или $2x + 5 = 0$
$2x = -5$
$x = -2,5$
Ответ: – 2,5; 0

2) $(2x - 1)^2 - 1 = x(x + 2)$
$4x^2 - 4x + 1 - 1 = x^2 + 2x$
$3x^2 - 6x = 0 \quad / : 3$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x - 2) = 0$
$x = 0$ или $x - 2 = 0$
$x = 2$
Ответ: 0; 2

Решите уравнения:

1) $2x^2 + 5x = 3x^2$ — *Ответ: 0; 5*
2) $5x^2 - 3x = 2x + x^2$ — *Ответ: 0; 1,25*
3) $(x - 3)(x + 3) - 2x = 2x^2 - 9$ — *Ответ: – 2; 0*

3.2.2. Полные квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и приводимые к ним

Корни такого уравнения находятся по формуле: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

При этом возможны три случая:

1) $b^2 - 4ac > 0$, тогда имеются *два различных* корня;
2) $b^2 - 4ac = 0$, тогда имеются *два равных* корня;
3) $b^2 - 4ac < 0$, тогда уравнение не имеет действительных корней.

Выражение $b^2 - 4ac$, от значения которого зависит, какой случай имеет место, называется ***дискриминантом*** *квадратного уравнения* и обозначается через D.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$
$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 1}$
$x_1 = 4$, $x_2 = 1$
Ответ: 1; 4

2) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$, $\sqrt{25} = 5$
$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2$
$x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

Ответ: -2; 0,5

3) $-3x^2 + x - 2 = 0 \ / \cdot (-1)$

$3x^2 - x + 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow$ нет корней

Ответ: $\emptyset$

Решите уравнения:

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$	*Ответ: - 6; 2*
2) $x^2 - 4x - 21 = 0$	*Ответ: - 3; 7*
3) $2x^2 + 7x - 4 = 0$	*Ответ: - 4; 0,5*
4) $9x^2 + 6x + 1 = 0$	*Ответ: - 1/3*
5) $5x^2 - 6x + 2 = 0$	*Ответ: Ø*
6) $x(x + 2) = 6 + x - x^2$	*Ответ: - 2; 1,5*
7) $2x - x^2 - \frac{2-x}{3} = 0$	*Ответ: 1/3; 2*
8) $\frac{x(1-x)}{5} - \frac{1-x}{4} + \frac{x(x-1)}{10} = 0$	*Ответ: 1; 2,5*

3.2.3. Приведенные квадратные уравнения $x^2 + px + q = 0$

Если $a = 1$, т.е. уравнение называется ***приведенным***.

Теорема Виета. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при первой степени неизвестного, взятому с обратным знаком, а произведение равно свободному члену, т.е.:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

П р и м е р. Составим приведенное квадратное уравнение, корни которого $x_1 = 5$, $x_2 = -3$

$p = -(5 + (-3)) = -2$

$q = 5 \cdot (-3) = -15$

$\underline{x^2 - 2x - 15 = 0}$

П р и м е р. Используя теорему, обратную теореме Виета, найдем подбором корни приведенного уравнения:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$$

$x_1 = -2$

$x_2 = -3$

2) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

$x_1 = 2$

$x_2 = 5$

3) $x^2 + x - 6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -6, \\ x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

4) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -10, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

$x_1 = 5$

$x_2 = -2$

Подбором найдите корни уравнения:

1) $x^2 - 20x + 19 = 0$ — *Ответ: 1 и 19*
2) $x^2 + 38x + 37 = 0$ — *Ответ: - 37 и - 1*
3) $x^2 + 5x - 14 = 0$ — *Ответ: - 7 и 2*
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$ — *Ответ: - 3 и 7*

3.3. Решение простейших уравнений высших степеней

3.3.1. Уравнения вида $ax^n + b = 0$

Такие уравнения приводятся к виду $x^n = -\frac{b}{a}$.

1) Если n – нечетное число, то $x = \sqrt[n]{c}$, где $c = -\frac{b}{a}$

2) Если n – четное число, то при положительном c уравнение имеет два корня $\pm\sqrt[n]{c}$, а при отрицательном c – не имеет действительных корней

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $2x^3 + 16 = 0$
$2x^3 = -16$
$x^3 = -8$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Ответ: -2

2) $81 - x^4 = 0$
$x^4 = 81$
$x = \pm\sqrt[4]{81}$
$x = \pm 3$
Ответ: ± 3

Решите уравнения:

1) $2x^5 - \frac{1}{16} = 0$ — *Ответ: 0,5*
2) $6x^6 - 6 = 0$ — *Ответ: - 1; 1*

3.3.2. Биквадратные уравнения

__Опр.__ ***Биквадратным уравнением*** называется уравнение вида $\mathbf{ax^4 + bx^2 + c = 0}$.

Биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению при помощи подстановки $y = x^2$. Новое квадратное уравнение относительно переменной y: $ay^2 + by + c = 0$. Решая это уравнение, получаем корни квадратного уравнения y_1 и y_2. Таким образом, решение исходного уравнения сводится к двум уравнениям относительно переменной x: $x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$.

П р и м е р. Решим уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

Пусть $y = x^2$, тогда $x^4 = y^2$.

Значит, имеем уравнение: $4y^2 - 5y + 1 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{9} = 3$

$y_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$

$y_2 = \frac{5+3}{8} = 1$

Т.о., 1) $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, $x = \pm\frac{1}{2}$

2) $x^2 = 1$, $x = \pm 1$

Ответ: $-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1$

Решите уравнения:

3) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ — *Ответ:* $-5; -2; 2; 5$

4) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ — *Ответ:* $-4; 4$

5) $9x^4 - 28x^2 + 3 = 0$ — *Ответ:* $\pm 1/3; \pm\sqrt{3}$

6) $(x + 2)^4 - (x + 2)^2 - 12 = 0$ — *Ответ:* -4 *и* 0

3.3.3. Решение целых уравнений высших степеней методом разложения на множители

В основе метода лежит тот факт, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а другие при этом не теряют смысл.

Существует несколько способов разложения многочленов на множители:

- вынесение за скобку общего множителя;
- использование формул сокращенного умножения;
- группировка.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $x^3 - 8x^2 + 3x - 24 = 0$

$x^2(x - 8) + 3(x - 8) = 0$

$(x - 8)(x^2 + 3) = 0$

$x - 8 = 0$ или $x^2 + 3 = 0$

$x = 8$ $\quad$ $x^2 = -3$

нет корней

Ответ: 8

2) $(y^2 - 5y)^2 = 30y - 6y^2$

$(y^2 - 5y)^2 - 30y + 6y^2 = 0$

$(y^2 - 5y)^2 + 6(y^2 - 5y) = 0$

$(y^2 - 5y)(y^2 - 5y + 6) = 0$

$y^2 - 5y = 0$ или $y^2 - 5y + 6 = 0$

$y(y - 5) = 0$ $\quad$ $D = 25 - 24 = 1$

$y_1 = 0$ $\quad$ $y_3 = \frac{5-1}{2} = 2$

$y_2 = 5$ $\quad$ $y_4 = \frac{5+1}{2} = 3$

Ответ: 0; 2; 3; 5

Решите уравнения:

1) $(2x - 5)(x^2 - 4) = 7x^2 - 28$ — *Ответ:* $-2; 2; 6$

2) $x^3 + 3x^2 = 4x + 12$ — *Ответ:* $-3; -2; 2$

3) $x^4 - 3x^3 - x + 3 = 0$ — *Ответ:* $1; 3$

4) $x^5 - x^4 = 0$ — *Ответ:* $0; 1$

4. Дробно-рациональные уравнения, алгоритм их решения

Опр. Уравнения, в которых левая и/или правая часть являются дробно-рациональными выражениями, называются дробными рациональными уравнениями.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1) найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, *при необходимости прежде разложить знаменатели дробей на множители*;

2) умножить обе части уравнения на наименьший общий знаменатель;

3) решить получившееся целое уравнение;

4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

П р и м е р. Решим уравнение $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$

$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$ / $\cdot$ $x(x-2)(x+2) \neq 0$

$2x - (x+2) = (4-x)(x-2)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$ – не удовлетворяет

$x_2 = 3$

Ответ: 3

Решите уравнения:

1) $\frac{2}{x^2-2x} - \frac{5}{x^2+2x} = \frac{1}{x}$ *Ответ: - 6; 3*

2) $\frac{x-7}{x-2} + \frac{x+4}{x+2} = 1$ *Ответ: - 3; 6*

3) $\frac{y-14}{y^3-8} = \frac{5}{y^2+2y+4} - \frac{1}{y-2}$ *Ответ: 0*

5. Иррациональные уравнения и их решение

<u>Опр.</u> Уравнения, содержащие неизвестное под знаком радикала (корня), называются ***иррациональными***.

Чаще всего для решения иррациональных уравнений используются следующие п р и е м ы:

1) возведение обеих частей уравнения в соответствующую степень;

2) введение новой переменной.

5.1. Решение уравнений путем возведения обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня

При решении иррациональных уравнений этим методом следует руководствоваться следующими рекомендациями:

1) Перед возведением в степень необходимо изолировать корень.

2) Если корней несколько одного возведения недостаточно.

3) Если показатель степени четный, то могут появиться посторонние корни, поэтому необходима проверка найденных корней.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sqrt{x+2} = x$

$(\sqrt{x+2})^2 = x^2$

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Проверка: 1) $\sqrt{2+2} = 2$ – верно

2) $\sqrt{-1+2} = -1$ – неверно

Ответ: 2

2) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$

$\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

$x^2+5x+1=(2x-1)^2$

$x^2+5x+1=x^2-4x+1$

$3x^2-9x=0 \ / : 3$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x_1=0$

$x_2=3$

Проверка: 1) $\sqrt{1}+1=0$ – неверно

2) $\sqrt{25}+1=6$ – верно

Ответ: 3

3) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$

$\sqrt{x-9}=\sqrt{x-18}+1$

$(\sqrt{x-9})^2=(\sqrt{x-18}+1)^2$

$x-9=x-18+2\sqrt{x-18}+1$

$8=2\sqrt{x-18} \ / : 2$

$4=\sqrt{x-18}$

$4^2=(\sqrt{x-18})^2$

$16=x-18$

$x=34$

Проверка: $\sqrt{25}-\sqrt{16}=1$ – верно

Ответ: 34

Решите уравнения:

1) $\sqrt{3+x}=3-x$ *Ответ: 1*
2) $x-\sqrt{x^2-1}=2$ *Ответ: Ø*
3) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ *Ответ: 9*
4) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}=2$ *Ответ: 3*
5) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}-\sqrt{x+5}=0$ *Ответ: 4*

5.2. Решение уравнений путем введения новой переменной

Введение новой переменной позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению. При этом если заранее учитывать, какие значения может принимать новая переменная, проверку найденных корней можно не проводить.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0$

Пусть $\sqrt[8]{x}=y \geq 0$, тогда получим уравнение: $y^2+y-2=0$.

Решив его, получим корни $y_1=-2$ и $y_2=1$. Положительным является только 2-й корень.

Таким образом: $\sqrt[8]{x} = 1$

Возводя обе части уравнения в восьмую степень, получим: x = 1

Ответ: 1

2) $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

$(x^2 + 5x + 28) - 24 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

Пусть $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = y \geq 0$, тогда:

$y^2 - 24 = 5y$

$y^2 - 5y - 24 = 0$

$y_1 = 8$

$y_2 = -3$ – не удовлетворяет

Итак: $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 8$

$x^2 + 5x + 28 = 64$

$x^2 + 5x - 36 = 0$

$x_1 = -9$

$x_2 = 4$

Ответ: – 9; 4

3) $1 + \frac{15}{\sqrt{2x+1}} = 2\sqrt{2x + 1}$

Пусть $\sqrt{2x + 1} = y > 0$, тогда

$1 + \frac{15}{y} = 2y \ / \cdot y \neq 0$

$y + 15 = 2y^2$

$2y^2 - y - 15 = 0$

$D = 1 + 120 = 121$

$y_1 = \frac{1-11}{4} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$ – не удовлетворяет

$y_2 = \frac{1+11}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Таким образом: $\sqrt{2x + 1} = 3$

$2x + 1 = 9$

$2x = 8$

$x = 4$

Ответ: 4

Решите уравнения:

1) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$ *Ответ: 81*

2) $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$ *Ответ: - 1/3; 1*

6. Показательные уравнения

Опр. Уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени, называются ***показательными***.

6.1. Решение простейших показательных уравнений

<u>Опр.</u> Уравнения вида $\boldsymbol{a^{f(x)} = c}$ называются ***простейшими показательными уравнениями***.

Если $c \le 0$, то такие уравнения не имеют корней.

Если $c > 0$, то по определению логарифма, $\mathbf{f(x) = log_a}\ c$

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $2^x = 5$

$x = \log_2 5$

Ответ: $\log_2 5$

2) $3^x = 9\sqrt{3}$

$x = \log_3 9\sqrt{3}$

$x = 2,5$

Ответ: 2,5

3) $5^{2x-1} = 7$

$2x - 1 = \log_5 7$

$2x = \log_5 7 + 1$

$2x = \log_5 35$

$x = \frac{1}{2}\log_5 7$

Ответ: $\frac{1}{2}\log_5 7$

Решите уравнения:

1) $3^x = 7$ *Ответ:* $\log_3 7$

2) $10^{2-x} = 4$ *Ответ:* $\lg 25$

6.2. Приведение обеих частей показательного уравнения к степеням с одинаковыми основаниями

Уравнения вида $\mathbf{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ всегда сводятся к уравнению $\mathbf{f(x) = g(x)}$, т.е. одинаковые основания могут быть отброшены.

При решении показательных уравнений этого вида важно знать главные правила действия со степенями:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $1000^x = 100$

$10^{3x} = 10^2$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$

2) $2^{2x} - 8^{x+1} = 0$

$2^{2x} = 8^{x+1}$

$2^{2x} = 2^{3(x+1)}$

$2x = 3(x+1)$

$x = -3$

Ответ: -3

3) $\sqrt{2^x} = 4$

$2^{\frac{x}{2}} = 2^2$

$\frac{x}{2} = 2$

$x = 2 \cdot 2$

$x = 4$

Ответ: 4

4) $8^{x^2-5x} = 1$

$8^{x^2-5x} = 8^0$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$ или $x = 5$

Ответ: 0; 5

5) $9 \cdot 3^x = 27$

$3^2 \cdot 3^x = 3^3$

$3^{2+x} = 3^3$

$2 + x = 3$

$x = 1$

Ответ: 1

6) $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{0,04^x}{25}$

$\frac{(5^{-1})^{x+0,5}}{5^{0,5}} = \frac{(5^{-2})^x}{5^2}$

$\frac{5^{-x-0,5}}{5^{0,5}} = \frac{5^{-2x}}{5^2}$

$5^{-x-1} = 5^{-2x-2}$

$-x - 1 = -2x - 2$

$x = -1$

Ответ: -1

Решите уравнения:

1) $3^x = 9^{x-2}$ *Ответ: 4*

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^{6-3x}$ *Ответ: 3*

3) $5^{x^2-x-2} = 625$ *Ответ: - 2; 3*

4) $\sqrt{3}\cdot 3^{2x} = \frac{1}{9}$ *Ответ: - 1,25*

5) $\frac{\sqrt{5}}{5^{x-3}} = 125\cdot 0{,}04^{x+1}$ *Ответ: - 2,5*

6.3. Вынесение за скобки общего множителя при решении показательных уравнений

Уравнения, содержащие в левой части алгебраическую сумму степеней с одинаковыми основаниями, а в правой – некоторую константу, можно решить, если вынести за скобку общий множитель. Лучше в качестве общего множителя брать степень с наименьшим показателем. В этом случае в скобках будут целые числа.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $4^{x+1} + 4^x = 320$

$4^x(4 + 1) = 320$

$4^x \cdot 5 = 320$

$4^x = 64$

$x = 3$

Ответ: 3

2) $3^{2x+4} - 11\cdot 9^x = 210$

$3^{2x}\cdot 3^4 - 11\cdot 3^{2x} = 210$

$3^{2x}(3^4 - 11) = 210$

$70\cdot 3^{2x} = 210$

$3^{2x} = 3$

$2x = 1$

$x = 0{,}5$

Ответ: 0,5

3) $4\cdot 3^{x+1} + 5\cdot 3^x - 6\cdot 3^{x-1} = 5$

$3^{x-1}(4\cdot 3^2 + 5\cdot 3 - 6) = 5$

$3^{x-1}\cdot(36 + 15 - 6) = 5$

$3^{x-1}\cdot 45 = 5$

$3^{x-1} = \frac{5}{45}$

$3^{x-1} = \frac{1}{9}$

$3^{x-1} = 3^2$

$x - 1 = 2$

$x = 3$

Ответ: 3

Решите уравнения:

1) $2\cdot 5^{x+2} - 10\cdot 5^x = 8$ *Ответ: - 1*

2) $3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2} = 25$ *Ответ: 2*

3) $2^{x+3} - 2^{x+2} - 2^x = 48$ *Ответ: 4*

4) $2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2+2x}{x}} + 3\cdot 2^{\frac{2-x}{x}} = -3$ *Ответ: 2*

6.4. Замена переменной в показательных уравнениях

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $4^x - 3\cdot 2^x + 2 = 0$

$2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 = 0$

Пусть $2^x = t > 0$, тогда $2^{2x} = 2^{x2} = (2^x)^2 = t^2$

Получим уравнение: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$t_1 = 2$ и $t_2 = 1$

Т.о.: 1) $2^x = 2$ 2) $2^x = 1$

$x = 1$ $x = 0$

Ответ: 0; 1

2) $3 \cdot 5^{2x} - 10 \cdot 5^{x-1} = 1$

$3 \cdot 5^{2x} - 10 \cdot \frac{5^x}{5} - 1 = 0$

$3 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 1 = 0$

Пусть $5^x = y > 0$, тогда

$3y^2 - 2y - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$y_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ – не удовлетворяет

$y_2 = \frac{2+4}{6} = 1$

Т.о.: $5^x = 1$

$x = 0$

Ответ: 0

Решите уравнения:

1) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$ *Ответ: 2*

2) $4^x + 2^{x+1} = 80$ *Ответ: 3*

3) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ *Ответ: - 1; 0; 1*

6.5. Решение однородных показательных уравнений

<u>Опр.</u> Уравнения вида $\boldsymbol{A\, a^{2x} + B\, a^x b^x + C\, b^{2x} = 0}$ называются ***однородными показательными уравнениями***.

Для решения таких уравнений нужно:

1) разделить обе части уравнения на $\boldsymbol{b^{2x}}$;

2) решить полученное уравнение введением новой переменной: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$.

П р и м е р. Решим уравнение $9^x + 12^x - 2 \cdot 16^x = 0$

$3^{2x} + 3^x \cdot 4^x - 2 \cdot 4^{2x} = 0 \ / : 4^{2x}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2 = 0$

Пусть $\left(\frac{3}{4}\right)^x = y > 0$, тогда

$y^2 + y - 2 = 0$

$y_1 = -2$ – не удовлетворяет

$y_2 = 1$

Т.о.: $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$

$x = 0$

Ответ: 0

Решите уравнение:

$9\cdot2^{2x+2} - 45\cdot6^{x} - 3^{2x+4} = 0$ *Ответ: 2*

7. Логарифмические уравнения, способы их решения

<u>Опр.</u> Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма, называются ***логарифмическими***.

При решении логарифмических уравнений важно знать определение и свойства логарифмов, а также основные логарифмические тождества:

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">$\log_a c = b \iff a^b = c$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\log_a a^b = b$</td><td colspan="3">$a^{\log_a c} = c$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\log_a a = 1$</td><td colspan="3">$\log_a 1 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\log_a(c_1 \cdot c_2) = \log_a c_1 + \log_a c_2$</td><td colspan="3">$\log_a(c_1 : c_2) = \log_a c_1 - \log_a c_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\log_a(c^m) = m \cdot \log_a c$</td><td colspan="3">$\log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n}\log_a c$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\log_a c = \frac{\log_d c}{\log_d a}$</td><td colspan="2">$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$</td><td colspan="2">$\log_{a^n} c = \frac{1}{n}\log_a c$</td></tr>
</table>

7.1. Решение простейших логарифмических уравнений

7.1.1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где а > 0, а ≠ 1

Такие уравнения равносильны уравнению ***f(x) = a^b***.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_2 x = -4$

$x = 2^{-4}$

$x = \frac{1}{16}$

Ответ: $\frac{1}{16}$

2) $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$

$-\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$-\frac{1}{x} = \frac{1}{9}$

$x = -9$

Ответ: -9

Решите уравнение:

1) $log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}$ *Ответ: - 1 и 2*

2) $\log_2(\sqrt{x} - 2) = 1$ *Ответ: 2*

7.1.2. Уравнения вида $\log_{g(x)} c = b$, где с > 0

Такие уравнения равносильны системе: $\begin{cases} g(x)^b = c \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

П р и м е р. Решим уравнение: $\log_{x-1} 9 = 2$

$$\begin{cases} x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: 4

Решите уравнение:
$log_{2x} 32 = 5$ *Ответ: 1*

7.2. Решение уравнений вида $\mathbf{\log_{g(x)} f(x) = b}$

Такие уравнения равносильны системе: $\begin{cases} \boldsymbol{g(x)^b = f(x)} \\ \boldsymbol{g(x) > 0} \\ \boldsymbol{g(x) \neq 1} \end{cases}$

При решении таких уравнений на практике можно не выписывать систему, а решить уравнение $\mathrm{g(x)^b = f(x)}$, которое получается по определению логарифма, и выполнить проверку того, что $\mathrm{g(x) > 0}$ и $\mathrm{g(x) \neq 1}$.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_x(2x^2 - 3x) = 1$

$2x^2 - 3x = x$

$2x^2 - 4x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ или $x = 2$

Проверка:1) $0 > 0$ – неверно 2) $2 > 0$ – верно и $2 \neq 1$ – верно

Ответ: 2

2) $\log_{x+2}(3x^2 + 4x - 14) = 2$

$3x^2 + 4x - 14 = (x + 2)^2$

$3x^2 + 4x - 14 = x^2 + 4x + 4$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

Проверка: 1) $3 + 2 > 0$ – верно

$3 + 2 \neq 1$ – верно

2) $-3 + 2 > 0$ – неверно

Ответ: 3

Решите уравнение:
$\log_{x-1}\left(x^2 - 7x + 41\right) = 2$ *Ответ: 8*

7.3. Решение уравнений вида $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$ и приводимых к ним

Уравнения данного вида сводятся к системе: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

На практике такие уравнения можно решать 2-мя способами:

1) Найти область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения, после чего решить уравнение $f(x) = g(x)$ и выбрать те его корни, которые принадлежат ОДЗ.

2) Решить уравнение $f(x) = g(x)$ и проверить найденные корни, подставив их в исходное уравнение или сделав знаковую проверку найденных корней (под логарифмами должны быть положительные числа, чтобы они имели смысл).

Первый способ хорош, если ОДЗ уравнения легко найти. Если же получается сложная система неравенств, то проще решить его вторым способом.

Чтобы при потенцировании не появлялись дроби, можно логарифмы, перед которыми стоит знак «–», переносить в другую часть уравнения со знаком «+».

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$

$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$

$x^2 - x - 12 = 0$

$x_1 = -3,\ x_2 = 4$

Проверка: 1) При $x = -3$: $(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 5 > 0$ – верно

$7 - 2 \cdot (-3) > 0$ – верно

2) При $x = 4$: $4^2 - 3 \cdot 4 - 5 > 0$ – неверно

Ответ: – 3

2) $\log_2 (6 - x) = 2\log_2 x$

ОДЗ: $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 6$

$\log_2 (6 - x) = \log_2 x^2$

$6 - x = x^2$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3 \notin$ ОДЗ

$x_2 = 4$

Ответ: 4

3) $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$

$\lg(x + 4)(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$

$2x^2 + 3x + 8x + 12 = 1 - 2x$

$2x^2 + 13x + 11 = 0$

$x_1 = -5{,}5$

$x_2 = -1$

Проверка: 1) При $x = -5{,}5$: $-5{,}5 + 4 > 0$ – неверно

2) При $x = -1$: $-1 + 4 > 0$ – верно

$-2 + 3 > 0$ – верно

$1 + 2 > 0$ – верно

Ответ: – 1

4) $\log_6 (x - 1) = 2 - \log_6 (5x + 3)$

$\log_6 (x - 1) + \log_6 (5x + 3) = \log_6 36$

$\log_6 (x - 1)(5x + 3) = \log_6 36$

$5x^2 + 3x - 5x - 3 = 36$

$5x^2 - 2x - 39 = 0$

$x_1 = - 2,6$

$x_2 = 3$

Проверка: 1) При $x = - 2,6$: $- 2,6 - 1 > 0$ – неверно

2) При $x = 3$: $3 - 1 > 0$ – верно

$15 + 3 > 0$ – верно

Ответ: 3

5) $\log_5(x^2 + 75) + \log_{0,2} 4x = 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 75 > 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{x – любое число} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$\log_5(x^2 + 75) - \log_5 4x = 1$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 4x + \log_5 5$

$\log_5(x^2 + 75) = \log_5 20x$

$x^2 + 75 = 20x$

$x^2 - 20x + 75 = 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = 15$

Ответ: 5; 15

Решите уравнения:

1) $\log_{0,3} (x^2 + 3x - 4) - \log_{0,3} (2x + 2) = 0$ *Ответ: 8*

2) $\log_2 (x-5) - \log_2 (2x+5) = 3$ *Ответ: Ø*

3) $\frac{lg(x-3)}{lg(x^2-21)} = \frac{1}{2}$ *Ответ: 5*

7.4. Решение логарифмических уравнений введением новой переменной

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\lg^2 x - \lg x - 6 = 0$

Пусть $\lg x = y$, тогда получаем уравнение: $y^2 - y - 6 = 0$

$y_1 = - 2, y_2 = 3$

Таким образом: 1) $\lg x = - 2$ 2) $\lg x = 3$

$x = 0,01$ $x = 1000$

Ответ: 0,01; 1000

2) $\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 2 = 0$

$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

Пусть $\log_2 x = y$, тогда получаем уравнение: $y^2 - 3y + 2 = 0$

$y_1 = 1,\ y_2 = 2$

Таким образом: 1) $\log_2 x = 1$ 2) $\log_2 x = 2$

$x = 2$ $x = 4$

Ответ: 2; 4

3) $\log_5(x+2) - 2\log_{x+2} 5 - 1 = 0.$

$\log_5(x + 2) - 2\,\frac{1}{\log 5(x+2)} - 1 = 0$

Пусть $\log_5(x + 2) = y$, тогда получаем уравнение: $y - \frac{2}{y} - 1 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$y_1 = -1,\ y_2 = 2$

Таким образом: 1) $\log_5 (x + 2) = -1$ 2) $\log_5 (x + 2) = 2$

$x + 2 = 0{,}2$ $x + 2 = 25$

$x = -1{,}8$ $x = 23$

Ответ: – 1,8; 23

Решите уравнения:

1) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x = 2$ *Ответ: 0,5; 4*

2) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$ *Ответ: 0,0001; 10*

3) $0{,}25 \lg^4 x + 8 = 3 \lg^2 x$ *Ответ: 0,01; 100;* $10^{\pm 2\sqrt{2}}$

8. Тригонометрические уравнения

Опр. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрической функции, называются ***тригонометрическими***.

При их решении необходимо знать:

• формулы для корней тригонометрических уравнений

Общая формула	Частные случаи
$\cos x = a\ (\lvert a\rvert \le 1)$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	$\cos x = 1$: $x = 2\pi n,\ n \in Z$
	$\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$
	$\cos x = -1$: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$
$\sin x = a\ (\lvert a\rvert \le 1)$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	$\sin x = 1$: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
	$\sin x = 0$: $x = \pi n,\ n \in Z$
	$\sin x = -1$: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$: $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{tg}\, x = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$
	$\mathrm{tg}\, x = 0$: $x = \pi n,\ n \in Z$
	$\mathrm{tg}\, x = -1$: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

ctg x = a: x = arcctg a + πn, n$\in Z$	ctg x = 1: x = $\frac{\pi}{4}$ + πn, n$\in Z$
	ctg x = 0: x = $\frac{\pi}{2}$ + πn, n$\in Z$
	ctg x = –1: x = $\frac{3\pi}{4}$ + πn, n$\in Z$

• значения тригонометрических функций некоторых углов

	sin x	cos x	tg x	ctg x
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

• формулы для вычисления обратных тригонометрических функций отрицательных чисел

arcsin (– x) = – arcsin x	arccos (– x) = π – arccos x
arctg (– x) = – arctg x	arcctg (– x) = π – arcctg x

• тригонометрические тождества:

- зависимости между тригонометрическими функциями одного аргумента

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
tg x = $\frac{\sin x}{\cos x}$	tg x$\cdot$ ctg x = 1	ctg x = $\frac{\cos x}{\sin x}$

- формулы двойного аргумента

sin 2x = 2sinx·cosx		
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

- формулы половинного аргумента (понижения степени)

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

- формулы сложения аргументов

sin (x + y) = sin x $\cdot$ cos y + cos x $\cdot$ sin y

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

- формулы преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \sin\frac{x+y}{2}$

- формулы приведения

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

8.1. Решение простейших тригонометрических уравнений

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решим уравнение по общей формуле

$x = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

2) $2\cos x - 1 = 0$

Выразим косинус

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{x}{2} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$

$\frac{x}{2} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$

$\frac{x}{2} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \,/ \cdot 2$

$x = \pm \frac{3\pi}{2} + 4\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\pm \frac{3\pi}{2} + 4\pi n,\ n \in Z$

4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Это частный случай

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

5) $3\sin x - 2 = 0$

$\sin x = \frac{2}{3}$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$

6) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$

$3x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$

$3x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$3x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ / : 3

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

7) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$

Это частный случай

$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$

$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z$

$2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in Z$ / : 2

$x = \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n\in Z$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n\in Z$

8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = -1$

По формуле приведения получим

$\sin 5x = -1$

Это частный случай

$5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in Z$ / : 5

$x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$

9) $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} - 1 = 0$

$\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = 1$

$\frac{3x}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n\in Z$

$\frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in Z$ / $\cdot \frac{4}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3},\ n\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3},\ n\in Z$

10) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3} - 4x) + \sqrt{3} = 0$

$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3} - 4x) = -\sqrt{3}$

В силу нечетности котангенса

$\operatorname{ctg}(4x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

$4x - \frac{\pi}{3} = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n\in Z$

$4x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n\in Z$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in Z$ / : 4

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Решите уравнения:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ *Ответ:* $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

3) $\cos x = -1$ *Ответ:* $\pi + 2\pi n,\ n\in Z$

4) $\cos x = -\frac{1}{2}$ *Ответ:* $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z$

5) $tg\,x = -\sqrt{3}$ *Ответ:* $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

6) $sin\ \frac{x}{4} = -1$ *Ответ:* $-2\pi + 8\pi n,\ n \in Z$

7) $2sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

8) $cos\ (2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ *Ответ:* $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

9) $tg\ (-4x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *Ответ:* $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$

10) $ctg\ \frac{x}{3} + 1 = 0$ *Ответ:* $\frac{9\pi}{4} + 3\pi n,\ n \in Z$

8.2. Применение формул тождественных преобразований при решении тригонометрических уравнений

8.2.1. Применение формул приведения

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sin x + \sin(\pi - x) = 1$

$\sin x + \sin x = 1$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

2) $\cos 2x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = -\sqrt{3}$

$\cos 2x + \cos 2x = -\sqrt{3}$

$2\cos 2x = -\sqrt{3}$

$\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm(\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $tg(\pi + x) - 2\,tg(2\pi - x) - tg(\pi - x) - tg\,x = 1$

$tg\,x + 2\,tg\,x + tg\,x - tg\,x = 1$

$3tg\,x = 1$

$tg\,x = \frac{1}{3}$

$x = arctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $arctg\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$

Решите уравнения:

1) $cos\,x - cos\,(\pi - x) = \sqrt{2}$ *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

2) $sin\,(2\pi + 2x) - sin\,(2\pi - 2x) = -1$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

3) $ctg\,(\pi - x) = tg\,(\frac{\pi}{2} - x)$ *Ответ:* $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

4) sin $(\frac{\pi}{2}+x)$ *– cos* $(2\pi - x)$ *+ sin* $(\pi + x)$ *=* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Ответ:* $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

8.2.2. Применение формул сложения аргументов

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sin x\cdot\cos 2x+\sin 2x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$3x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$3x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$

2) $\cos x\cdot\cos 4x-\sin x\cdot\sin 4x=-0{,}5$

$\cos 5x=-0{,}5$

$5x=\pm\arccos(-\frac{1}{2})+2\pi n,\ n\in Z$

$5x=\pm(\pi-\frac{\pi}{3})+2\pi n,\ n\in Z$

$5x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

$x=\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$

3) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{4}$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Решите уравнения:

1) sin 2x· cos 4x – cos 2x· sin 4x $=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$

2) cos x·cos 2x + sin x·sin 2x $=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Ответ:* $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\in Z$

3) cos 6x·cos 3x = sin 6x·sin 3x *Ответ:* $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{9},\ n\in Z$

4) $\sin 2x \cdot \cos 3x + \cos 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 5x$ *Ответ:* $\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z \in Z$

5) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos x + 1$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

8.2.3. Применение формул двойного аргумента

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad / \cdot 2$

$2\sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$

$\frac{2x}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z \quad / \cdot \frac{3}{2}$

$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2},\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi n}{2},\ n \in Z$

2) $\cos^2 2x = \sin^2 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4x = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$4x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

3) $(\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$

$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \sin 2x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x) - \sin 2x = \sin 2x$

$1 = 2\sin 2x$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

$x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

Решите уравнения:

1) $2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *Ответ:* $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

2) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z \in Z$

3) $sin^4\frac{x}{2} - cos^4\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *Ответ:* $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

4) $\sin 3x \cdot \cos 3x - \sin 6x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ *Ответ:* $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6},\ n \in Z$

5) $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0{,}25$ *Ответ:* $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

8.2.4. Применение формул понижения степени (половинного аргумента)

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\cos^2 3x = \frac{1}{4}$

$\frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{1}{4}$

$1 + \cos 6x = \frac{1}{2}$

$\cos 6x = -\frac{1}{2}$

$6x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$6x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n,\ n \in Z$

$6x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

2) $4\sin^2 3x = 1 - \cos 6x$

$4 \cdot \frac{1-\cos 6x}{2} = 1 - \cos 6x$

$2(1 - \cos 6x) = 1 - \cos 6x$

$2 - 2\cos 6x = 1 - \cos 6x$

$\cos 6x = 1$

$6x = 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in Z$

Решите уравнения:

1) $2\sin^2 x = \cos 2x$ *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z \in Z$

2) $4\sin^2 2x = 1$ *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z \in Z$

3) $cos^2 2x = \frac{3}{4}$ *Ответ:* $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z \in Z$

4) $2\sin^2 3x + \cos 6x = \sin x$ *Ответ:* $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \in Z$

8.2.5. Применение формул преобразования алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$

Применим формулу суммы синусов:

$2\sin\frac{x+3x}{2} \cdot \cos\frac{x-3x}{2} = 0$

Разделим обе части уравнения на 2 и подсчитаем углы под знаками тригонометрических функций:

$\sin 2x \cdot \cos(-x) = 0$

Т.к. функция косинус четная, то знак «–» можно убрать. Получим два простейших уравнения:

$\sin 2x = 0$ или $\cos x = 0$

Решим каждое уравнение по отдельности:

1) $\sin 2x = 0$

Это частный случай: $2x = \pi n$, $n \in Z$

$$x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

2) $\cos x = 0$ – тоже частный случай

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

Можно заметить, что первая серия содержит в себе вторую, поэтому в ответ можно записать только ее

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

2) $\cos 5x + \cos 3x = 0$

$2\cos\frac{5x+3x}{2} \cdot \cos\frac{5x-3x}{2} = 0$

$\cos 4x \cdot \cos x = 0$

1) $\cos 4x = 0$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$

2) $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

3) $\cos 5x = \cos 7x$

$\cos 5x - \cos 7x = 0$

$-2\sin\frac{5x+7x}{2} \cdot \sin\frac{5x-7x}{2} = 0$

$\sin 6x \cdot \sin(-x) = 0$

$-\sin 6x \cdot \sin x = 0$

1) $\sin 6x = 0$

$6x = \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$

2) $\sin x = 0$

$x = \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$

4) $\frac{\sin 2x+\sin 6x}{\cos 2x+\cos 6x} = 1$

$\frac{2\sin\frac{2x+6x}{2}\cdot\cos\frac{2x-6x}{2}}{2\cos\frac{2x+6x}{2}\cdot\cos\frac{2x-6x}{2}} = 1$

$\frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 1$

$\mathrm{tg}\, 4x = 1$

$4x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n$, $n \in Z$

$4x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$

5) $\cos^2 2x - \cos^2 4x = 0$

$(\cos 2x - \cos 4x)(\cos 2x + \cos 4x) = 0$

$-2 \sin \frac{2x+4x}{2} \cdot \sin \frac{2x-4x}{2} \cdot 2 \cos \frac{2x+4x}{2} \cdot \cos \frac{2x-4x}{2} = 0$

$2 \sin 3x \cdot \sin x \cdot 2 \cos 3x \cdot \cos x = 0$

$2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin 6x \cdot \sin 2x = 0$

1) $\sin 6x = 0$

$6x = \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$

2) $\sin 2x = 0$

$2x = \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$

Решите уравнения:

1) $\cos x + \cos 5x = 0$ — *Ответ:* $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

2) $\sin 5x = \sin 3x$ — *Ответ:* $\pi n, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z \in Z$

3) $\sin^2 3x - \sin^2 5x = 0$ — *Ответ:* $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$

4) $\frac{\sin x + \sin 5x}{\cos x + \cos 5x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — *Ответ:* $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$

8.3. Замена переменной в тригонометрических уравнениях

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

Пусть $\sin x = y$, тогда $\sin^2 x = y^2$.

Т.о., имеем уравнение: $2y^2 + 3y + 1 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$y_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$

$y_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

1) $\sin x = -1$

Это частный случай: $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n$, $n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

2) $\cos^2 x + 3{,}5 \sin x + 1 = 0$

$1 - \sin^2 x + 3{,}5 \sin x + 1 = 0$

$-\sin^2 x + 3{,}5 \sin x + 2 = 0 \;\; / \cdot (-2)$

$2 \sin^2 x - 7 \sin x - 4 = 0$

Пусть $\sin x = y$, тогда $2y^2 - 7y - 4 = 0$

$D = (-7)^2 - 4\cdot 2\cdot(-4) = 49 + 32 = 81$

$y_1 = \frac{7-9}{4} = -\frac{1}{2}$

$y_2 = \frac{7+9}{4} = 4$

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n,\ n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

2) $\sin x = 4$

нет корней

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

3) $tg^2 x + 1 = \frac{2}{ctg\, x}$

$tg^2 x - 2\, tg\, x + 1 = 0$

Обозначив $tg\, x = y$, получим уравнение:

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 = 0$

$y = \frac{2}{2} = 1$

Т.о., $tg\, x = 1$

$x = arctg 1 + \pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Решите уравнения:

1) $3\, tg^2 x + 4\, tg\, x + 1 = 0$ — *Ответ:* $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -arctg \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$

2) $\cos^2 4x = \cos 4x + 2$ — *Ответ:* $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z,\ n \in Z$

3) $\cos^2 x + 3 \sin x = 3$ — *Ответ:* $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

8.4. Решение однородных тригонометрических уравнений

8.4.1. Однородные тригонометрические уравнения 1-го порядка

Это уравнения вида ***a sin x + b cos x = 0***.

Так как синус и косинус одного и того же угла не могут быть одновременно равны нулю, то решение таких уравнений основано на делении обеих его частей на ***cos x*** и сведении его к простейшему уравнению ***tg x*** **=** $-\frac{b}{a}$.

П р и м е р. Решим уравнение:

$\sqrt{3}$ sin x + cos x = 0 / : cos x

$\sqrt{3}$ tg x + 1 = 0

$\sqrt{3}$ tg x = −1

tg x = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

x = arctg $(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi n$, n $\in Z$

x = $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Решите уравнение:

sin 2x = $\sqrt{3}$*cos 2x* *Ответ:* $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

8.4.2. Однородные тригонометрические уравнения 1-го порядка

Это уравнения вида $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$.

Для их решения обе части уравнения нужно разделить на $\cos^2 x$, при этом получится уравнение, квадратное относительно tg x.

П р и м е р. Решим уравнения:

1) $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x$ / : $\cos^2 x$

$tg^2 x - 4\, tg\, x + 3 = 0$

Пусть tg x = y, тогда $y^2 - 4y + 3 = 0$

$y_1 = 1$

$y_2 = 3$

Т.о.: 1) tg x = 1, x = arctg 1 + $\pi n, n \in Z$,   x = $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

2) tg x = 3, x = arctg 3 + $\pi n, n \in Z$

Ответ: arctg 3 + πn, $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

2) $8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4$

$8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x - 4 \sin^2 x - 4 \cos^2 x = 0$

$4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ / : $\cos^2 x$

$4\, tg^2 x + tg\, x - 3 = 0$

Пусть tg x = y, тогда $4y^2 + y - 3 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49$

$y_1 = \frac{-1-7}{8} = -1$

$y_2 = \frac{-1+7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Т.о.: 1) tg x = -1, x = arctg $(-1) + \pi n$, $n \in Z$, x = $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

2) tg x = $\frac{3}{4}$, x = arctg $\frac{3}{4} + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: arctg $\frac{3}{4} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

Решите уравнения:

1) $9 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 2 \sin^2 x$ *Ответ:* $arctg\ 3{,}5 + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

2) $7\sin^2 x + \sin x \cos x = 1$ *Ответ:* $-\ arctg \frac{1}{2} + \pi n$, $arctg \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$

3) $2 - \cos^2 x + 1{,}5\sin 2x = 0$ *Ответ:* $-\ arctg \frac{1}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

Заключение

Пособие является справочным и предназначено для обучающихся первого и второго курсов техникума, изучающих учебную дисциплину «Математика: алгебра и начала анализа; геометрия».

Пособие призвано помочь без активных консультаций с преподавателем организовать планомерное изучение и повторение обучающимися техникума нужного материала, подготовиться к проверочным работам и экзамену.

Актуальность данного пособия объясняется усилением роли самостоятельной работы в подготовке обучающихся в связи с современными требованиями профессионального обучения, сокращением количества часов на аудиторные занятия и необходимостью организации руководства самостоятельной работой студентов.