1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Тема № 1.6: «Системы уравнений и неравенств»

Лекционное занятие № 5

Часть 2

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие
по Теме № 1.6 «Системы уравнений и неравенств»

Цель занятия: изучить со студентами способы решения систем линейных и нелинейных уравнений, систем неравенств, понятие матрицы 2х2 и 3х3, определитель матрицы, метод Гаусса.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу).

Метод проведения занятия: повторное доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий
Время проведения: 2 ч (90 мин.)

Основные вопросы:

1. Способы решения систем линейных уравнений.
2. Понятие матрицы 2х2 и 3х3, определитель матрицы.
3. Метод Гаусса.
4. Системы нелинейных уравнений.
5. Системы неравенств.
6. Выполнение практических заданий.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Богомолов, Н. В.* Математика. Алгебра и начала анализа. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 241 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16084-0. —Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544860, глава 2, с. 17-48.

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы.

Основная часть (теоретическая):

Второй вопрос (продолжение): Системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Определитель второго порядка.

1. Уравнения и системы уравнений с двумя переменными. ***Уравнение с двумя переменными*** x и y записывается в виде $f(x, y) = 0$, где f — выражение с переменными x и y. ***Решением*** такого ***уравнения*** называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которых в данное уравнение получается верное числовое равенство $f(x_0; y_0) = 0$.

Уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений с двумя переменными в общем виде записывается так:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется упорядоченная пара чисел, являющихся решением каждого из уравнений, входящих в систему.

Две системы уравнений называются ***равносильными***, если множества решений этих систем совпадают.

2. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными. ***Определителем второго порядка***, составленным из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Числа a_1, b_1, a_2 и b_2 называются ***элементами*** определителя, причем элементы a_1 и b_2 образуют ***главную диагональ***, а элементы a_2 и b_1 — ***побочную диагональ***. Таким образом, *определитель второго порядка*

равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (1)$$

Равенства (1) называются ***формулами Крамера***.

Здесь Δ_x и Δ_y — определители, полученные из определителя Δ заменой столбцов коэффициентов при соответствующей переменной столбцом свободных членов.

Если же определитель системы $\Delta = 0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta_y \neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_x = \Delta_y = 0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

Условие несовместности системы можно записать в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Пример 1. $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 3x + 4y = 25. \end{cases}$

○Находим Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 25 \cdot (-2) = 28 + 50 = 78;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} = 5 \cdot 25 - 3 \cdot 7 = 125 - 21 = 104.$$

Так как $\Delta = 26 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находим по формулам (1):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{104}{26} = 4. \bullet$$

Пример 2. $\begin{cases} 3x - 4y = 14, \\ 4x + 3y = 27. \end{cases}$

○Имеем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -4 \\ 27 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{42 + 108}{9 + 16} = \frac{150}{25} = 6; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{25} =$$

$$= \frac{81 - 56}{25} = \frac{25}{25} = 1. \bullet$$

Системы трёх линейных уравнений с тремя переменными. Определитель третьего порядка.

Определителем третьего порядка, составленным из чисел a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки***.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение, которое находится по ***формулам Крамера***:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (2)$$

где $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$

Если же $\Delta = 0$, то система является либо неопределенной, либо несовместной. В том случае, когда система ***однородная,*** т. е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$$

и $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если же определитель однородной системы $\Delta = 0$, то такая система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному (следствием которого являются остальные два уравнения). В обоих случаях система имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. Вычислить: а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

○а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 2(30+16) - 0 + 5(-1-0) = 92 - 5 = 87.$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 1(15-16) - 2(10-12) + 3(8-9) = -1 - 2(-2) + 3(-1) = -1 + 4 - 3 = 0.$●

Пример 2. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10, \\ x + 5y - 2z = -15, \\ 2x - y - z = 3. \end{cases}$

○Согласно формуле (1), находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5-4) + 2(-1+4) + 1\cdot(-2-10) = -27 + 6 - 12 = -33;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -15 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -15 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10(-5-4) + 2(15+6) + (30-15) = -90 + 42 + 15 = -33;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & -15 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -15 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(15+6) - 10(-1+4) + (3+30) = 63 - 30 + 33 = 66;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 1 & 5 & -15 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(10-30) + 2(3+30) + 10(-2-10) = -45 + 66 - 120 = -99.$$

Теперь, используя формулы Крамера (2), получим

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-33} = 1,\ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{66}{-33} = -2,\ \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-99}{-33} = 3.$$●

Четвёртый вопрос: <u>Системы нелинейных уравнений.</u>

Нелинейные уравнения с двумя неизвестными

Определение 1. Пусть A – некоторое **множество пар чисел** $(x\,;\,y)$. Говорят, что на множестве A задана ***числовая функция*** z ***от двух переменных*** x и y, если указано правило, с помощью которого каждой паре чисел из множества A ставится в соответствие некоторое число.

Задание числовой функции z от двух переменных x и y часто **обозначают** так:

$$z = f(x\,,y)\,, \tag{1}$$

причем в записи (1) числа x и y называют ***аргументами функции***, а число z – ***значением функции***, соответствующим паре аргументов $(x\,;y)$.

Определение 2. ***Нелинейным уравнением с двумя неизвестными*** x и y называют уравнение вида

$$f(x\,,y) = 0\,, \tag{2}$$

где $f(x\,,y)$ – любая функция, отличная от функции

$$f(x\,,y) = ax + by + c\,,$$

где a, b, c – заданные числа.

Определение 3. ***Решением уравнения (2)*** называют пару чисел $(x\,;y)$, для которых формула (2) является верным равенством.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 12\,y + 18 = 0\,. \tag{3}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (3):

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 12\,y + 18 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (2y^2 - 12y + 18) =$$
$$= (x - 2y)^2 + 2(y - 3)^2\,.$$

Таким образом, уравнение (3) можно переписать в виде

$$(x - 2y)^2 + 2(y - 3)^2 = 0\,. \tag{4}$$

Поскольку квадрат любого числа неотрицателен, то из формулы (4) вытекает, что неизвестные x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 0\,, \\ y - 3 = 0\,, \end{cases}$$

решением которой служит пара чисел $(6\,;3)$.

Ответ: $(6\,;3)$

Пятый вопрос: <u>Системы неравенств.</u>

Система неравенств состоит из нескольких неравенств с одной переменной. Эти неравенства объединяются фигурной скобкой (так же, как и уравнения в системах уравнений). Необходимо найти все совпадающие решения этих неравенств.

> **Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы есть верное числовое неравенство, является решением системы неравенств.**

Множество всех решений системы неравенств является общим решением (чаще всего — просто решением системы неравенств).

$\begin{cases} 2x-1>3 \\ 3x-2<11 \end{cases}$ означает, что неравенства $2x-1>3$ и $3x-2<11$ образуют систему неравенств.

Решить систему неравенств — это найти все её решения.

Пример:

решить систему неравенств $\begin{cases} 2x-1>3 \\ 3x-2<11 \end{cases}$.

1. Решив первое неравенство, получаем

$2x>4 \quad |:2;$

$x>2.$

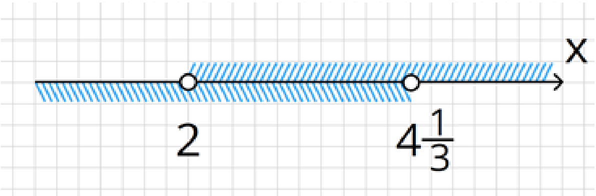
2. Решив второе неравенство, получаем

$3x<13 \quad |:3;$

$x<\frac{13}{3};$

$x<4\frac{1}{3}.$

3. Полученные промежутки отметим на оси координат.



4. Решение системы неравенств — это пересечение решений неравенств, входящих в систему, т. е. промежуток, на котором оба неравенства имеют решения.

В данном случае получаем ответ: $\left(2;\, 4\frac{1}{3}\right)$.

Пример 1. $\begin{cases} 3x+7>7x-9, \\ x-3>-3x+1. \end{cases}$

○ $\begin{cases} 3x+7>7x-9, \\ x-3>-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7x>-9-7, \\ x+3x>1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x>-16, \\ 4x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1<x<4).$

Ответ: $1 < x < 4$.●

Пример 2. $\begin{cases} 3x+2>x-2, \\ x+15>6-2x, \\ x-14<5x+14. \end{cases}$

○ $\begin{cases} 3x+2>x-2, \\ x+15>6-2x, \\ x-14<5x+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-x>-2-2, \\ x+2x>6-15, \\ x-4x<14+14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-4, \\ 3x>-9, \\ -3x<28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>-3, \\ x>-7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2<x<+\infty).$

Ответ: $-2 < x < +\infty$.●

Пример 3. $\begin{cases} 2x>4x+6, \\ 4x+3<2x+1. \end{cases}$

○ $\begin{cases} 2x>4x+6, \\ 4x+3<2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4x>6, \\ 4x-2x<1-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x>6, \\ 2x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ x<-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-\infty<x<-3).$

Ответ: $-\infty < x < -3$.●

Шестой вопрос: <u>Выполнение практических заданий.</u>

Задание: рассмотреть примеры выполнения практических заданий (решение задач), размещенные в вопросах № 1-5 текущего План-конспекта, в Главе 2 учебника № 1 списка литературы, указанного на с.2 текущего План-конспекта.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте, изучить материал занятия, размещенный в в Главе 2 учебника № 1 списка литературы, указанного на с.2 текущего План-конспекта.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.