1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Тема № 1.6: «Системы уравнений и неравенств»

Лекционное занятие № 5

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие
по Теме № 1.6 «Системы уравнений и неравенств»

Цель занятия: изучить со студентами способы решения систем линейных и нелинейных уравнений, систем неравенств, понятие матрицы 2х2 и 3х3, определитель матрицы, метод Гаусса.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу).

Метод проведения занятия: повторное доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий
Время проведения: 2 ч (90 мин.)

Основные вопросы:

1. Способы решения систем линейных уравнений.
2. Понятие матрицы 2х2 и 3х3, определитель матрицы.
3. Метод Гаусса.
4. Системы нелинейных уравнений.
5. Системы неравенств.
6. Выполнение практических заданий.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Богомолов, Н. В.* Математика. Алгебра и начала анализа. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 241 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16084-0. —Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544860, глава 2, с. 17-48.

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: **<u>Способы решения систем линейных уравнений.</u>**

Пример решения системы линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

<u>Метод подстановки:</u>

Из первого уравнения: $y = 5 - x$

Это выражение поставляем во второе уравнение:

$x - 2(5 - x) = 2$

$x - 10 + 2x = 2$

$x + 2x = 2 + 10$

$3x = 12$

$x = 12/3 = 4$

$y = 5 - x = 5 - 4 = 1$

ответ: $x=4$; $y=1$

<u>Метод сложения:</u>

Из первого уравнения вычитаем второе уравнение:

$(x + y) - (x - 2y) = 5 - 2$

$\underline{x} + y - \underline{x} + 2y = 3$

$0 + 3y = 3$

$y = 3/3 = 1$

y подставляем в первое уравнение:

$x = 5 - y = 5 - 1 = 4$

ответ: $x=4$; $y=1$

<u>Графический метод:</u>

Ответ - точка пересечения графиков функций

ответ: $x=4$; $y=1$

1. $\begin{cases} x - 6y = 17, \\ 5x + 6y = 13. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2y - 3, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = y + 2, \\ 3x - 2y = 9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = x + 1, \\ 5x + 2y = 16. \end{cases}$

Методы решения уравнения.

Метод разложения на множители.

Способы разложения на множители:

-вынесение общего множителя за скобки;

-способ группировки;

-применение формул сокращенного умножения.

Примеры:

1) $4x^2 - 3x = 0$

$x(4x - 3) = 0$

$x = 0$ или $4x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{4}$

Ответ: 0; $\frac{3}{4}$

2) $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$

Сгруппируем слагаемые и вынесем общий множитель за скобки:

$5(x^3 + 1) - 21x(x + 1) = 0$

$5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 21x(x + 1) = 0$

Вынесем множитель *(x+1)* за скобку:

$(x + 1)(5x^2 - 26x + 5) = 0$

$x+1 = 0$ $\quad$ $5x^2 - 26x + 5 = 0$

$x = -1$ $\quad$ $D = 676-100 = 576$

$x_1 = \frac{26+24}{10} = 5$

$x_2 = \frac{26-24}{10} = \frac{1}{5}$

Метод введения новой переменной (метод подстановки).

Введение новой переменной позволяет разбить задачу на подзадачи и решить вместо одного сложного несколько простых уравнений.

Пример:

1) $(2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 6 = 0$

$(2x - 1) = t$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$t = \frac{5+1}{2} = 3$

$t = \frac{5-1}{2} = 2$

Вернемся к замене:

$2x - 1 = 3$ $\quad$ $2x - 1 = 2$

$2x = 4$ $\quad$ $2x = 3$

$x = 2$ $\quad$ $x = \frac{3}{2}$

2) $3(3x + 1)^4 - 16(3x + 1)^2 + 16 = 0$

Метод деления на многочлен.

Этот метод применяют при решении уравнений высших степеней. Цель – понизить степень многочлена.

Пример:

$x^3 - 7x + 6 = 0$

$8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

Графический метод.

Алгоритм решения уравнения графическим способом.

1.Привести уравнение к виду f(x)=g(x), где y=f(x) и y=g(x) известные нам функции.

2.Построить графики функции y=f(x) и y=g(x).

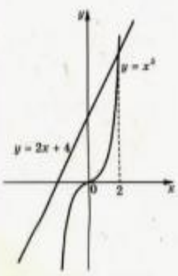
3.Отметить ВСЕ точки пересечения графиков.

4.Найти абсциссы точек пересечения (это и есть корни уравнения).

5.Записать ответ.

Пример:

$x^3 = 2x + 4.$



Ответ: 2.

Решение системы линейных уравнений графическим способом

Выразим y через x

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ y + x = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2, \\ y = 10 - x; \end{cases}$$

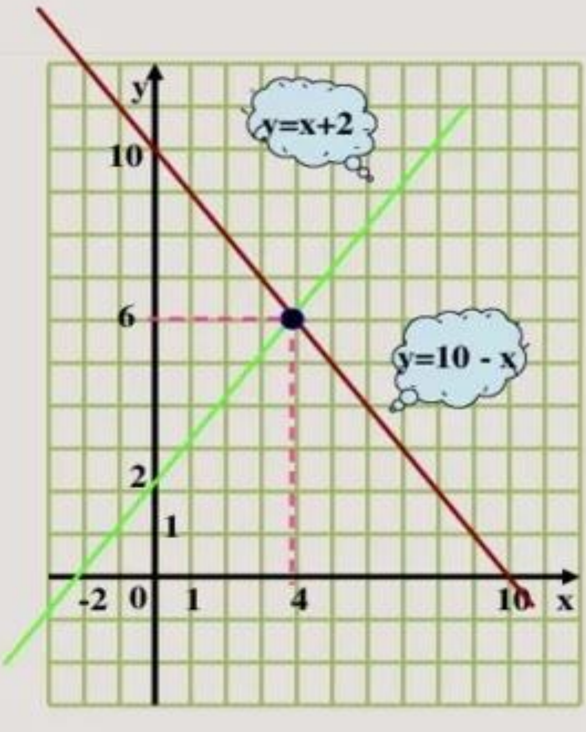
Построим график первого уравнения $y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0

Построим график второго уравнения $y = 10 - x$

x	0	10
y	10	0

Ответ: (4; 6)



Система двух линейных уравнений

Определение. ***Линейной системой двух линейных уравнений с двумя переменными*** называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 - заданные числа, такие что пары чисел a_1, b_1 и a_2, b_2, одновременно не равны нулю; x и y – переменные.

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 3y = -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

Решите систему линейных уравнений с двумя переменными любым способом:

И) $\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ 17x + 6y = -9 \end{cases}$ К) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 15x - 5y = -3 \end{cases}$

П) $\begin{cases} 6x = 25y + 1 \\ 5x - 16y = -4 \end{cases}$ Н) $\begin{cases} 10x + 7y = -2 \\ 2x - 22 = 5y \end{cases}$

И) Ответ: (3;-10)

К) Ответ: (-3,4;-9)

П) Ответ: (-4;-1)

Н) Ответ: (2,25;-3,5)

Второй вопрос: <u>Понятие матрицы 2х2 и 3х3, определитель матрицы.</u>

Введение. ***Понятие матрицы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица размера (mxn)

> Любая прямоугольная таблица чисел, состоящая
> из m строк и n столбцов, называется матрицей размера (mxn).

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица
размера (3х3) или
матрица 3-го порядка

Можно выписать матрицу столбец

$$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица - столбец размера (3х1)

Можно записать матрицу-строку $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, размер матрицы (1х3)

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

побочная

главная

Определение. *Две матрицы A и B называются* ***равными****, если они одинакового размера и соответствующие элементы обеих матриц равны.*

Определитель матрицы

Определитель – это ***число***, которое ставят в соответствие каждой **квадратной** матрице и вычисляют из элементов по специальным формулам.

Определитель (детерминант) матрицы $A_{n\times n}$ обозначают:

$$\Delta_n = |A| = detA$$

$$\underbrace{A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} \Rightarrow \underbrace{\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{одно число}}$$

ОТВЕТ: $n \cdot n = n^2$ чисел

ВОПРОС: сколько чисел в **квадратной** матрице $A_{n\times n}$?

Порядок определителя n – это размерность матрицы $A_{n\times n}$.

Определитель – это число, характеризующее квадратную матрицу.

1. $|A| = |a_{11}| = a_{11}$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ 3×3

Для вычисления определителя матрицы размером 3×3, строится шесть произведений следующим образом:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 9 & 1 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right. = 6\cdot5\cdot4+9\cdot8\cdot7+1\cdot3\cdot2-7\cdot5\cdot1-2\cdot8\cdot6-4\cdot3\cdot9$$

На рисунке элементы, входящие в сумму с плюсом, отмечены красным, а с минусом — синим, каждой законченной фигуре из трёх точек соответствует один член суммы из трёх сомножителей.

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\cdot(6+1)+3\cdot(15-2)+(-5-4) = 49+39+45 = 43.$$

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

размера 3×3

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами*** матрицы. Если $m \neq n$, то матрица называется ***прямоугольной***. Если $m=n$, то матрица называется ***квадратной порядка n.***

Также сведения о матрицах, действиях с ними представлены в файле «Понятие матрицы, действия с матрицами».pdf

Третий вопрос: <u>Метод Гаусса.</u>

СЛАУ: определение, виды систем

Определение

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m линейных уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Число уравнений m

m

не обязательно совпадает с числом неизвестных n. Особенности системы линейных алгебраических уравнений:

- Уравнение не обязательно заранее на совместность.
- Есть возможность при помощи метода Гаусса приводить к результату при сравнительно небольшом количестве вычисленных операций.

- Можно решать такие системы уравнений, у которых определитель основной матрицы равняется нулю или количество уравнений не совпадает с числом неизвестных переменных.

Система линейных алгебраических уравнений может иметь:

1. Одно решение;
2. Много решений;
3. Не имеет решений.

Если решений нет тогда СЛАУ называется несовместима, если есть — совместимой. Если решение одно, тогда система линейных алгебраических уравнений называется определённой, если решений несколько – неопределённой.

Метод Гаусса и метод последовательного исключения неизвестных

Определения

Метод Гаусса – это метод решение квадратных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), суть которого заключается в последовательном исключение неизвестных переменных с помощью элементарных преобразований строк.

Прямой ход метода Гаусса – это поочерёдное преобразования уравнений системы для последующего избавления от переменных неизвестных.

Решение уравнений методом Гаусса

Пример №1 решение уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ 12x + 2y = -12 \end{cases}$$

С первой строки определяем x. Сначала -2y переносим на другую сторону уравнения, а затем обе стороны делим на 4.

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}y \\ 12x + 2y = -12 \end{cases}$$

Теперь во второе уравнение системы подставляем значение x. Находим y.

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}y \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Теперь когда у нас есть значение y, ми возвращаемся в первое уравнение и определяем x.

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ответ: x=−54;y=32

$$x = -\frac{5}{4}; \quad y = \frac{3}{2}$$

Пример №2.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Для упрощение перепишем уравнение так, чтобы на первом месте была строка с коэффициентом 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Теперь последовательно исключаем x1

x_1

с последующих строк. Для исключения с второго уравнения обе части первого уравнение надо умножаем на -3, а затем сложить с вторым.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -4x_2 - 2x_3 = -14 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Так же и с третьим уравнением, только умножение на -4.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -4x_2 - 2x_3 = -14 \\ -5x_2 - 6x_3 = -28 \end{cases}$$

Теперь приводим уравнение к ступенчатому виду. Нужно сделать так, чтобы во второй строке возле x2

x_2

стала 1. Значит нам надо обе части уравнения умножить −14

$-\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = \dfrac{7}{2} \\ -5x_2 - 6x_3 = -28 \end{cases}$$

Для того чтобы избавится от x2

x_2

в третьим уравнении, мы множим вторую строку на 5 и слаживаем её с третьей.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

Теперь с третьей строки находим x3

x_3

.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Мы закончили прямой ход метода Гаусса. Теперь приступаем к обратному ходу. Подставляем значение x_3 во вторую строку и вычисляем x2

x_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Подставляем значение x2иx3

x_2 и x_3

в первое уравнение и вычисляем x1

x_1

.

x1=1x2=2x3=3

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: x1=1,x2=2,x3=3