1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 3. Координаты и векторы

Тема № 3.1: «Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка»

Лекционное занятие № 13

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие № 13
по Теме № 3.1 «Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между двумя точками. Координаты середины отрезка»

Цель занятий: изучить со студентами Декартовы координаты в пространстве, расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Декартовы координаты в пространстве (прямоугольная система координат в пространстве).
2. Координаты вектора.
3. Связь между координатами векторов и координатами точек.
4. Простейшие задачи в координатах: расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659, с.160-171 (2019 год издания, глава VII), с.102-112 (2013-2014 годы издания, глава V).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

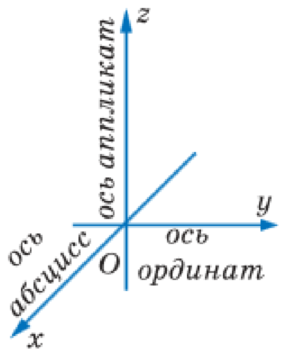
Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Декартовы координаты в пространстве (прямоугольная система координат в пространстве).</u>

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков[1], то говорят, что задана **прямоугольная система координат в пространстве** (рис. 174). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой O. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz — и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.



Система координат $Oxyz$

Рис. 174

Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её **координатами**. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведём через точку M три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат (рис. 175). Первая

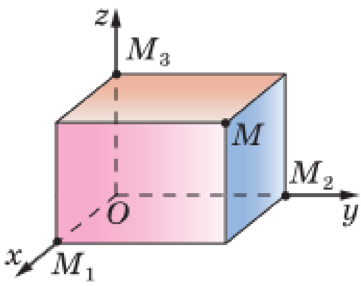


Рис. 175

[1] Напомним, что при выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В данной главе под длиной отрезка подразумевается это число.

координата точки M (она называется **абсциссой** и обозначается обычно буквой x) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси; $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогично с помощью точки M_2 определяется вторая координата (**ордината**) y точки M, а с помощью точки M_3 — третья координата (**аппликата**) z точки M. Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: $M(x; y; z)$, причём первой указывают абсциссу, второй — ординату, третьей — аппликату. На рисунке 176 изображены шесть точек $A(9; 5; 10)$, $B(4; -3; 6)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $E(0; 3; 0)$, $F(0; 0; -3)$.

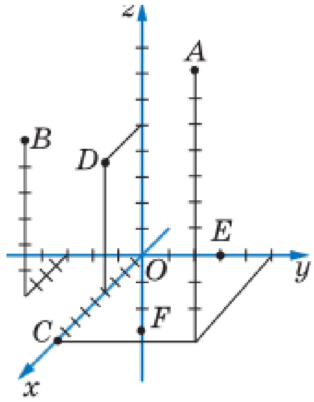


Рис. 176

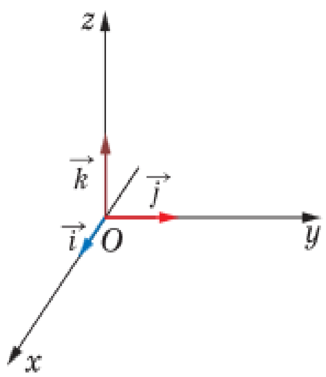
Если точка $M(x;\ y;\ z)$ лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые её координаты равны нулю. Так, если $M \in Oxy$, то аппликата точки M равна нулю: $z=0$. Аналогично если $M \in Oxz$, то $y=0$, а если $M \in Oyz$, то $x=0$. Если $M \in Ox$, то ордината и аппликата точки M равны нулю: $y=0$ и $z=0$ (например, у точки C на рисунке 176). Если $M \in Oy$, то $x=0$ и $z=0$; если $M \in Oz$, то $x=0$ и $y=0$. Все три координаты начала координат равны нулю: $O(0;\ 0;\ 0)$.

Второй вопрос: <u>Координаты вектора.</u>

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 177). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовём **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причём коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.



Координатные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Рис. 177

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$. На рисунке 178 изображён прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1=2$, $OA_2=2$, $OA_3=4$. Координаты векторов, изображённых на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\{2;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\{2;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\{2;\ 2;\ 0\}$, $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\{0;\ 0;\ 1\}$.

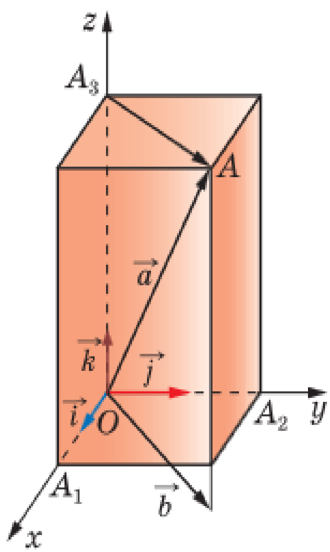


Рис. 178

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны**, т. е. если векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ равны, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ и $z_1=z_2$ (объясните почему).

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2\}$.

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2\}$.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z\}$.

Утверждения 1^0—3^0 доказываются точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны. Рассмотрим пример.

Задача

Найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ 3;\ -6\}$, $\vec{c}\{-2;\ 3;\ 1\}$.

Решение

По правилу 3^0 вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4;\ 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0;\ -1;\ 2\}$. Так как $\vec{p}=(2\vec{a})+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{c}$, то его координаты $\{x;\ y;\ z\}$ можно вычислить по правилу 1^0: $x=2+0-2=0$, $y=-4-1+3=-2$, $z=0+2+1=3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2;\ 3\}$.

Третий вопрос: <u>Связь между координатами векторов и координатами точек.</u>

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется **радиус-вектором** данной точки. **Докажем, что координаты любой точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.**

Обозначим координаты данной точки M через $(x;\ y;\ z)$. Пусть M_1, M_2, M_3 — точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку M перпендикулярно к этим осям (рис. 179). Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. В самом деле, если точка M_1 лежит на положительной полуоси абсцисс, как на рисунке 179, то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если точка M_1 лежит на отрицательной полуоси абсцисс, то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если точка M_1 совпадает с точкой O, то $x = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Поэтому $x\vec{i} = \vec{0}$, и снова справедливо равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$.

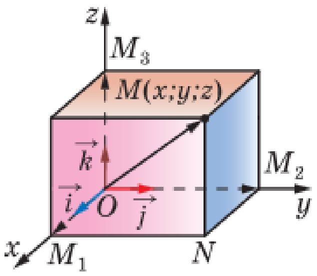


Рис. 179

Подставив эти выражения в равенство (1), получим $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Отсюда следует, что координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\ y;\ z\}$, т. е. координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, что и требовалось доказать.

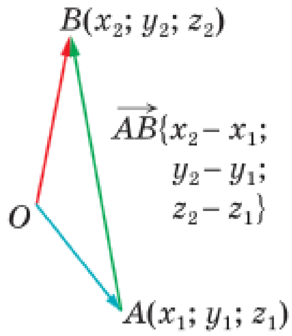


Рис. 180

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 180), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

Но координаты векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ совпадают с соответствующими координатами точек B и A: $\overrightarrow{OB}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, $\overrightarrow{OA}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$. **Итак, каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

Четвёртый вопрос: Простейшие задачи в координатах: расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

а) Координаты середины отрезка. В системе координат $Oxyz$ отметим точку A с координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и точку B с координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Выразим координаты $(x;\ y;\ z)$ середины C отрезка AB через координаты его концов (рис. 181). Так как точка C — середина данного отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (2)$$

(Это было доказано в курсе планиметрии.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам трёх точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\{x;\ y;\ z\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. Записав равенство (2) в координатах, получим

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

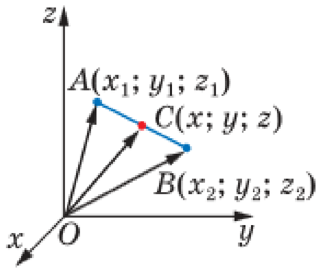


Рис. 181

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что длина вектора $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 182). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

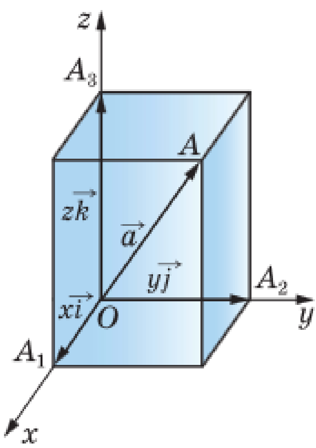


Рис. 182

В самом деле, если точка A не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 182), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2.$$

Во всех других случаях расположения точки A (точка A лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) Расстояние между двумя точками. Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1 с координатами $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и точку M_2 с координатами $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 183). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$. По формуле (3)

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Но $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$.

Таким образом, расстояние между точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

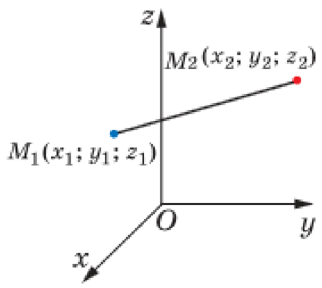


Рис. 183

Вопросы и задачи представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.160-171 (2019 год издания, глава VII), с.102-112 (2013-2014 годы издания, глава V).

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте,
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.