1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 3. Координаты и векторы

Тема № 3.2: «Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.»

<u>Лекционные занятия № 14-15</u>

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционные занятия № 14-15
по Теме № 3.2 «Векторы в пространстве. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.»

Цель занятий: изучить со студентами векторы в пространстве, угол между векторами, скалярное произведение векторов.

Виды занятий: классно-групповые, комбинированные (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятий: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 4 ч (2 занятия по 2 часа)

Основные вопросы:

1. Векторы в пространстве. Равенство векторов.
2. Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число.
3. Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам.
4. Координаты вектора.
5. Угол между векторами.
6. Скалярное произведение векторов в координатах.
7. Угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.
8. Уравнение плоскости.
9. Геометрический смысл определителя 2x2.

Литература:

1. [2 учебник раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия.10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – Москва: Просвещение, 2024.-287с., ISBN 978-5-09-112137-7. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408659, с. 142-144 (часть 1) с.145-159, 161-165, 171-179 (часть 2) (2019 год издания, главы VI, VII), с.84-101, 112-120 (2012-2014 годы издания, главы IV, V).

Примерный расчет времени (по каждому занятию):

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть (по каждому занятию):

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Векторы в пространстве. Равенство векторов.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.142-144 (часть 1), (**2019** год издания, **глава VI**), с.84-86, **§ 1, п.38-39** (**2012-2014** годы издания, глава **IV**).

Второй вопрос: <u>Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.145-150 (часть 2) **§ 2, п.65-66**, (**2019** год издания, **глава VI**), с.87-92, **§ 2, п.40-42** (**2012-2014** годы издания, глава **IV**).

Третий вопрос: <u>Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.150-159 (часть 2) **§ 3, п.68-70**, (**2019** год издания, **глава VI**), с.92-101, **§ 3, п.43-45** (**2012-2014** годы издания, глава **IV**).

Четвёртый вопрос: <u>Координаты вектора.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.161-166 (часть 2) **§ 1, п.72-74**, (**2019** год издания, **глава VII**), с.103-107, **§ 1, п.43-45** (**2012-2014** годы издания, глава **V**).

Пятый вопрос: <u>Угол между векторами.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.171 (часть 2) **§ 2, п.76**, (**2019** год издания, **глава VII**), с.112, **§ 2, п.50** (**2012-2014** годы издания, глава **V**).

Шестой вопрос: **<u>Скалярное произведение векторов в координатах.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.171-172 (часть 2) **§ 2, п.77**, (**2019** год издания, **глава VII**), с.112-113, **§ 2, п.51** (**2012-2014** годы издания, глава **V**).

Седьмой вопрос: **<u>Угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.173-174 (часть 2) **§ 2, п.78**, (**2019** год издания, **глава VII**), с.113-114, **§ 2, п.52** (**2012-2014** годы издания, глава **V**).

Восьмой вопрос: **<u>Уравнение плоскости.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.174-175 (часть 2) **§ 2, п.79**, (**2019** год издания, **глава VII**), с.115-116, **§ 2, п.53** (**2012-2014** годы издания, глава **V**).

Девятый вопрос: **<u>Геометрический смысл определителя 2х2.</u>**

Сведения по данному вопросу представлены во 2-м учебнике раздела «Дополнительной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины]: *Гусев, В. А.* Математика. Геометрия. Базовый уровень: 10—11 классы : учебник для среднего общего образования / В. А. Гусев, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 281 с. — (Общеобразовательный цикл). — ISBN 978-5-534-16085-7. — Текст : электронный// Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/544861 глава 3, с. 219.

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ — матрица размера 2 × 2. Ее *определитель* вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Определитель матрицы размера 3 × 3 вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\vec{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$ — векторы, заданные своими координатами в прямоугольной системе координат, и $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ — правая тройка. Тогда

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Если у вас есть векторы с координатами (Ax, Ay) и (Bx, By) , то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна определителю матрицы, столбцами которой являются эти векторы.

12.2. Геометрический смысл определителя второго порядка. Рассмотрим теперь специально два ненулевых плоских вектора

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y)\ , \qquad \boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y) \tag{3}$$

в некоторой прямоугольной системе координат $x,\ y$ (рис. 30, 31). Будем считать, что рассматриваемая плоскость находится в пространстве и добавим к осям $x,\ y$

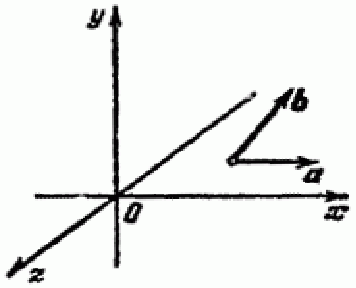


Рис. 30

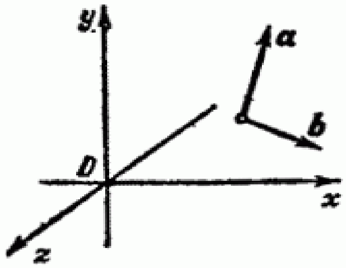


Рис. 31

перпендикулярную к ним ось z. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ будут теперь иметь координаты

$$\boldsymbol{a} = (a_x,\ a_y,\ 0), \qquad \boldsymbol{b} = (b_x,\ b_y,\ 0).$$

Векторное произведение их равно

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}, \tag{4}$$

нат $x,\ y,\ z$. Поэтому, очевидно, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} > 0,$$

то система векторов $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ должна быть ориентирована, как оси координат $(x,\ y)$. Если же определитель

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} < 0,$$

то система $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ ориентирована противоположно ориентации $x,\ y$. На рис. 30 изображена первая ситуация расположения векторов $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, а на рис. 31 — вторая. Мы знаем также, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна (см. (4))

$$S = |\boldsymbol{c}| = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|,$$

т. е. абсолютной величине определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Итак, мы доказали, что: 1) абсолютная величина определителя (5) равна площади параллелограмма, построенного на векторах $a = (a_x, a_y)$ и $b = (b_x, b_y)$; 2) знак определителя (5) зависит от расположения этих векторов относительно прямоугольной системы координат x, y. Знаку + соответствует система (a, b), ориентированная, как x, y, а знаку − соответствует система (a, b), ориентированная противоположным образом.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

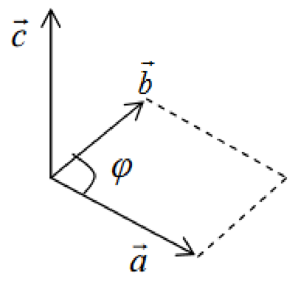
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$



Свойства векторного произведения векторов:

1) векторное произведение не коммутативно: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$$

6) *Геометрический смысл векторного произведения:* длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ (модуль векторного произведения) равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 8. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

Решение. $\vec{a}=(2, 5, 1)$; $\vec{b}=(1, 2, -3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

Пример 9. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

Решение. $\overrightarrow{AC}=(0-2;1-2;0-2)=(-2;-1;-2)$; $\overrightarrow{AB}=(4-2;0-2;3-2)=(2;-2;1)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$

$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}. \qquad S_{\Delta}=\frac{\sqrt{65}}{2}\,(\text{ед}^2).$$

Также сведения по данному вопросу представлены в приложении.

Заключительная часть (по каждому занятию).

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовку (домашнее задание):

1. Детально проработать, законспектировать материал занятия, размещенный в данном план-конспекте,
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.