1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве

Тема № 2.2: «Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей»

Лекционные занятия № 7, 8

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционные занятия № 7 ,8
по Теме № 2.2 «Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей»

Цель занятий: изучить со студентами основные сведения о параллельности прямых, прямой и плоскости, плоскостей.

Вид занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятий: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 ч)

Основные вопросы:

1. Параллельные прямая и плоскость. Определение. Признак. Свойства (с доказательством).
2. Параллельные плоскости. Определение. Признак. Свойства (с доказательством).
3. Тетраэдр и его элементы.
4. Параллелепипед и его элементы.
5. Свойства противоположных граней и диагоналей параллелепипеда.
6. Построение сечений.
7. Решение задач.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659, с.11-35;
2. [2 учебник раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Гусев, В. А.* Математика. Геометрия. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 281 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16085-7. — Текст : электронный// Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544861, с.103-111.

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Параллельные прямая и плоскость. Определение. Признак. Свойства (с доказательством).</u>

Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то согласно аксиоме A_2 вся прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что **возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве:**

а) прямая лежит в плоскости (см. рис. 5, *а*);

б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются (см. рис. 5, *б*);

в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$. Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости, дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода — они параллельны плоскости земли. Другой пример даёт линия пересечения стены и потолка — эта линия параллельна плоскости пола (рис. 15, *а*). Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, линия пересечения пола с той же самой стеной.

На рисунке 15, *а* указанные прямые обозначены буквами a и b. Оказывается, что если в плоскости α имеется прямая b, параллельная прямой a, не лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны (рис. 15, *б*).

Другими словами, наличие в плоскости α прямой b, параллельной прямой a, является **признаком**, по которому можно сделать вывод о **параллельности прямой a и плоскости** α. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

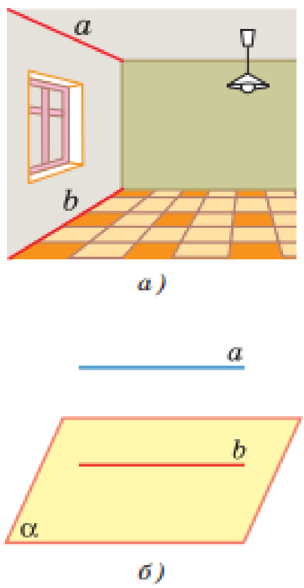


Рис. 15

Теорема

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости (рис. 15, *б*). Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, а значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая b лежит в плоскости α. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

Докажем ещё два утверждения, которые часто используются при решении задач.

1^0. **Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.**

Пусть через данную прямую a, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b (рис. 16). Докажем, что $b \parallel a$. Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости β) и не пересекаются: ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α, что невозможно, поскольку по условию $a \parallel \alpha$.

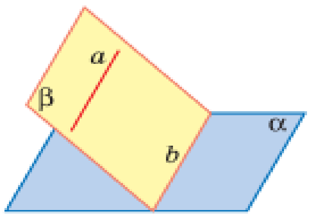


Рис. 16

2^0. **Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.**

В самом деле, пусть a и b — параллельные прямые, причём прямая a параллельна плоскости α. Тогда прямая a не пересекает плоскость α, и, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также не пересекает плоскость α. Поэтому прямая b либо параллельна плоскости α, либо лежит в этой плоскости.

Второй вопрос: <u>Параллельные плоскости. Определение. Признак. Свойства (с доказательством).</u>

10 Параллельные плоскости

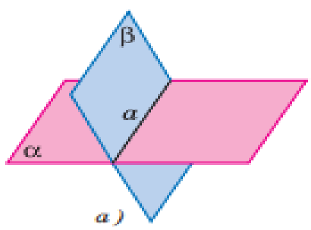
Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 28, *а*), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 28, *б*).

Определение

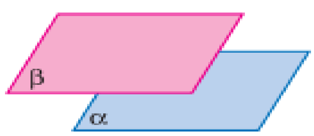
Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены комнаты, поверхность стола и плоскость пола.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Докажем теорему, выражающую признак параллельности двух плоскостей.



а)
Плоскости α и β пересекаются



б)
Плоскости α и β параллельны

Рис. 28

Теорема

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причём $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.

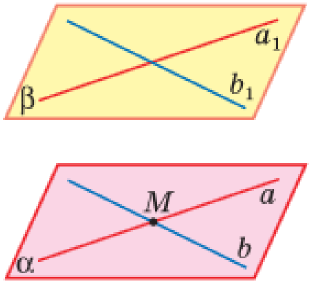
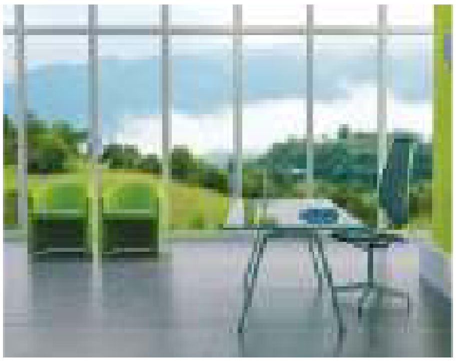


Рис. 29

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что прямые a и c параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно, и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.



11 Свойства параллельных плоскостей

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1^0. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Наглядным подтверждением этого факта служат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты — эти линии параллельны.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ (рис. 30). Докажем, что прямые a и b параллельны. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости γ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как эти плоскости параллельны. Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

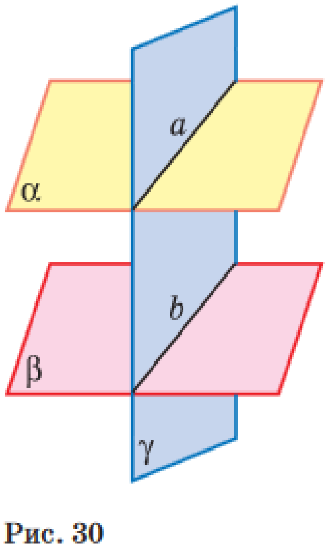


Рис. 30

2^0. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями α и β (рис. 31). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым AC и BD (свойство 1^0). Таким образом, в четырёхугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отрезки AB и CD равны.

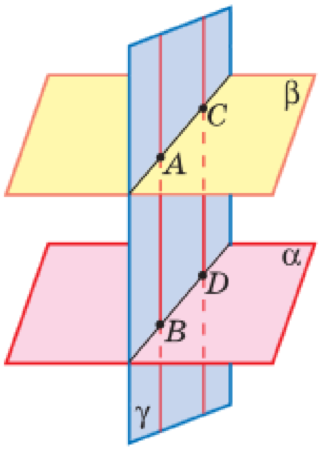


Рис. 31

Третий вопрос: <u>Тетраэдр и его элементы.</u>

Четвёртый вопрос: <u>Параллелепипед и его элементы.</u>

Пятый вопрос: <u>Свойства противоположных граней и диагоналей параллелепипеда.</u>

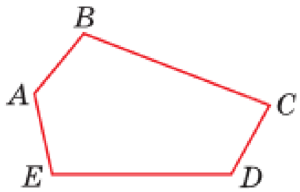
12 Тетраэдр

Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но ещё до подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них — **тетраэдром** и **параллелепипедом**. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.

Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая её саму (рис. 33, *б*). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

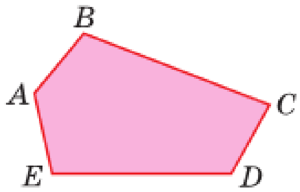
Перейдём теперь к определению простейшего из многогранников — тетраэдра.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, DBC и DCA. Поверхность, составленная



а)

Многоугольник *ABCDE* — фигура, составленная из отрезков



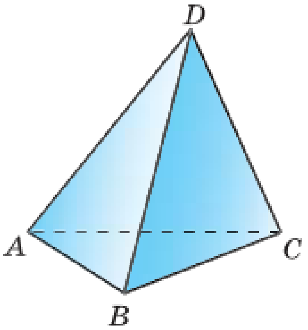
б)

Многоугольник *ABCDE* — часть плоскости, ограниченная линией *ABCDE*

Рис. 33

из четырёх треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется **тетраэдром** и обозначается так: $DABC$ (рис. 34).

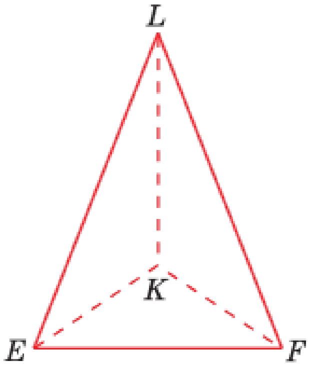
Треугольники, из которых составлен тетраэдр, называются **гранями**, их стороны — **рёбрами**, а вершины — **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть рёбер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке 34 противоположными являются рёбра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют её **основанием**, а три другие — **боковыми гранями**.



Тетраэдр $DABC$

Рис. 34

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырёхугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются невидимые рёбра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, а на рисунке 35 — рёбра EK, KF и KL.



Тетраэдр $LKEF$

Рис. 35

13 Параллелепипед

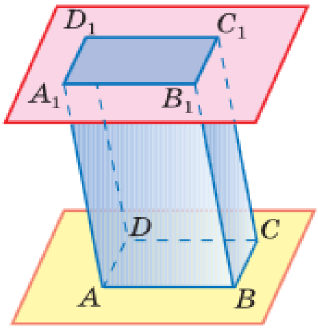
Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны (рис. 36, *а*). Четырёхугольники

$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

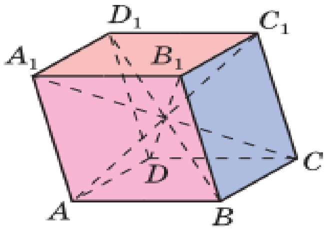
также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны, например, в четырёхугольнике ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а стороны AB и A_1B_1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 1°, п. 11). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и четырёх параллелограммов (1), называется **параллелепипедом** и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **рёбрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих рёбер — **противоположными**. На рисунке 36, *б* противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**.

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, *б* диагоналями являются отрезки AC_1, BD_1, CA_1 и DB_1.



а)



б)

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями параллелепипеда**. Рёбра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми рёбрами**. Так, если в качестве оснований выбрать грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми рёбрами — отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Параллелепипед

Рис. 36

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, *б*. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые рёбра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями[1].

Докажем два утверждения о свойствах параллелепипеда.

1°. Противоположные грани параллелепипеда параллельны[2] и равны.

Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37, *а*). Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $AB \parallel DC$ и $AA_1 \parallel DD_1$. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA_1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD_1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то $AB = DC$ и $AA_1 = DD_1$. По этой же причине стороны углов A_1AB и D_1DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB_1A_1 соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC_1D_1, поэтому эти параллелограммы равны.

2°. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырёхугольник A_1D_1CB, диагонали которого A_1C и D_1B являются диагоналями парал-

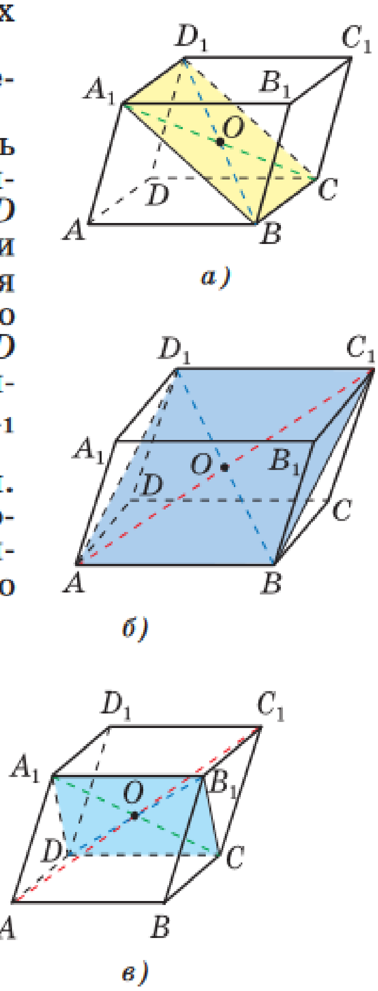


Рис. 37

[1] Более подробно об изображении пространственных фигур на плоскости, в частности параллелепипеда, рассказано в приложении 1.

[2] Две грани параллелепипеда называются **параллельными**, если их плоскости параллельны.

лелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 37, *а*). Так как $A_1D_1 \parallel BC$ и $A_1D_1 = BC$ (объясните почему), то A_1D_1CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A_1C и D_1B пересекаются в некоторой точке O и этой точкой делятся пополам.

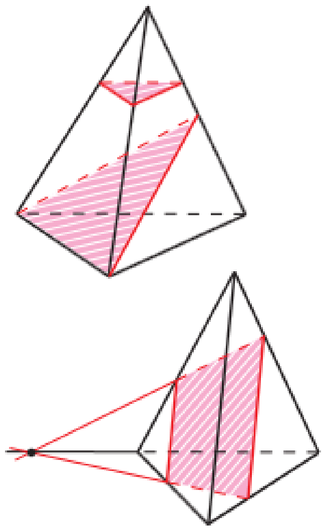
Далее рассмотрим четырёхугольник AD_1C_1B (рис. 37, *б*). Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Шестой вопрос: <u>Построение сечений.</u>

Наконец, рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD (рис. 37, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

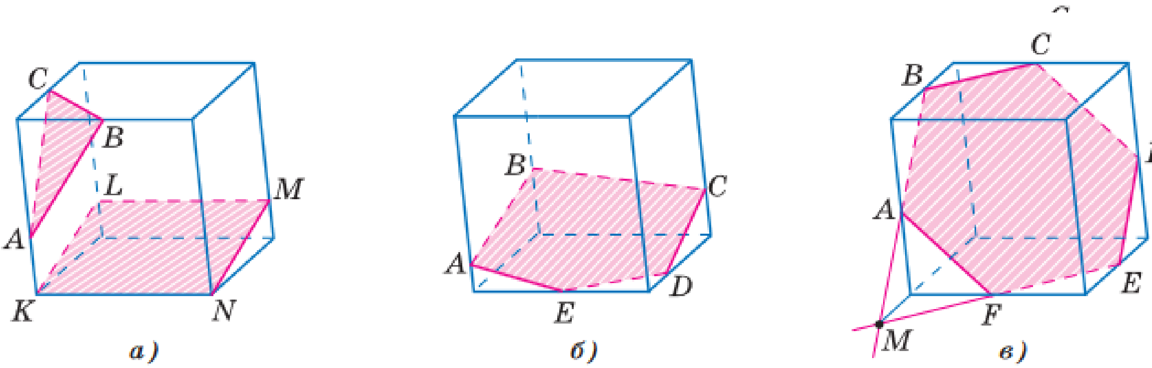
14 Задачи на построение сечений

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их **сечения** различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовём **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется **сечением тетраэдра**



Сечения тетраэдра

Рис. 38



Сечения параллелепипеда

Рис. 39

(параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырёхугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырёхугольники (рис. 39, *а*), пятиугольники (рис. 39, *б*) и шестиугольники (рис. 39, *в*).

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1^0, п. 11). Так, на рисунке 39, *б* секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) — по отрезкам AE и BC, поэтому $AB \parallel CD$ и $AE \parallel BC$. По той же причине на рисунке 39, *в* $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остаётся провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

Рассмотрим примеры построения сечений тетраэдра и параллелепипеда.

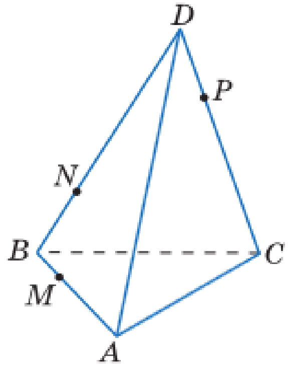
Задача 1

На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N и P (рис. 40, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

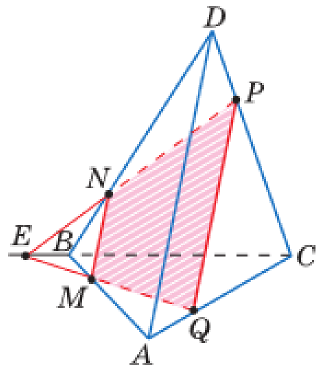
Решение

Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения ещё одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырёхугольник $MNPQ$ — искомое сечение.

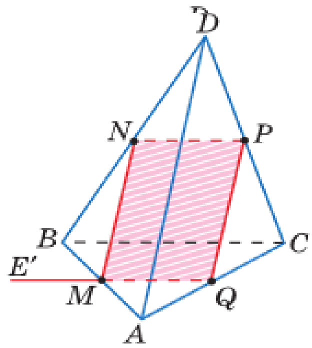
Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, *в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.



а)



б)



в)

Построение сечения тетраэдра плоскостью MNP

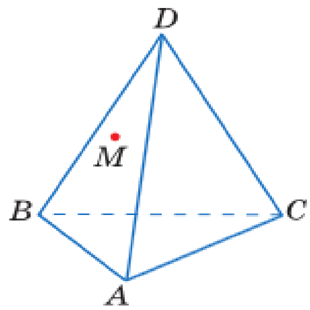
Рис. 40

Задача 2

Точка M лежит на боковой грани ADB тетраэдра $DABC$ (рис. 41, *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно основанию ABC.

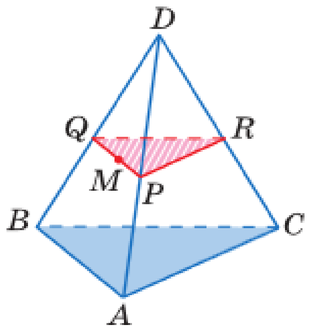
Решение

Так как секущая плоскость параллельна плоскости ABC, то она параллельна прямым AB, BC и CA. Следовательно, секущая плоскость пересекает боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам треугольника ABC (п. 6,



а)

утверждение 1^0). Отсюда вытекает следующий способ построения искомого сечения. Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрами DA и DB (рис. 41, *б*). Затем через точку P проведём прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой R точку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR — искомое сечение.



б)

Рис. 41

Задача 3

На рёбрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких рёбрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на рёбрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, *а*), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение — треугольник ABC. Если точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *б*, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D. Остаётся провести отрезок ED, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, *в*. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведём прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведём прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

Седьмой вопрос: <u>Решение задач.</u>

Вопросы и задачи представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с. 13-15, 19-20, 23-24, 31-35.

Заключительная часть (по каждому занятию).

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте,
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.