1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Тема № 2.1: «Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей»

Лекционное занятие № 6

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие № 6
по Теме № 2.1 «Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей»

Цель занятия: изучить со студентами основные понятия, аксиомы стереометрии, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, признак и свойства скрещивающихся прямых, основные пространственные фигуры.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч (90 мин.)

Основные вопросы:

1. Предмет стереометрии.
2. Основные понятия (точка, прямая, плоскость, плоскость, пространство).
3. Основные аксиомы стереометрии.
4. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые.
5. Признак и свойства скрещивающихся прямых.
6. Основные пространственные фигуры.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659, с.3-8, 15-17, 25-27;
2. [2 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Гусев, В. А.* Математика. Геометрия. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 281 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16085-7. — Текст : электронный// Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544861, с.152-165.

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Предмет стереометрии.</u>

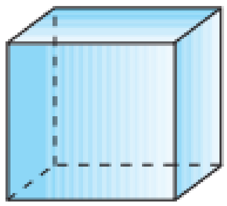
1 Предмет стереометрии

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. **Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.** Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объёмный, пространственный и «метрео» — измерять.

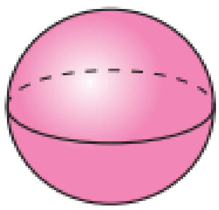
Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются **точки, прямые** и **плоскости.** Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать **геометрические тела** и их **поверхности.** Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками.** Одним из простейших многогранников является куб (рис. 1, *а*). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром** (рис. 1, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром** (рис. 1, *в*).

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделённую от остальной части пространства поверхностью — **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть **сфера**, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.

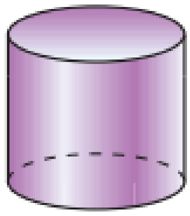
Изучая свойства геометрических фигур — воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных



а)
Куб



б)
Шар



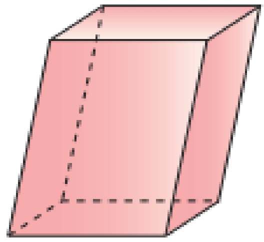
в)
Цилиндр

Рис. 1

предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

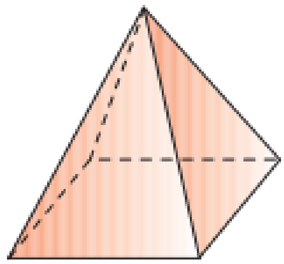
При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит её проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создаёт правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования её свойств. На рисунках 2, *а*, *б* изображены два многогранника — **параллелепипед** и **пирамида**, а на рисунке 2, *в* — **конус**. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1.

В течение двух лет мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники, «круглые» геометрические тела — цилиндр, конус, шар, рассмотрим вопрос об объёмах тел и познакомимся с векторами и методом координат в пространстве.



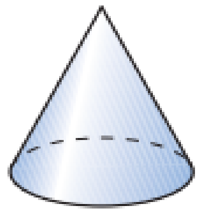
а)

Параллелепипед



б)

Пирамида

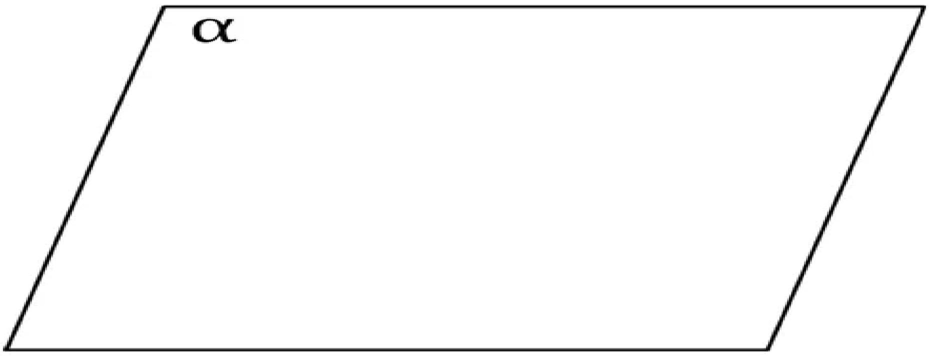


Второй вопрос: <u>**Основные понятия (точка, прямая, плоскость, плоскость, пространство).**</u>

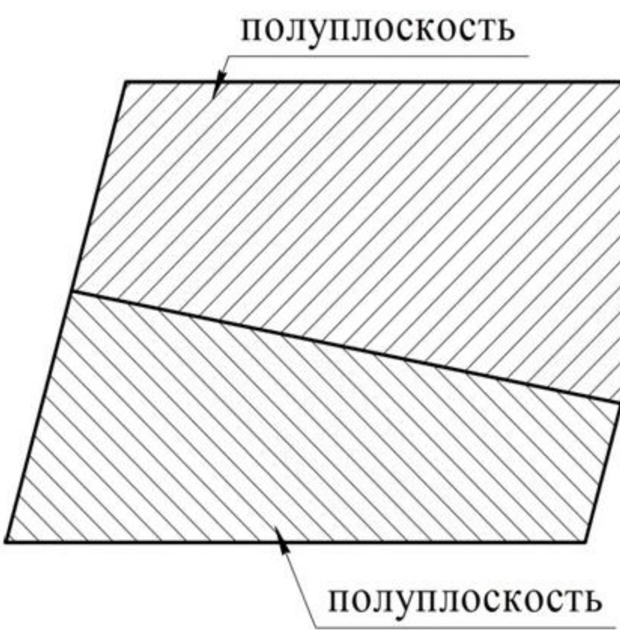
Стереометрия оперирует всеми теми понятиями, которые нам известны из планиметрии – точка, прямая, окружность, треугольник и т. д. Но помимо них добавляются и иные термины.

Важнейшее из основных понятий стереометрии – это плоскость. Иногда в литературе применяется сокращение плос-ть. Строгого определения плоскости в рамках геометрии не дают, это понятие считается исходным, как понятия точки или прямой в планиметрии. Лишь некоторые ее свойства косвенно указываются с помощью аксиом. В реальной жизни примерами плоскости являются поверхность стола или лист бумаги. Однако, в отличие от них, плоскость не имеет границы, она бесконечна (как и прямая). Плоскость не имеет кривизны, поэтому, например, поверхность шара плоскостью не является. При изображении плоскости на чертежах ее обычно показывают в виде параллелограмма, при этом традиционно их обозначают маленькими буквами греческого алфавита, которые в планиметрии используются для обозначения углов (α, β, γ и т. п.):

Плоскость α



Если на плоскости проведена прямая, то она разобьет ее на две фигуры, которые именуются полуплоскостями:



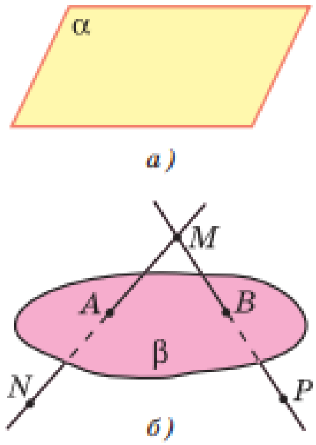
Третий вопрос: <u>Основные аксиомы стереометрии.</u>

В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается ещё одна основная фигура — **плоскость**. Представление о плоскости даёт гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т. д., а прямые — строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. или двумя прописными латинскими буквами AB, CD и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, *а*) или в виде произвольной области (рис. 3, *б*).

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, *б* точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении 2. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены A_1, A_2, A_3.



Точки A и B лежат в плоскости β, а точки M, N и P не лежат в этой плоскости

Рис. 3

A_1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображённая на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью ABC.

Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трёх ножках, т. е. опирается на три «точки», а конец четвёртой ножки (четвёртая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

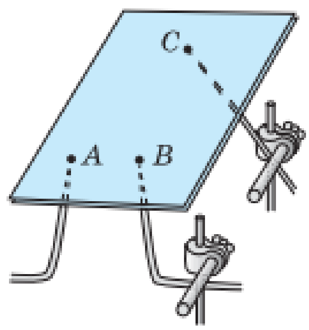


Иллюстрация к аксиоме A_1: пластинка поддерживается тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой

Рис. 4

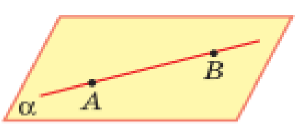
A_2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки» («две прямые», «три плоскости» и т. д.), будем считать, что эти точки (прямые, плоскости) различны.

В таком случае говорят, что **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую** (рис. 5, *а*).

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертёжной линейки. С этой целью линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край

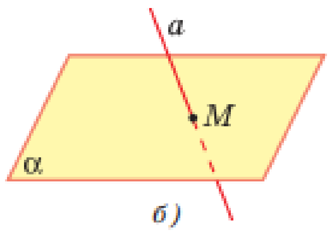


а)

Прямая AB лежит в плоскости α

линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

Из аксиомы A_2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они **пересекаются** (рис. 5, *б*).



б)

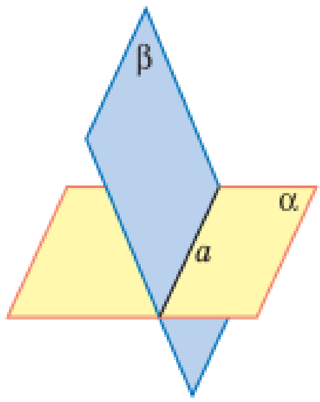
Прямая *a* и плоскость α пересекаются в точке *M*

A_3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что **плоскости пересекаются по прямой** (рис. 5, *в*). Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).



в)

Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*

Рис. 5

Некоторые следствия из аксиом

Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую *a* и не лежащую на ней точку *M* (рис. 6). Докажем, что через прямую *a* и точку *M* проходит плоскость. Отметим на прямой *a* две точки *P* и *Q*. Точки *M*, *P* и *Q* не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как две точки прямой *a* (*P* и *Q*) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую *a*.

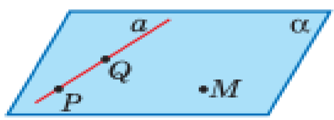


Рис. 6

Единственность плоскости, проходящей через прямую *a* и точку *M*, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую *a* и точку *M*, проходит через точки *M*, *P* и *Q*. Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки *M*, *P* и *Q* проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

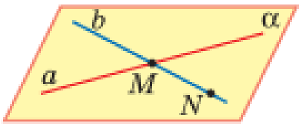
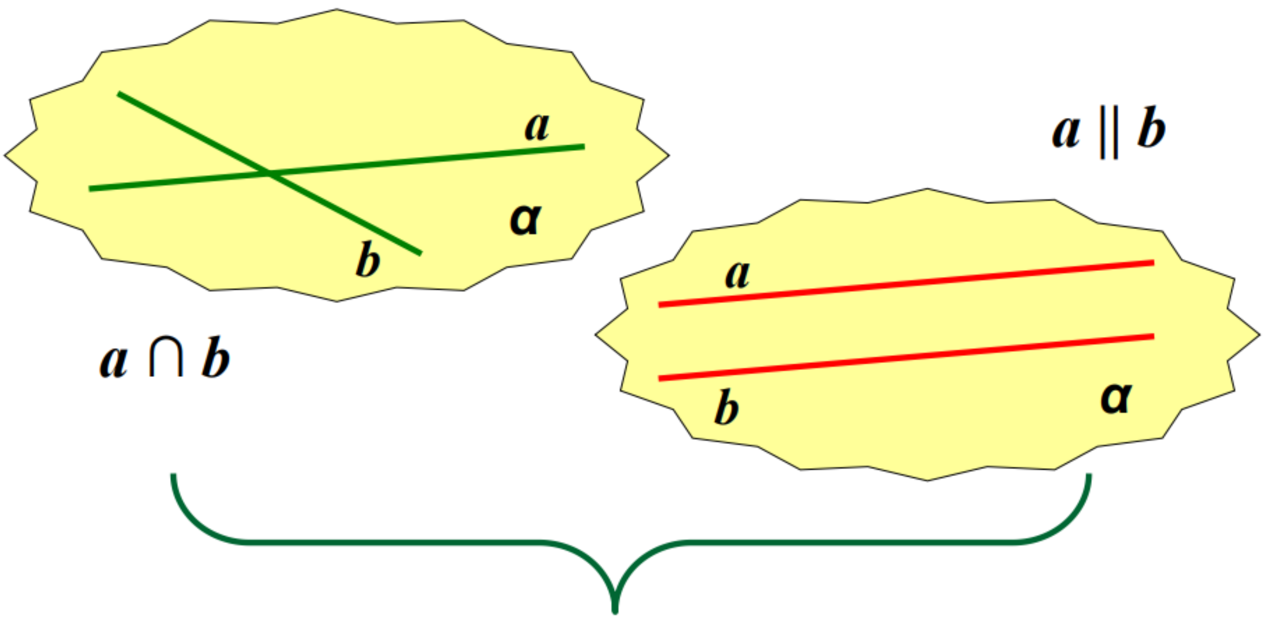


Рис. 7

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N, отличную от точки M, и рассмотрим плоскость α, проходящую через точку N и прямую a. Так как две точки прямой b лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Итак, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b, проходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Четвёртый вопрос: **<u>Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые.</u>**

Расположение прямых в пространстве:



Лежат в одной плоскости!

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые – три варианта взаимного расположения прямых в пространстве.

Пересекающиеся прямые – это прямые, которые имеют **одну общую точку**. Точка пересечения единственна: если две прямые имеют две общие точки, то они совпадают.

Параллельные прямые – это прямые, которые **лежат в одной плоскости и не пересекаются**.

Скрещивающиеся прямые – это прямые, которые **не имеют общих точек и не параллельны**. Равносильное определение – **прямые, которые не лежат в одной плоскости**.

Через две пересекающиеся или параллельные прямые можно провести плоскость (и притом единственную). Возможна также ситуация, когда через две прямые плоскость провести нельзя.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Две прямые a и b называются *параллельными* (обозначается $a \parallel b$), если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Имеют место *утверждения*:

1) через две параллельные прямые можно провести плоскость, и эта плоскость единственна;

2) если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой или совпадают;

3) через точку вне прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и эта прямая единственна;

4) два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны между собой.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым. Этот угол не зависит от выбора точки, через которую проходят прямые.

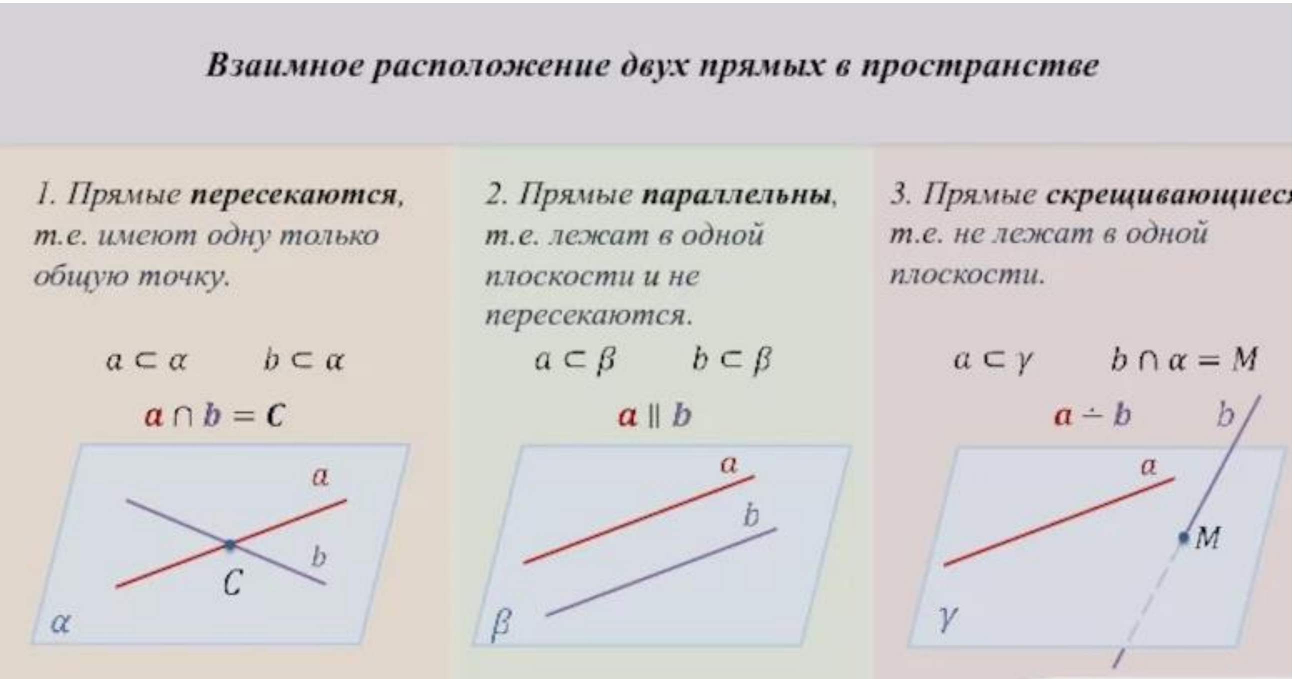
Пятый вопрос: <u>Признак и свойства скрещивающихся прямых.</u>

Скрещивающиеся прямые в геометрии – это прямые, которые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Признак скрещивающихся прямых: если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

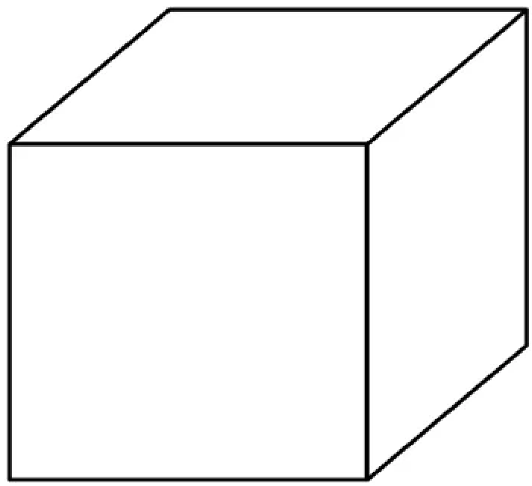
Теорема о скрещивающихся прямых: через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Пример: транспортная магистральная развязка, на которой верхняя часть дороги является одной прямой, а идущее под ней направление – скрещивающаяся с первой вторая прямая.

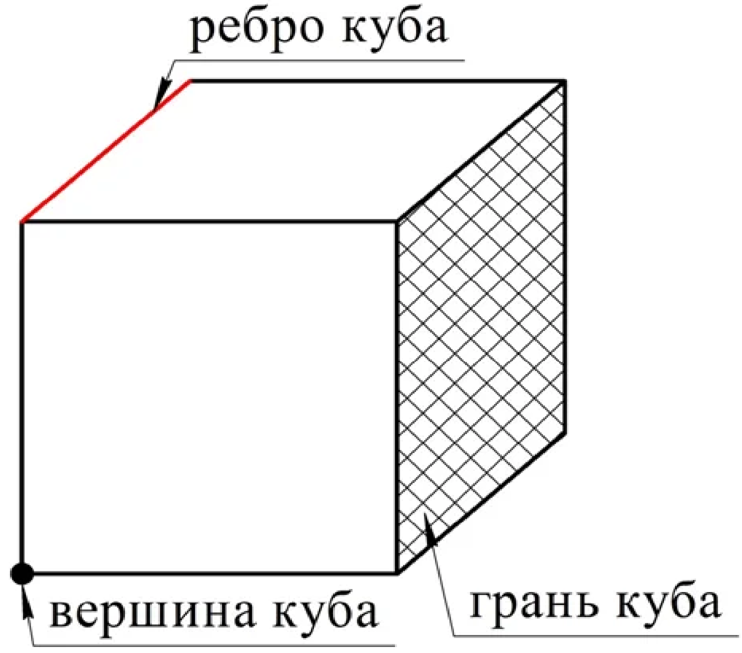


Шестой вопрос: <u>Основные пространственные фигуры.</u>

Объемные фигуры – это часть пространства, которая отделена от остального пространства замкнутой поверхностью, то есть границей. Простейший пример объемной фигуры – это куб:

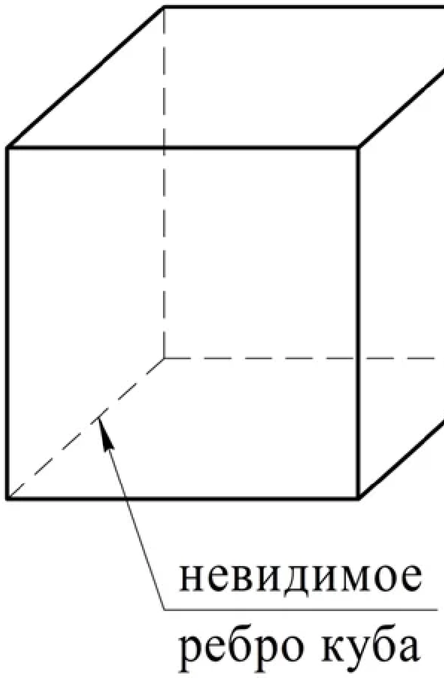


Поверхность куба – это 6 равных квадратов, каждый из них именуется гранью куба. Стороны этих квадратов – это уже ребра куба, а вершины квадратов одновременно являются и вершинами кубов.

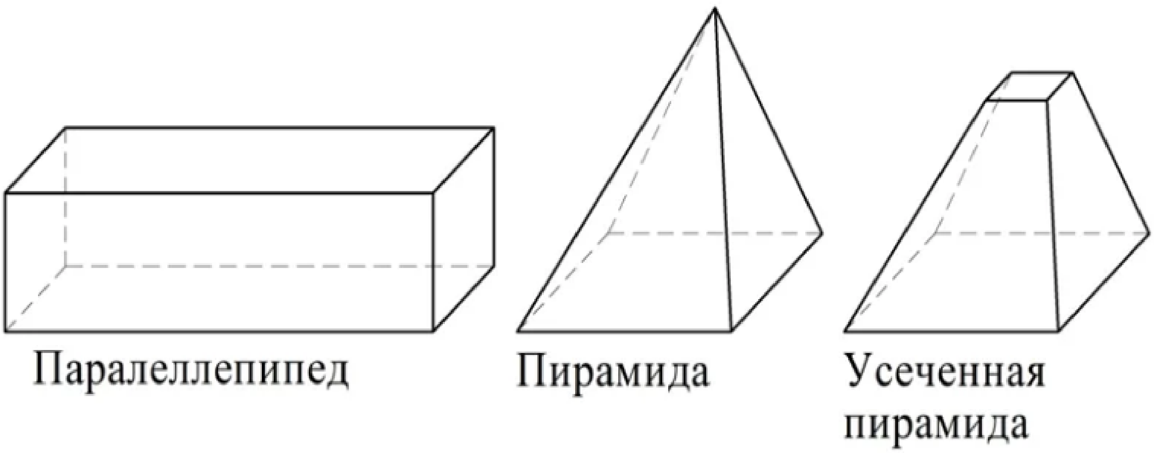


Обратите внимание на изображение куба. Здесь он показан немного сбоку, в результате чего изображение становится объемным. Однако при этом мы вынуждены искажать некоторые размеры и углы на чертеже. Например, верхняя грань должна быть квадратом, но на плоском рисунке углы у этой грани прямыми не являются. При необходимости мы просто ставим специальный значок перпендикулярности между отрезками, который использовали и в планиметрии:

Важно понимать, что из-за искажения размеров у объемных фигур на плоских чертежах мы НЕ можем проверить решение некоторых стереометрических задач с помощью точных построений. Однако есть специальные компьютерные программы 3-D черчения, в которых такие построения уже можно выполнить. Также заметим, что на рисунке видны не все 6 граней куба, а только 3 из них. Если возникает необходимость показать невидимые на чертеже линии, то использует штриховые линии:



Все грани куба – это многоугольники. Если у фигуры вся ее поверхность состоит лишь из многоугольников, то она именуется многогранником. Таким образом, куб является примером многогранника. Другими примерами многогранников могут служить параллелепипед, пирамида, усеченная пирамида:



Основные понятия стереометрии, аксиомы стереометрии, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, признак и свойства скрещивающихся прямых, основные пространственные фигуры представлены в учебниках, указанных на с.2 текущего План-Конспекта, файле Приложения – «Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность плоскостей».pdf.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте,
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.