Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Линейная алгебра Ч.1

2022

Линейная алгебра Ч.1

-Понятие матрицы

-Действия над матрицами

-Минор и алгебраическое дополнение

-Определитель (детерминант)

-Свойства определителя

-Обратная матрица

Введение. ***Понятие матрицы***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица размера (mxn)

Любая прямоугольная таблица чисел, состоящая
из m строк и n столбцов, называется матрицей размера (mxn).

Числа, образующие матрицу, называются элементами матрицы.

Историческая справка

Понятие матрицы впервые появилось в середине 19 века. Термин «матрица» ввёл Д.Сильвестр. Начала теории матриц содержит статья ирландского математика и физика У.Гамильтона (1805–1865) «Линейные и векторные функции» (1853). Основы матричного исчисления заложены А.Кели (1821–1895) в «Мемуаре о теории матриц» (1858). Современные обозначения — две вертикальные чёрточки — ввёл английский математик А.Кели(1843–1845), а круглые скобки — английский математик Д.Коллис (1913).

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица размера (3х3) или матрица 3-го порядка

Можно выписать матрицу столбец

$$B = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица - столбец размера (3х1)

Можно записать матрицу-строку $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, размер матрицы (1х3)

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

побочная

главная

Примеры числовых матриц и «не очень»

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица (3x3)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10^2 & 10^3 \\ 10^4 & 10^5 & 10^6 \\ 10^7 & 10^8 & 10^9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Скалярная матрица (3x3)

$$B = \begin{pmatrix} Вася & Коля & Миша \\ Иван & Айк & Сэм \\ Хон & Мин & Ваагн \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \varphi & \xi & \kappa \\ \vartheta & \psi & \eta \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Определение. *Две матрицы A и B называются* ***равными****, если они одинакового размера и соответствующие элементы обеих матриц равны.*

Пример Выяснить, какие из следующих матриц равны:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\sin(\pi/2) & \cos\pi\\ 2\cos 2\pi & \sin 2\pi\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}\cos 2\pi & \sin\left(3\pi/2\right)\\ 2\sin 2\pi & \cos 2\pi\end{pmatrix}.$$

Пример Выяснить, какие из следующих матриц равны:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\sin(\pi/2) & \cos\pi\\ 2\cos 2\pi & \sin 2\pi\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}\cos 2\pi & \sin\left(3\pi/2\right)\\ 2\sin 2\pi & \cos 2\pi\end{pmatrix}.$$

Решение.

Сравнивать между собой можно лишь матрицы A, B, D, H, т.к. они одинакового размера, а соответственные элементы равны лишь у матриц A и D. Следовательно, равные лишь A и D.

Транспонирование матриц

Определение. *Пусть матрица A имеет вид (1). Тогда матрица*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется ***транспонированной*** *к матрице A.*

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Свойства операции транспонирования.

1) Если $A \in M_{m\times n}$, то $A^T \in M_{n\times m}$.
2) $(A^T)^T = A$.

Сложение матриц

Операция сложения определена для матриц одного размера. Пусть $A, B \in M_{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B называется матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример Сложим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0+6 & -1+3 & -5+0 \\ 4+1 & 2+4 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц

1) Операция сложения матриц коммутативна и ассоциативна, т.е.
$A + B = B + A$ — коммутативность.
$(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность.
2) $A + O = O + A$. Здесь O — матрица того же размера, что и матрица A.
3) Для любой матрицы A существует единственная матрица B такая, что $A + B = O$.

4) Операция сложения и транспонирования связаны соотношением

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

Умножение матрицы на число

Определение. *Произведением матрицы A вида (1) на число λ называется матрица*

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример Умножим матрицу A на действительное число λ .

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\\ 12 & 5\end{pmatrix}, \lambda = 3/5 .$$

$$B=\lambda A=\begin{pmatrix}3/5\cdot(-2) & 3/5\cdot 3\\ 3/5\cdot 1 & 3/5\cdot 4\\ 3/5\cdot 12 & 3/5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6/5 & 9/5\\ 3/5 & 12/5\\ 36/5 & 3\end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1) $1 \cdot A = A$,
2) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
5) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Умножение матриц

Даны две матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, тогда их произведение определяется так:

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, r.$

Здесь для удобства записи использовали знак суммы $\sum$.

Пример Перемножим две матрицы. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 1 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-9 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е .

Т.к. число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то можно говорить о произведении матрицы A на матрицу B:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-9)+(-2)\cdot4+3\cdot(-2) & 1\cdot1+(-2)\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot0+(-2)\cdot1+3\cdot(-1)\\ 4\cdot(-9)+1\cdot4+7\cdot(-2) & 4\cdot1+1\cdot1+7\cdot2 & 4\cdot0+1\cdot1+7\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & 5 & -5\\ -46 & 19 & -6\end{pmatrix}$$

Отметим, что в данном случае произведение BA не существует, т.к. число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Свойства операции умножения матриц

1) Если $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times r}$, то $AB \in M_{m\times r}$

2) Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е., если AB и BA существует, то не обязательно $AB = BA$. В этом заключается одно из отличий операции умножения матриц от операции умножения чисел (последнее всегда коммутативно).

3) Умножение матриц ассоциативно:

$$(AB)C = A(BC)$$

(при условии существования указанных произведений).

4) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:

$$(A+B)C = AC + BC,$$

$$F(A+B) = FA + FB.$$

5) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

6) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

7) Пусть E — единичная матрица. Тогда для любой квадратной матрицы A того же порядка что и E

$$EA = AE = A.$$

Для **КВАДРАТНЫХ** матриц можно вычислить определитель.

Определитель квадратной матрицы есть некоторое число, которое вычисляется из элементов матрицы по определенному правилу, которое будет сформулировано после введения понятий миноров и алгебраических дополнений элементов определителя.

Минором элемента определителя называется определитель, полученный после вычеркивания из исходного строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическое дополнение элемента – это минор этого элемента, взятый со знаком (+), если сумма номеров строки и столбца, на которых находится элемент – четная,
и со знаком (-), если эта сумма – нечетная.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -M_{23}$$

Определитель 3-го порядка находится путем <u>разложения определителя по элементам строки или столбца.</u>
При этом используется

Основное правило вычисления определителя:
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

Например, разложение определителя по элементам 1-ой строки будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} =$$

$$= a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример вычисления определителя путем разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3\cdot 6 - (-2)\cdot(-1)) + 4\cdot(5\cdot 6 - (-2)\cdot 4) + 2\cdot(5\cdot(-1) - 3\cdot 4) =$$

$$= (18-2) + 4\cdot(30+8) + 2\cdot(-5-12) = 16 + 152 - 34 = 134$$

Наиболее выгодным является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю

Например, данный определитель наиболее выгодно разложить по элементам 2-й строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= -3\cdot((-1)\cdot 7 - (-2)\cdot 4) = -3\cdot(-7+8) = -3\cdot 1 = -3$$

Если строк или столбцов с нулями нет, то их можно получить, используя элементарные преобразования, не меняющие величины определителя.

Согласно свойству определителей: *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, предварительно умноженные на число.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -4+3 & -6-4 & -8-1 \\ 3-3 & 6+1 & 9-2 & 12+5 \\ 4-4 & 8-3 & 12+1 & 16+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 7 & 17 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 17 \\ 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -7+7 & -70+7 & -63+17 \\ -5+5 & -50+13 & -45+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 0 & -63 & -46 \\ 0 & -37 & -27 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -63 & -46 \\ -37 & -27 \end{vmatrix} = -(-63 \cdot (-27) - (-46) \cdot (-37)) =$$

$$= -(1701 - 1702) = 1$$

Свойства определителей

1. Постоянный множитель из элементов какого либо ряда можно выносить за знак определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Определитель равен нулю, если все элементы какого-либо ряда равны нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 9 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Определитель равен нулю, если есть два ряда, соответствующие элементы которых равны или пропорциональны

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -8 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -1 & 12 \\ -3 & -5 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Обратная матрица. Матричные уравнения

Обратной матрицей для квадратной матрицы A называется матрица A^{-1} произведение которой на исходную матрицу равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица существует только для квадратных невырожденных матриц, т.е. таких матриц, определитель которых отличен от нуля

$$\det A \neq 0$$

Равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ Служит для проверки правильности нахождения обратной матрицы

Нахождение обратной матрицы

2. Найти матрицу, обратную данной
$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}18 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}18 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-(18\cdot 3+1)=-55\neq 0$$

Т.о. обратная матрица существует.

2) Составляем союзную матрицу

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1-2=-3 \quad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-(3+8)=-11 \quad A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & 1\end{vmatrix}=3-4=-1$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(4-5)=1 \quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix}=2+20=22 \quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-(2+16)=-18$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}=8+5=13 \quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(4-15)=11 \quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2-12=-14$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-3 & -11 & -1\\ 1 & 22 & -18\\ 13 & 11 & -14\end{pmatrix}$$

3) Полученную матрицу транспонируем

$$A^{*T}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 13\\ -11 & 22 & 11\\ -1 & -18 & -14\end{pmatrix}$$

4) Обратная матрица

$$A^{-1}=-\frac{1}{55}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 13\\ -11 & 22 & 11\\ -1 & -18 & -14\end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание