В. Г. Автор. Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников

Векторы

Ошибка в тексте? Выдели ее мышкой! И нажми: Ctrl + Enter
Powered by Orphus Работает в IE и Avant

..Свойства определителя второго порядка

Мы уже упоминали, что предполагаем знакомство читателя с теорией определителей и теорией матриц. И если мы и собираемся остановиться на свойствах определителей второго порядка, то только для того, чтобы акцентировать внимание на их геометрическом смысле.

Прежде всего, обратимся снова к основной формуле $\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y - a_y b_x$ и дадим для нее чисто геометрический вывод.

Пусть $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{b}}$ – два произвольных вектора (рис. 27). Построим на них параллелограмм *OABC*.

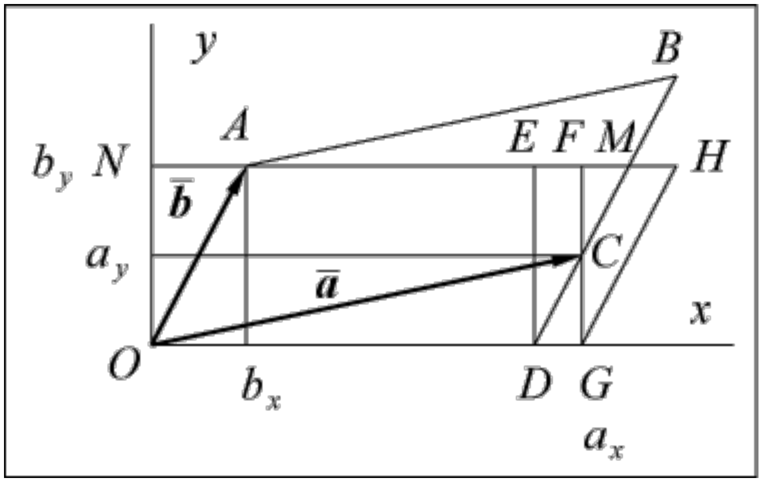

Рис. 27

Сторону параллелограмма *BC* продолжим до пересечения с осью *x* в точке *D*. Очевидно, что площади параллелограммов *OABC* и *OAMD* совпадают. Также очевидно, что площадь параллелограмма *OAMD* совпадает с площадью прямоугольника *ONED*. Площадь же прямоугольника *ONED*, в свою очередь, равна площади прямоугольника *ONFG*, за вычетом площади прямоугольника *EFGD*. Следовательно, $S_{OABC} = S_{ONFG} - S_{EFGD}$. Но $S_{ONFG} = a_x b_y$. Осталось найти площадь прямоугольника *EFGD.* Высота этого прямоугольника равна b_y, а ширина – *DG*, которая, в свою очередь, равна *MH*. Для того, чтобы найти длину отрезка *MH*, рассмотрим треугольники *GFH* и *CFM*. Эти треугольники подобные, и, следовательно, $\dfrac{GC}{GF} = \dfrac{MH}{FH}$ или $\dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{DG}{b_x}$ и $DG = \dfrac{a_y b_x}{b_y}$. Теперь можно найти площадь прямоугольника *EFGD*: $S_{EFGD} = \dfrac{a_y b_x}{b_y} b_y = a_y b_x$. Откуда и следует искомая формула:

$$S_{OABC} = S_{ONFG} - S_{EFGD} = a_x b_y - a_y b_x .$$

Все свойства определителя второго порядка непосредственно вытекают из этой формулы, которая может рассматриваться в качестве его определения, – приведем ее еще раз:

$$\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}) = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \Delta(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}) = |\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}| .$$

Свойства

1. При умножении элементов любого столбца определителя на число α, его величина умножается на это же число.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_x & b_x \\ \alpha a_y & b_y \end{vmatrix} = (\alpha a_x) b_y - (\alpha a_y) b_x = \alpha (a_x b_y - a_y b_x) = \alpha \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}.$$

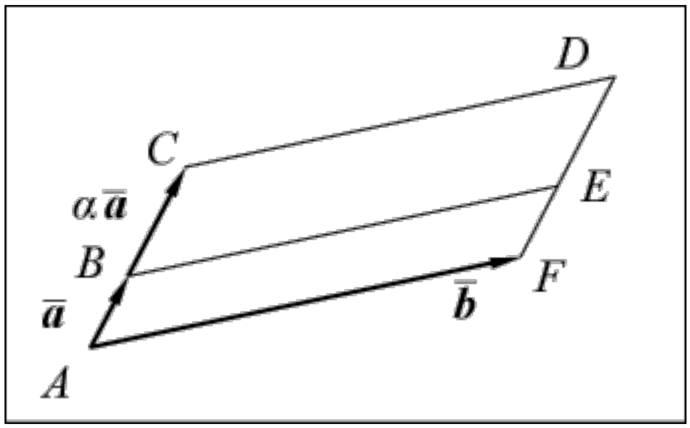

Рис. 28

Геометрически это означает, что если мы увеличим одну из сторон параллелограмма в α раз, то и площадь его увеличится во столько же раз (рис. 28).

2. Если один из столбцов определителя $|\bar{a}, \bar{b}|$ может быть представлен в виде суммы столбцов $|\bar{a}, \bar{b}| = |\bar{a}' + \bar{a}'', \bar{b}|$, то определитель $|\bar{a}, \bar{b}|$ равен сумме определителей $|\bar{a}', \bar{b}|$ и $|\bar{a}'', \bar{b}|$:

$$|\bar{a}, \bar{b}| = |\bar{a}' + \bar{a}'', \bar{b}| = |\bar{a}', \bar{b}| + |\bar{a}'', \bar{b}|.$$

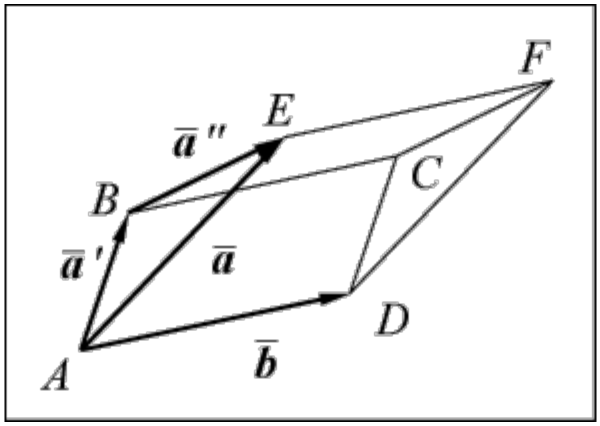

Рис. 29

Геометрическая иллюстрация этого свойства представлена на рис. 29. Площадь параллелограмма *AEFD* равна сумме площадей параллелограммов *ABCD* и *BEFC*.

3. При перестановке строк определитель изменяет знак на противоположный.

$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_y & a_y \end{vmatrix}$, конечно, ведь при этом изменяется ориентация, задаваемая векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

4. Если один из столбцов определителя равен нулю, то и определитель равен нулю. Это свойство очевидно.

5. Если к одному из столбцов определителя прибавить другой, умноженный на произвольное число, то величина определителя не изменится: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x + \alpha a_x \\ a_y & b_y + \alpha a_y \end{vmatrix}$. Это свойство мы уже неоднократно использовали. Формальное доказательство может быть получено на основе определения.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x + \alpha a_x \\ a_y & b_y + \alpha a_y \end{vmatrix} = a_x(b_y + \alpha a_y) - a_y(b_x + \alpha a_x) =$$

$$= a_x b_y - a_y b_x + a_x \alpha a_y - a_y \alpha a_x = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}.$$

6. Определитель с одинаковыми строками равен нулю.

Геометрический смысл этого свойства очевиден: "площадь" параллелограмма, построенного на двух параллельных векторах, равна нулю.

7. Определитель с пропорциональными строками равен нулю. Следует из свойства 6 и 1.

8. Определитель единичной матрицы равен единице.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

9. Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a_x b_y .$$

10. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x - \dfrac{b_x}{a_x} a_x \\ 0 & b_y - \dfrac{b_x}{a_x} 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & 0 \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y .$$

Можно показать то же самое проще: $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - 0 \cdot b_x = a_x b_y$.

11. Если в определителе строки поменять местами со столбцами, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} .$$

Это мало примечательный в геометрическом отношении факт, имеющий важное алгебраическое следствие: координаты векторов можно вставлять в определитель, как в качестве столбцов, так и в качестве строк. Свойства определителя симметричны по отношению к столбцам и строкам – все, что сказано в отношении столбцов, в равной мере относится и к строкам.

..Задачи на применение определителей

Задачи, которые мы собираемся решить, являются полезными теоремами элементарной геометрии.

1. Доказать, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

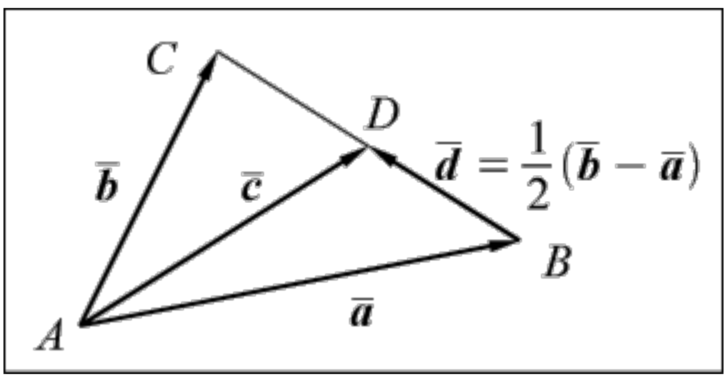

Рис. 30

Доказательство.

$\overline{c} = \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}) + \overline{a} = \frac{1}{2}(\overline{b} + \overline{a})$;

$S_{ABD} = |\overline{S}(\overline{a}, \overline{c})| = \begin{vmatrix} a_x & \frac{1}{2}a_x + \frac{1}{2}b_x \\ a_y & \frac{1}{2}a_y + \frac{1}{2}b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$;

$$S_{ADC} = |\overline{S}(\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{b}})| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}a_x + \frac{1}{2}b_x & b_x \\ \frac{1}{2}a_y + \frac{1}{2}b_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

и, следовательно, $S_{ABD} = S_{ADC}$.

2. Теорема о площадях треугольников, имеющих равные углы.

Если угол одного треугольника равен углу другого, то площади их относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

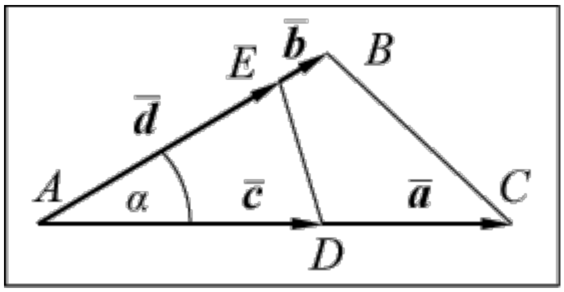

Рис. 31

Пусть треугольники *ABC* и *AED* имеют равные углы. Совместим стороны, заключающие эти углы (рис. 31). Проведем векторы

$\overline{\boldsymbol{a}} = \overline{AC}$, $\overline{\boldsymbol{b}} = \overline{AB}$, $\overline{\boldsymbol{c}} = \overline{AD}$, $\overline{\boldsymbol{d}} = \overline{AE}$. Так как векторы $\overline{\boldsymbol{a}}$ и $\overline{\boldsymbol{c}}$ лежат на одной прямой, то $\overline{\boldsymbol{c}} = \frac{c}{a}\overline{\boldsymbol{a}}$, где $c = |\overline{\boldsymbol{c}}|$ и $a = |\overline{\boldsymbol{a}}|$.

Аналогично $\overline{\boldsymbol{d}} = \frac{d}{b}\overline{\boldsymbol{b}}$.

$$\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

$$\overline{S}(\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{d}}) = \begin{vmatrix} \frac{c}{a}a_x & \frac{d}{b}b_x \\ \frac{c}{a}a_y & \frac{d}{b}b_y \end{vmatrix} = \frac{c}{a}\frac{d}{b}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \frac{cd}{ab}\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}).$$

Следовательно, $\dfrac{\overline{S}(\overline{\boldsymbol{c}},\overline{\boldsymbol{d}})}{\overline{S}(\overline{\boldsymbol{a}},\overline{\boldsymbol{b}})}=\dfrac{cd}{ab}$ => $\dfrac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\dfrac{|AE||AD|}{|AB||AC|}$.

3. Теорема о биссектрисе.

Биссектриса делит противоположную сторону треугольника на части в отношении, равном отношению сторон, прилежащих к этим частям.

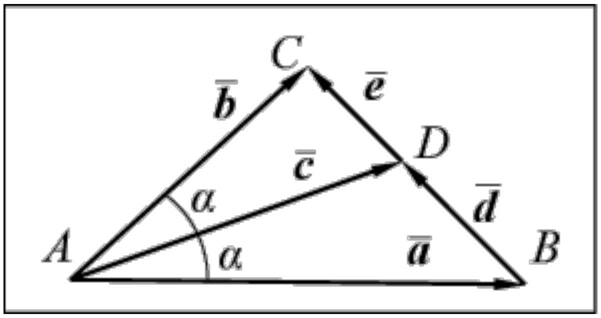

Рис. 32

Применяя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы, сразу получаем: $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\dfrac{ac}{cb}=\dfrac{a}{b}$.

Далее: $\overline{\boldsymbol{c}}=\overline{\boldsymbol{a}}+\dfrac{d}{d+e}(\overline{\boldsymbol{b}}-\overline{\boldsymbol{a}})=$

$$=\overline{\boldsymbol{a}}+\frac{d}{d+e}\overline{\boldsymbol{b}}-\frac{d}{d+e}\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{e}{d+e}\overline{\boldsymbol{a}}+\frac{d}{d+e}\overline{\boldsymbol{b}}.$$

Далее: $S_{ABD}=\begin{vmatrix} a_x & \dfrac{e}{d+e}a_x+\dfrac{d}{d+e}b_x \\ a_y & \dfrac{e}{d+e}a_y+\dfrac{d}{d+e}b_y \end{vmatrix}=\dfrac{d}{d+e}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$;

$$S_{ADC}=\begin{vmatrix} \dfrac{e}{d+e}a_x+\dfrac{d}{d+e}b_x & b_x \\ \dfrac{e}{d+e}a_x+\dfrac{d}{d+e}b_y & b_y \end{vmatrix}=\frac{e}{d+e}\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix},$$

и, следовательно, $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\dfrac{d}{e}$.

Сопоставляя последнее отношение с первым, получаем:
$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{d}{e} = \frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

Этой традиционной фразой мы и закончим разговор о площадях и определителях второго порядка. Хотя, если честно, то нам гораздо более хотелось, если не доказать, то показать полезность применения определителей при решении чисто геометрических задач.

Настало время переходить к пространству с тремя измерениями.

К оглавлению

UCOZ SERVICES