А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

ФГОС

Геометрия
8 класс

Учебник
для общеобразовательных организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

4-е издание

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2019

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
А46

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/577 от 14.10.2011 г.), **педагогической** (заключения РАО № 302 от 29.01.2014 г. и № 098 от 05.02.2015 г.) и **общественной** (заключения РКС № 325 от 07.02.2014 г. и № 755 от 20.03.2015 г.) экспертиз.

Авторы:
А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

Условные обозначения

▲▼ — начало и конец дополнительного материала внутри пункта

□ ■ — начало и конец доказательства

★ ★ — начало и конец материала повышенной трудности, необязательного для всех

Александров А. Д.
А46 Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2019. — 176 с. : ил. — ISBN 978-5-09-069699-9.

Учебник является второй частью трёхлетнего курса геометрии для общеобразовательных школ. Учебник написан в соответствии с требованиями ФГОС. В текстах имеются справки словесника с переводами и пояснениями геометрических терминов, комментарии с интересными фактами. Задачный материал разнообразен и представлен в рубриках по видам деятельности, позволяющим формировать познавательные универсальные учебные действия. После каждой главы предлагаются задачи на повторение и задачи под рубрикой «Применяем компьютер», рассчитанные на работу с компьютерной средой *Живая математика*.

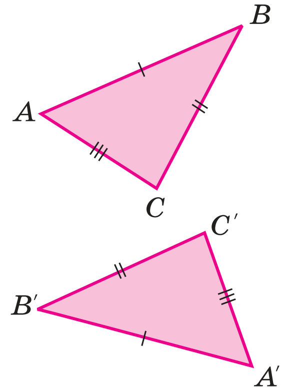
УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-069699-9

Оглавление

Введение
Повторение

Повторим важнейшие результаты, с которыми вы знакомились в 7 классе и на которые опирается курс 8 класса. Они относятся к треугольникам и к параллельности прямых.



Если $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ и $B'C' = BC$, то $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 1

1. Треугольники

Равенство треугольников можно определить поразному. Проще всего определить равные треугольники как треугольники, у которых соответственные стороны равны (рис. 1). Конечно, у равных треугольников равны и все другие соответственные элементы. В частности, **соответственные углы равных треугольников равны** (рис. 2).

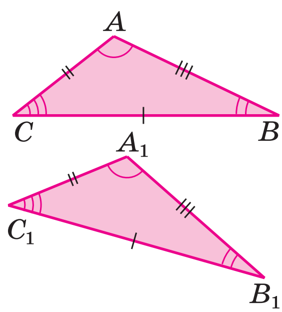
Устанавливают равенство треугольников не только по равенству их сторон, но и по признакам равенства треугольников.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *равенства треугольников.* **Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. 3).

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *равенства треугольников.* **Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. 4).

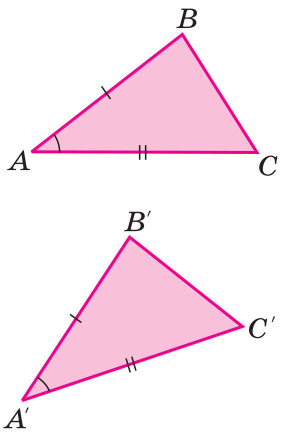
Доказывая равенство двух треугольников, можно говорить, что «треугольники равны по трём сторонам (или ... по двум сторонам и углу между ними, или ... по стороне и двум прилежащим к ней углам)».

Признаки равенства треугольников позволяют доказать *теорему о внешнем угле.* **Внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника** (сделайте рисунок).



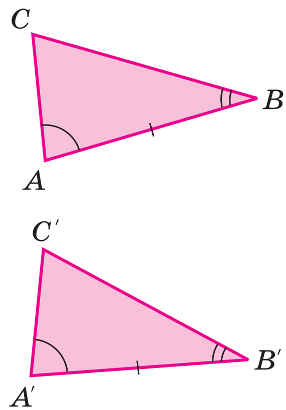
Если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Рис. 2



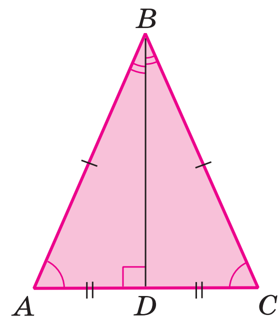
Если $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ *и* $\angle A' = \angle A$, *то* $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 3



Если $A'B' = AB$, $\angle A' = \angle A$ *и* $\angle B' = \angle B$, *то* $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 4



1) *Если* $AB = BC$, *то* $\angle A = \angle C$.
2) *Если* $AB = BC$ *и* $AD = DC$, *то* $\angle ABD = \angle CBD$ *и* $BD \perp AC$.

Рис. 5

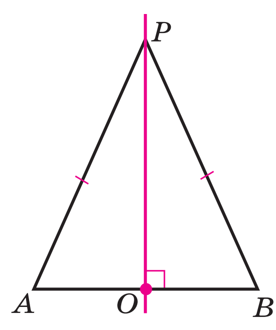
Напомним теоремы о равнобедренном треугольнике.

Теорема (*о свойствах равнобедренного треугольника*). **В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведённая к его основанию, является биссектрисой и высотой** (рис. 5).

Из теоремы о свойствах равнобедренного треугольника следует характерное свойство точек серединного перпендикуляра:

ХАРАКТЕРНОЕ СВОЙСТВО *точек серединного перпендикуляра*. **Точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на его серединном перпендикуляре.**

Напомним, что **характерным** (или **характеристическим**) **свойством** некоторой фигуры называется такое её свойство, которое является также признаком этой фигуры. Словесный оборот *тогда и только тогда* употребляют, объединяя в одном утверждении два **взаимно обратных утверждения.** Например, в утверждении о характерном свойстве точек серединного перпендикуляра объединены два следующих взаимно обратных утверждения:

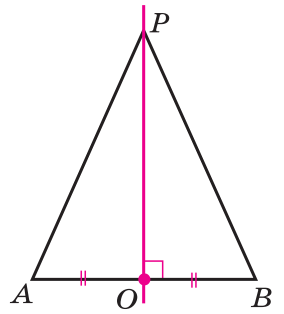


Если $PA = PB$ *и* $PO \perp AB$, *то* $AO = OB$.

Рис. 6

ПРИЗНАК *серединного перпендикуляра*. **Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка** (рис. 6).

СВОЙСТВО *серединного перпендикуляра*. **Если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от его концов** (рис. 7).



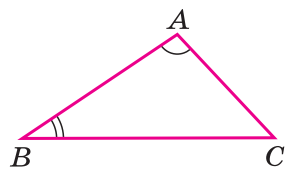
Если $PO \perp AB$ *и* $AO = OB$, *то* $PA = PB$.

Рис. 7

Условие и заключение теоремы, связанные оборотом *тогда и только тогда*, равноправны, или, как говорят в математике, **равносильны.**

Два взаимно-обратных утверждения содержатся и в

Теореме (*о сравнении сторон и углов треугольника*). **В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол,** и обратно: **2) против большего угла лежит бо́льшая сторона** (рис. 8).

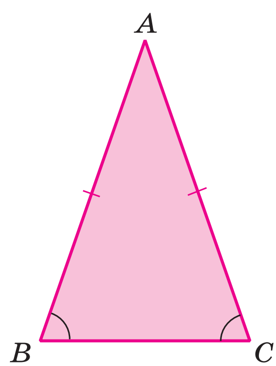


1) *Если* $BC > AC$, *то* $\angle A > \angle B$.
2) *Если* $\angle A > \angle B$, *то* $BC > AC$.

Рис. 8

Следствием этой теоремы является

ПРИЗНАК *равнобедренного треугольника*. **Если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный** (рис. 9).



Если $\angle B = \angle C$, *то* $AB = AC$.

Рис. 9

Тем самым равенство двух углов треугольника является характерным свойством равнобедренного треугольника.

Опираясь на теорему о сравнении сторон и углов треугольника, можно доказать *неравенство треугольника*: **сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.**

После изучения параллельности прямых была доказана

Теорема (*о сумме углов треугольника*).

Сумма углов треугольника равна 180°.

Отметим два важных следствия этой теоремы:

Теорема (*о сумме углов четырёхугольника*). **Сумма углов четырёхугольника равна 360°.**

ПРИЗНАК *прямоугольника*. **Четырёхугольник, у которого три прямых угла, является прямоугольником.**

Вопросы для самоконтроля

1. Как можно установить равенство двух треугольников?
2. Какие вы знаете свойства равнобедренного треугольника?
3. Какой признак равнобедренного треугольника вы знаете?
4. Что вы знаете о свойстве точек серединного перпендикуляра отрезка?
5. Чему равна сумма углов треугольника?
6. Что вы знаете о внешнем угле треугольника?
7. Чему равна сумма углов четырёхугольника?
8. Какой признак прямоугольника вы знаете?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1. Дайте развёрнутые формулировки и докажите следующие *признаки равенства прямоугольных треугольников*: а) по двум катетам; б) по гипотенузе и острому углу; в) по катету и прилежащему острому углу; г) по катету и противолежащему острому углу; д) по катету и гипотенузе.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является его медианой и высотой. Докажите.

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является его медианой и биссектрисой. Докажите.

4. Треугольник является равнобедренным, если в нём совпадают: а) высота и медиана; б) высота и биссектриса. Докажите.

5. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Докажите.

6. Если AB — диаметр окружности, а C — некоторая точка окружности (отличная от A и B), то треугольник ABC прямоугольный. Докажите.

7. Докажите характерное свойство биссектрисы: точка внутри угла принадлежит биссектрисе угла тогда и только тогда, когда она равноудалена от сторон угла. (Напомним, что расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра из этой точки на данную прямую.)

Разбираемся в решении

8. Из пяти признаков прямоугольных треугольников, перечисленных в задаче 1, докажем последний.

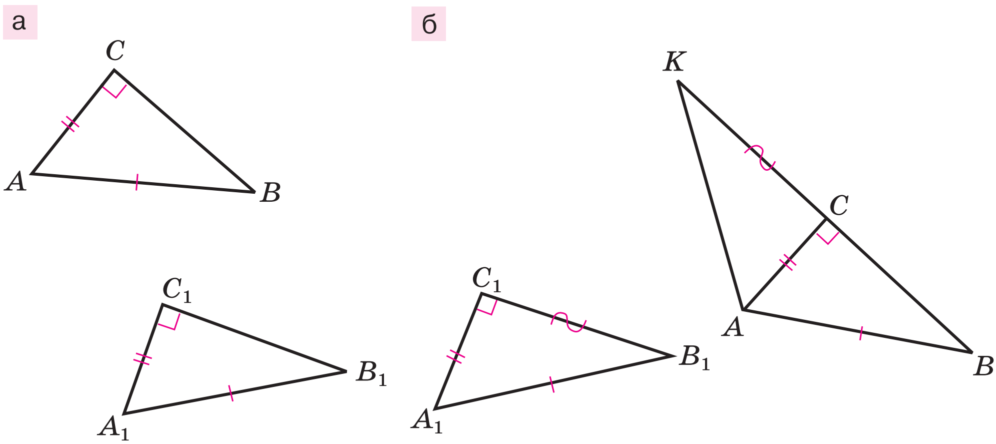


Рис. 10

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 10, *а*).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. На луче, дополнительном к лучу CB, отложим отрезок $CK = B_1C_1$ и построим треугольник ACK (рис. 10, *б*). Так как $AC = A_1C_1$ и $CK = B_1C_1$, то $\triangle AKC = \triangle A_1B_1C_1$ (по двум катетам). Следовательно, $AK = A_1B_1$. Поскольку $AB = A_1B_1$, то $AK = AB$, треугольник ABK равнобедренный и $\angle K = \angle B$. А тогда прямоугольные треугольники ABC и AKC равны (по гипотенузе и острому углу). Так как $\triangle AKC = \triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle AKC = \triangle ABC$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

Смотрим

9. На рисунке 11 укажите равные друг другу треугольники.

10. На рисунке 12 укажите равные друг другу прямоугольные треугольники.

11. На рисунке 13 найдите равные друг другу углы.

12. На рисунке 14 укажите равнобедренные треугольники. Какие из них являются равносторонними? (На рисунке из пункта *ж* изображён куб.)

13. Вычислите величины углов, обозначенных буквой x на рисунке 15.

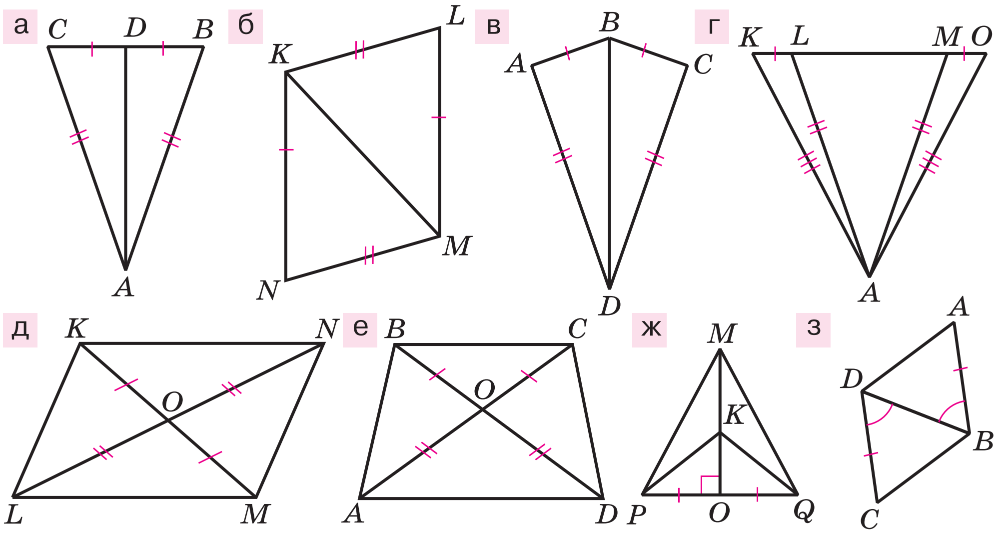


Рис. 11

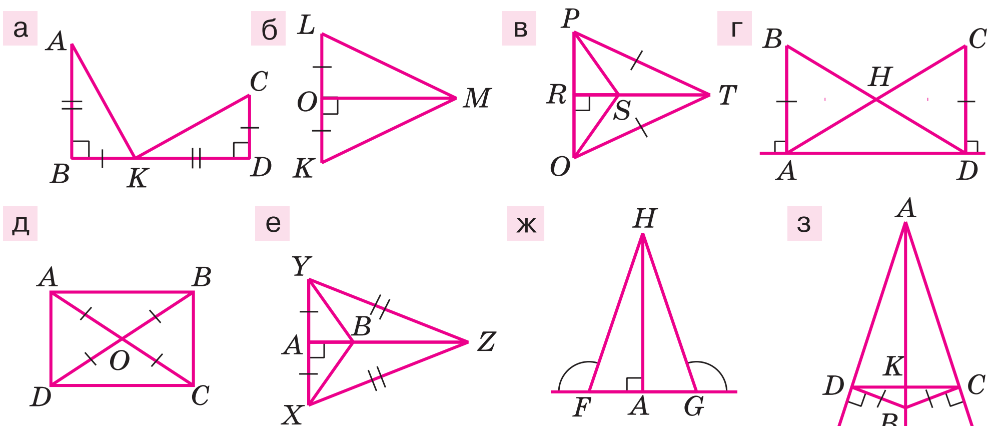


Рис. 12

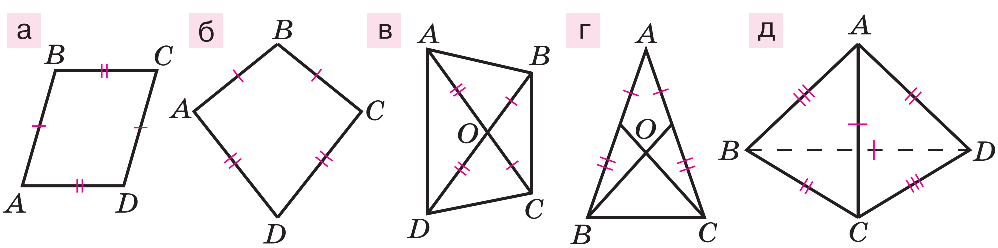


Рис. 13

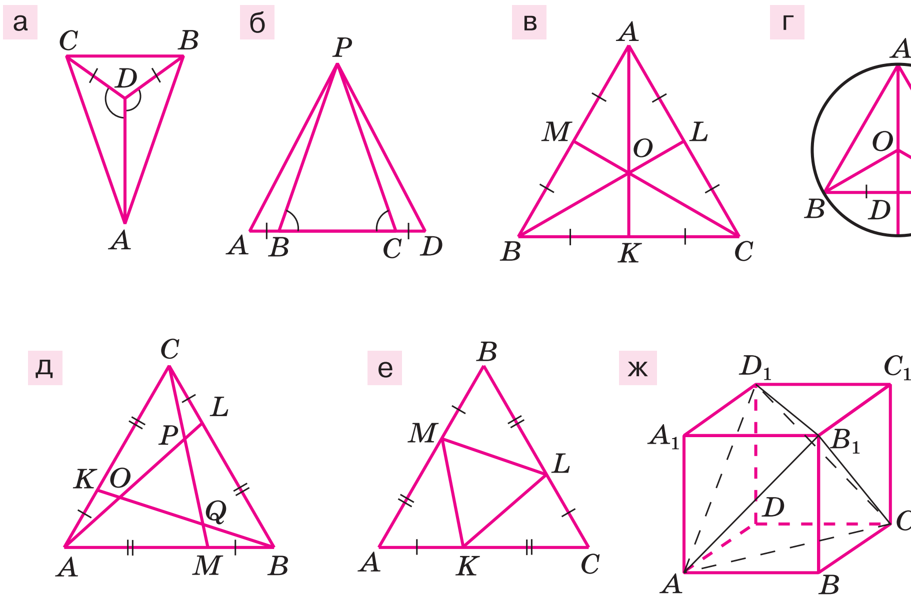

а
C B D A
б
P A B C D
в
A M L O B K C
г
A O B D C
д
C L P K O Q A M B
е
B M L A K C
ж
D_1 C_1 A_1 B_1 D C A B

Рис. 14

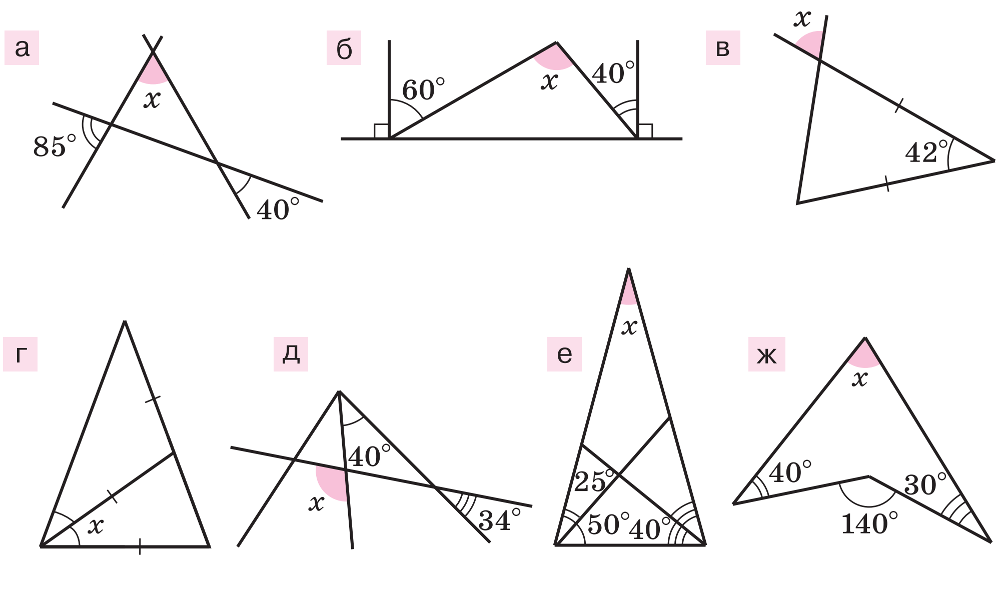

а
x 85° 40°
б
60° x 40°
в
x 42°
г
x
д
40° x 34°
е
x 25° 50° 40°
ж
x 40° 30° 140°

Рис. 15

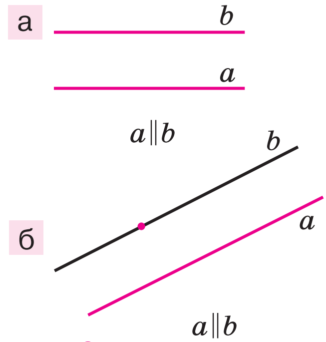


Рис. 16

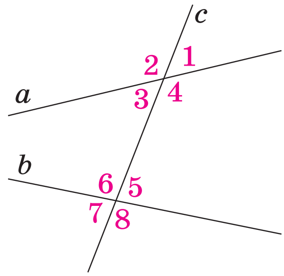


Рис. 17

2. Параллельность

Напомним, что две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 16, *а*). **Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит лишь одна прямая, параллельная данной прямой** (рис. 16, *б*).

Параллельность двух прямых распознают по углам, которые они образуют с пересекающей их третьей прямой (рис. 17). Напомним, как называются углы, входящие в пары этих углов.

Углы 4 и 5 (а также углы 3 и 6) называются **внутренними односторонними**. Углы 3 и 5 (а также углы 4 и 6) называются **внутренними накрест лежащими**. Углы в парах 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**.

Перечислим

ПРИЗНАКИ *параллельности прямых*:

1) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что сумма двух внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *а*).

2) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что соответственные углы равны, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *б*).

3) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что накрест лежа-

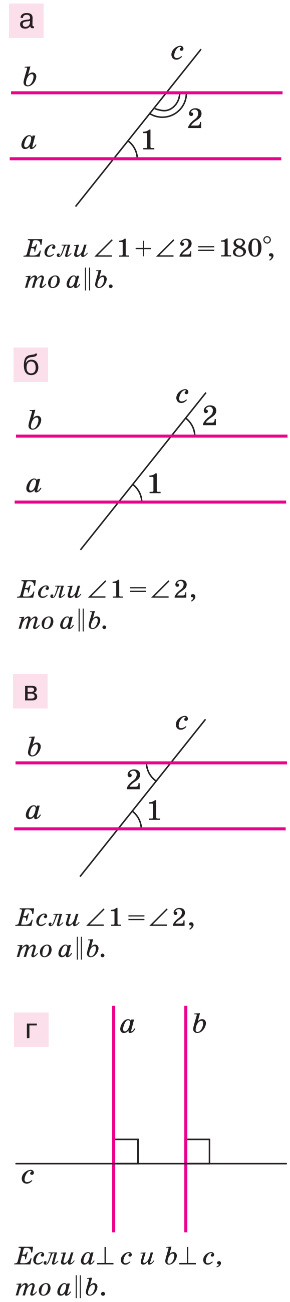


Рис. 18

щие углы равны, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *в*).

Частным случаем каждого из этих трёх признаков параллельности является утверждение о *параллельности перпендикуляров на плоскости*:

на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны (рис. 18, *г*).

Утверждения, обратные признакам параллельности прямых, говорят о *свойствах углов, образованных параллельными и секущей*:

СВОЙСТВО 1. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то сумма образованных ими внутренних односторонних углов равна 180° (рис. 19, *а*).

СВОЙСТВО 2. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими соответственные углы равны (рис. 19, *б*).

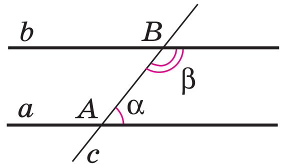
СВОЙСТВО 3. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны (рис. 19, *в*).

Частным случаем каждого из этих свойств является следующее утверждение: **прямая, пересекающая параллельные прямые и перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и другой из них** (рис. 19, *г*).

Вопросы для самоконтроля

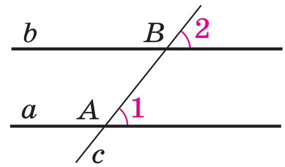
1. Какие прямые называются параллельными?
2. Как называются различные пары углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей прямой?
3. Какие признаки параллельности двух прямых вы знаете?
4. Какими свойствами обладают различные пары углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой?

а



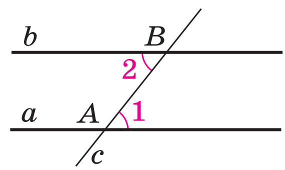
Если $a \parallel b$, *то* $\alpha + \beta = 180°$.

б



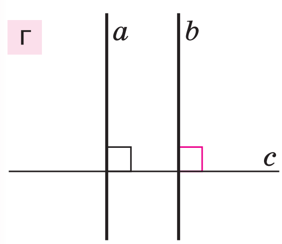
Если $a \parallel b$, *то* $\angle 1 = \angle 2$.

в



Если $a \parallel b$, *то* $\angle 1 = \angle 2$.

г



Если $a \parallel b$ *и* $c \perp a$, *то* $c \perp b$.

Рис. 19

3. Множество (геометрическое место) точек.

Пусть фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат этой фигуре, а какие не принадлежат. Тогда про эту фигуру говорят, что она является **множеством точек, обладающих данным свойством** (или **геометрическим местом точек, обладающих данным свойством**).

Например, окружность — это множество точек на плоскости, удалённых от данной точки плоскости (центра окружности) на данное расстояние (радиус окружности). А сфера — это множество точек в пространстве, удалённых от данной точки (центра сферы) на данное расстояние (радиус сферы). Геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от двух точек A и B, — это серединный перпендикуляр отрезка AB (см. рис. 6 и 7). Докажем, что **геометрическое место точек, принадлежащих некоторому углу и равноудалённых от сторон этого угла, — это биссектриса этого угла.**

□ Пусть точка X принадлежит биссектрисе угла A (рис. 20). Опустим из точки X перпендикуляры XB и XC на стороны угла A. В прямоугольных треугольниках AXB и AXC общая гипотенуза AX и равные острые углы A. Следовательно, $\triangle AXB = \triangle AXC$, а потому $XB = XC$. Итак, любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Докажем обратное утверждение.

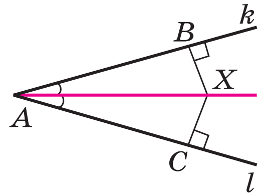


Рис. 20

Пусть точка X угла A равноудалена от сторон этого угла. Тогда равны друг другу перпендикуляры XB и XC, опущенные из точки X на стороны угла A: $XB = XC$ (рис. 21). В прямоугольных треугольниках AXB и AXC общая гипотенуза AX и равные катеты XB и XC. Поэтому эти треугольники равны (см. решение задачи 8 п. 1). Следовательно, равны их острые углы A, т. е. луч AX — биссектриса угла A. ■

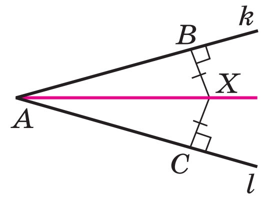


Рис. 21

Чтобы установить, что некоторая фигура F является множеством точек, имеющих некоторое характерное свойство, надо доказать два взаимно обратных утверждения: во-первых, доказать, что каждая точка фигуры F обладает этим свойством, и, во-вторых, доказать, что каждая точка, обладающая таким свойством, принадлежит фигуре F.

Термин *множество* имеет общематематический характер: говорят о множестве чисел, о множестве функций, о множестве фигур и т. п. А понятие *геометрическое место точек* вы можете встретить лишь в пособиях по геометрии.

Если точка X принадлежит множеству F, то пишут $X \in F$.

Анализируя задачи на построение, рассмотренные в 7 классе (например, решение задачи о построении треугольника по трём сторонам), мы убеждаемся, что их решения сводятся к построениям искомых точек как точек пересечения некоторых геометрических мест. В этом суть *метода геометрических мест*. Проиллюстрируем его решением такой задачи.

Задача. Построить точку, равноудалённую от вершин данного треугольника ABC.

Решение. Все точки, равноудалённые от вершин A и B, лежат на серединном перпендикуляре F_1 отрезка AB (рис. 22). Все точки, равноудалённые от вершин A и C, лежат на серединном перпендикуляре F_2 отрезка AC (рис. 23). Точка O, равноудалённая от всех вершин треугольника ABC — это точка пересечения перпендикуляров F_1 и F_2. ■

Решите методом геометрических мест такую *задачу*: построить точку, равноудалённую от всех сторон данного треугольника.

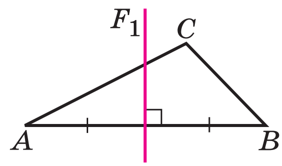


Рис. 22

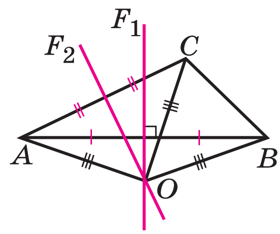


Рис. 23

Вопросы для самоконтроля

1. Как установить, что некоторая фигура является геометрическим местом точек, обладающих некоторым характерным свойством?
2. Перечислите известные вам геометрические места точек. Какими характерными свойствами они задаются?
3. В чём суть метода геометрических мест?

ЗАДАЧИ

Рисуем

14. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте множество точек этого квадрата, равноудалённых от вершин: а) A и B; б) A и C.

Строим

15. Постройте треугольник: а) по стороне, высоте и медиане; б) по стороне, прилежащему к ней углу, и медиане, проведённой к этой стороне.

16. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведённой к этому катету.

Глава I

Площади многоугольных фигур

Площадь — одно из важнейших понятий геометрии. С измерения площадей в древности и начиналась геометрия. Самая знаменитая (и самая важная) теорема геометрии — теорема Пифагора — это тоже теорема о площадях. Измерением площадей многоугольных фигур мы займёмся в этой главе.

§ 1. Многоугольники

1.1. Ломаные и многоугольники

Ломаной линией, или, короче, ломаной, называется фигура, состоящая из отрезков (рис. 24). Эти отрезки следуют друг за другом: один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т. д. При этом соседние отрезки не лежат на одной прямой. Ломаную обозначают (и называют) по последовательным концам её отрезков. Так, на рисунке 24, *а* изображена ломаная $ABCDEFG$. Отрезки, составляющие ломаную, называются её **звеньями**.

Концы ломаной могут совпадать. Тогда ломаная называется **замкнутой** (рис. 24, *б*, *в*). Ломаная может пересекать сама себя, как на рисунке 24, *г*, коснуться сама себя, как на рисунке 24, *д*, а

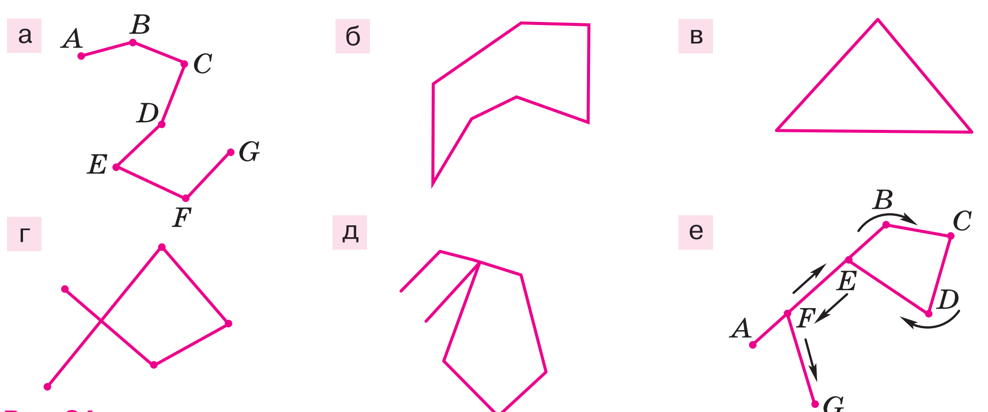


Рис. 24

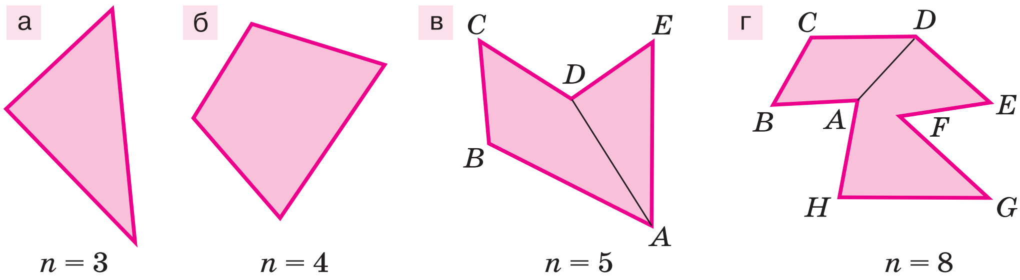


Рис. 25

также налегать на себя, как на рисунке 24, *е*. Если таких особенностей у ломаной нет, то она называется **простой** (рис. 24, *а—в*).

Простая замкнутая ломаная вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею, называется **многоугольником** (рис. 25). Сама ломаная называется **границей** этого **многоугольника**, составляющие её отрезки — его **сторонами**, а концы этих отрезков — его **вершинами**.

В каждой вершине многоугольника его стороны задают некоторый **угол многоугольника.** Он может быть как меньше развёрнутого (рис. 26, *а*), так и больше развёрнутого (рис. 26, *б*).

Число сторон многоугольника равно числу его вершин, т. е. числу его углов. Многоугольник называют по числу его углов: треугольник, четырехугольник и т. д. Когда число углов равно n, то говорят «n-угольник» (читается «эн-угольник»). Стороны и углы многоугольника называют его **элементами**.

О точках многоугольника, не лежащих на его границе, говорят, что они лежат **внутри многоугольника.** Например, точка M на рисунке 26, *б* лежит внутри многоугольника.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины (например, отрезок AD на рисунке 25).

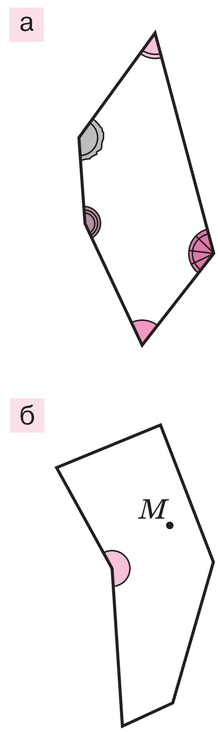


Рис. 26

Вопросы для самоконтроля

1. Как строят ломаную? Что такое замкнутая ломаная? простая ломаная?
2. Что такое многоугольник? Назовите элементы многоугольника.

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.1. На рисунке 27 изображены различные ломаные. Назовите их. Назовите простые ломаные, замкнутые ломаные.

1.2. На рисунке 28 изображены ломаные, расположенные на поверхности куба. Какие из этих ломаных являются плоскими, а какие — неплоскими?

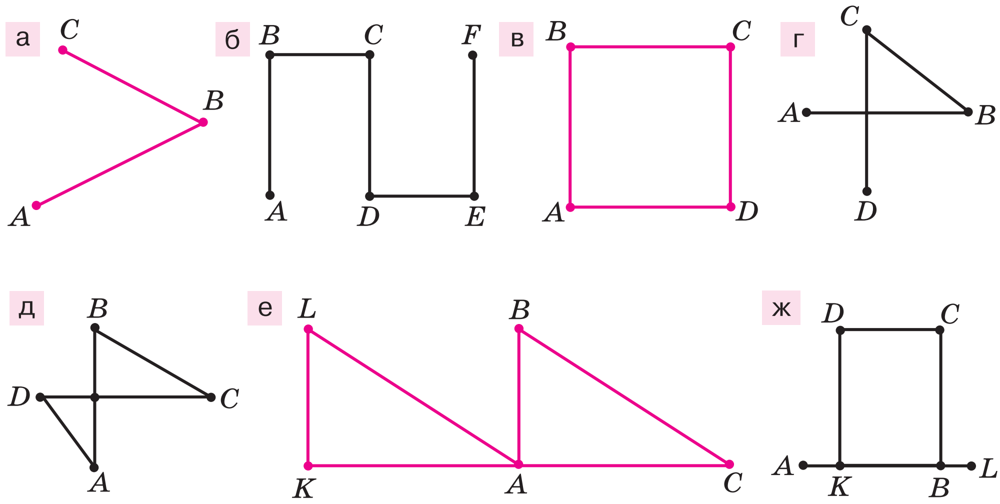


Рис. 27

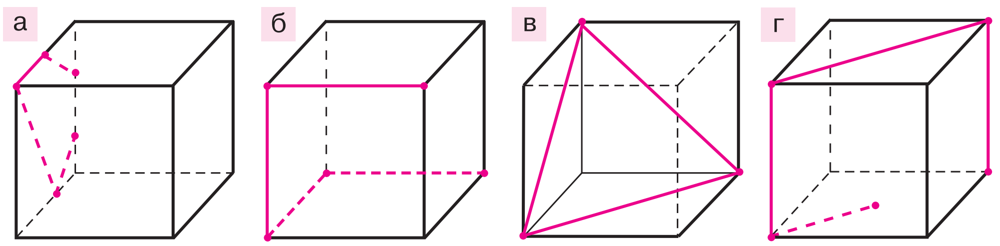


Рис. 28

Рисуем

1.3. Нарисуйте ломаные с такими названиями: а) AKM; б) $BCDB$; в) $ABCADB$.

1.4. а) Нарисуйте произвольный треугольник ABC. Продолжите его сторону AB за точку B, сторону BC за точку C, сторону CA за точку A. Полученные концы отрезков соедините между собой. Какая получилась фигура? б) Снова нарисуйте треугольник. Теперь каждую сторону продолжите за оба конца. Полученные концы отрезков соедините последовательно без самопересечений отрезками. Какая фигура получилась теперь?

1.5. Нарисуйте пятиугольник, все диагонали которого лежат внутри этого пятиугольника. Проведите все его диагонали и выделите цветом получившуюся пятиконечную звезду.

1.6. Снова нарисуйте пятиугольник, внутри которого лежат все его диагонали. Разбейте его на треугольники такими способами: а) соединив одну из вершин диагоналями со всеми остальными; б) соединив точку внутри одной из сторон отрезками со всеми вершинами; в) соединив внутреннюю точку пятиугольника отрезками со всеми вершинами. Сколько получилось треугольников в каждом случае?

1.7. Нарисуйте виды спереди, слева и сверху ломаных, изображённых на рисунке 28.

Представляем

1.8. а) План крепости имеет вид треугольника. Внутри её требуется установить прожектор так, чтобы им можно было осветить все стены. Где установить прожектор? б) Где установить прожектор, которым надо осветить все стены, если план крепости имеет вид четырёхугольника? в) Нарисуйте план крепости такой формы, которую нельзя осветить изнутри одним прожектором.

1.9. а) По рёбрам куба идёт простая четырёхзвенная ломаная. Спереди она выглядит так, как на рисунке 29. Нарисуйте куб и на

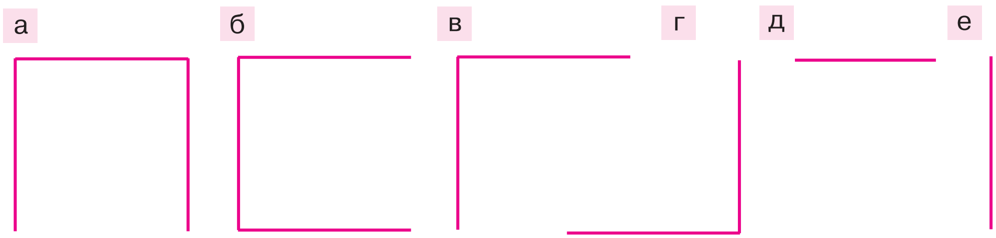


Рис. 29

его поверхности нарисуйте такую ломаную. б) Пусть теперь по рёбрам куба идёт простая пятизвенная ломаная. Может ли она спереди выглядеть так, как на рисунке 29?

1.2. Выпуклые и невыпуклые многоугольники

Из всех многоугольников самые важные — выпуклые. **Многоугольник** называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону (рис. 30). Таким образом, выпуклый многоугольник лежит в одной из двух полуплоскостей, ограниченных этими прямыми.

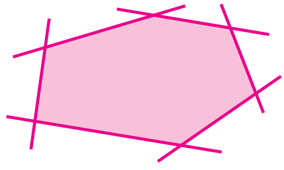


Рис. 30

Каждый треугольник является выпуклым многоугольником (рис. 31). Но, например, для четырехугольников это уже не всегда так (рис. 32). Многоугольники, которые не являются выпуклыми, так и называются — невыпуклые многоугольники.

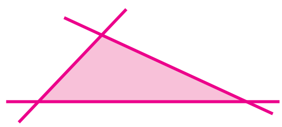


Рис. 31

Выпуклые многоугольники обладают многими интересными свойствами. Эти свойства составляют целый раздел современной геометрии. До сих пор находят новые свойства выпуклых многоугольников. Укажем два наглядно очевидных свойства выпуклых многоугольников.

СВОЙСТВО 1. **Выпуклый многоугольник можно вырезать из плоскости, разрезая её по прямым** (как из листа бумаги, разрезая его до краёв, рис. 33, *а*).

СВОЙСТВО 2. **У выпуклого многоугольника все углы меньше 180°** (рис. 33, *б*).

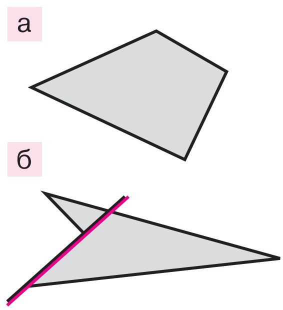


Рис. 32

Докажем ещё два свойства выпуклых многоугольников.

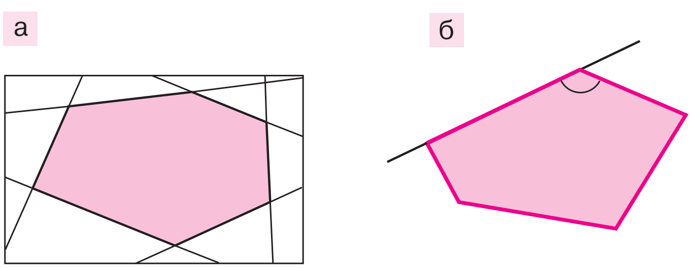


Рис. 33

Свойство 3. **Отрезок, соединяющий любые две точки выпуклого многоугольника** (в частности, любая его диагональ), **содержится в этом многоугольнике.**

Доказательство. Возьмём любые две точки A и B выпуклого многоугольника P (рис. 34). Многоугольник P является пересечением нескольких полуплоскостей. Отрезок AB содержится в каждой из этих полуплоскостей. Поэтому он содержится и в многоугольнике P. ■

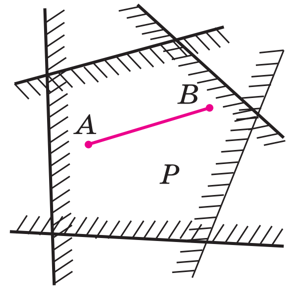


Рис. 34

Свойство 4. **Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n - 2)180°$.**

Доказательство. Пусть дан выпуклый n-угольник P. Возьмём внутри его точку O и соединим её отрезками с вершинами многоугольника (рис. 35). Отрезки эти «разрежут» многоугольник на треугольники с общей вершиной O и противолежащими ей основаниями на сторонах n-угольника. Число треугольников (по числу сторон) будет n. У каждого треугольника сумма углов равна 180°. Поэтому общая сумма их углов равна $180°n$. Чтобы получить сумму углов n-угольника, надо из $180°n$ вычесть 360° — сумму всех углов треугольников при вершине O. Стало быть, сумма углов n-угольника равна

$$180°n - 360° = (n - 2)180°. ■$$

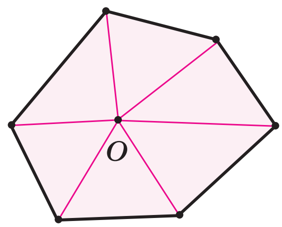


Рис. 35

Вопросы для самоконтроля

1. Какие бывают многоугольники? Чем они отличаются?
2. Перечислите свойства выпуклых многоугольников.
3. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника? Подумайте, верно ли это для невыпуклого многоугольника.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1.10. Докажите, что сумма углов любого четырёхугольника равна 360°.

1.11. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному в каждой вершине, равна 360°.

Рисуем

1.12. Нарисуйте: а) четырёхугольник с тремя тупыми углами; б) пятиугольник с четырьмя острыми углами; в) шестиугольник с двумя острыми и тремя тупыми углами; г) семиугольник без острых углов; д) восьмиугольник с шестью прямыми углами.

Представляем

1.13. Многоугольник с каким числом сторон можно получить в объединении двух треугольников, если они: а) не имеют общих внутренних точек; б) имеют общие внутренние точки?

1.14. Сколько диагоналей исходит из каждой вершины выпуклого n-угольника в остальные его вершины? На сколько треугольников разбивают эти диагонали выпуклый n-угольник? Используя это разбиение, дайте ещё одно доказательство свойству 4 о сумме углов выпуклого n-угольника.

Вычисляем

1.15. Чему равен каждый угол равноугольного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника; г) десятиугольника; д) n-угольника?

Доказываем

1.16. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся соседние два угла, сумма которых больше 180°.

Исследуем

1.17. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

1.18. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали. а) Сколько этих диагоналей? б) Сколько получилось треугольников, все вершины которых находятся в вершинах данного n-угольника?

1.19. В каком выпуклом n-угольнике все углы могут быть: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

1.20. Можно ли плоскость покрыть (без перекрытий) равноугольными: а) треугольниками; б) шестиугольниками; в) восьмиугольниками; г) четырёхугольниками и восьмиугольниками?

1.3. Четырёхугольники

Четырёхугольник — это многоугольник, границей которого является простая четырёхзвенная замкнутая ломаная (рис. 36). Четырёхугольники бывают как выпуклые (рис. 36, *а*), так и невыпуклые (рис. 36, *б*). У четырёхугольника четыре угла, четыре вершины, четыре стороны. Стороны четырёхугольника, имеющие общие концы, называются **смежными**, а не имеющие общих концов — **противоположными**. Вершины, соединённые стороной, называются **соседними**, а не соединённые стороной — **противоположными**. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, называется его **средней линией**.

У каждого четырёхугольника две диагонали — это отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника. Диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются (рис. 37, *а*), а невыпуклого не пересекаются (рис. 37, *б*). Поскольку одна из диагоналей любого четырёхугольника разбивает его на два треугольника, то *сумма углов любого четырёхугольника равна* 360°.

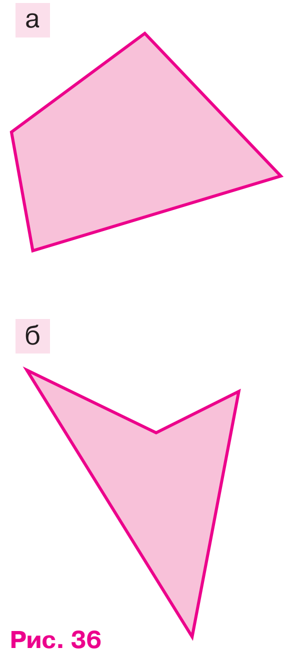


Рис. 36

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите элементы четырёхугольника.
2. Чему равна сумма углов четырёхугольника?

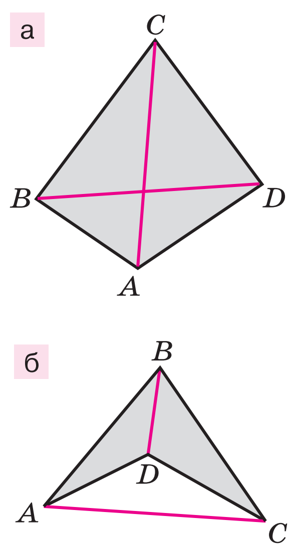


Рис. 37

ЗАДАЧИ

Представляем

1.21. Многоугольник с каким числом сторон можно получить в объединении двух выпуклых четырёхугольников, если: а) они не имеют общих внутренних точек; б) они имеют общие внутренние точки?

Исследуем

1.22. Какими свойствами обладает выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором: а) все стороны равны; б) $AB = CD$, $AD = BC$; в) $AB = BC$, $AD = CD$; г) $AB = CD$, $\angle A = \angle D$; д) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; е) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$?

1.23. а) Может ли в четырёхугольнике один из углов равняться 359°? б) Могут ли углы четырёхугольника иметь целое число градусов и отличаться на одну и ту же величину?

1.24. Сколько острых углов может быть в четырёхугольнике? А тупых?

1.25. Может ли быть в четырёхугольнике: а) один из углов меньше суммы остальных; б) каждый из углов меньше суммы остальных; в) один из углов больше суммы остальных?

Строим

1.26. Постройте четырёхугольник по: а) четырём сторонам и одной из диагоналей; б) трём сторонам и двум диагоналям; в) трём сторонам и двум углам между ними; г) четырём сторонам и одному углу между ними; д) диагонали и четырём углам, которые она образует со сторонами.

Применяем геометрию

1.27. а) В вершинах четырёхзвенной замкнутой ломаной сделаны шарниры. Будет ли такая фигура жёсткой? б) Сколько различных четырёхугольников можно построить по четырём сторонам?

1.4. Правильные многоугольники

Будем прикладывать друг к другу на плоскости боковыми сторонами одинаковые равнобедренные треугольники с общей вершиной O (рис. 38). Зададим несколько вопросов.

1) Можно ли так подобрать треугольники, чтобы они заполнили вокруг точки O полный угол (360°) и не перекрывались?

2) Если можно, то каково может быть их число (обозначим это число n)?

3) Каким должен быть угол φ при вершине таких треугольников в зависимости от n?

Ответы на первые два вопроса просты: да, можно и число таких треугольников может быть любым, начиная с трёх. Обсудим ответ на третий вопрос.

Если $n = 3$, то $\varphi = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ (рис. 39, a);

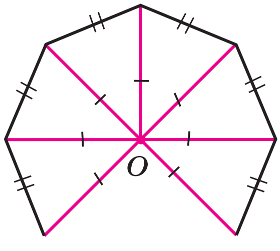


Рис. 38

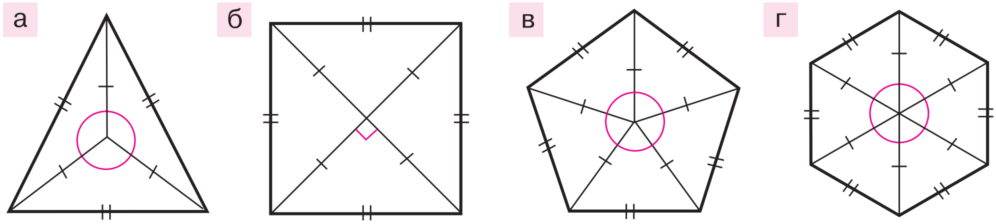


Рис. 39

если $n = 4$, то $\varphi = \frac{360°}{4} = 90°$ (рис. 39, *б*);

если $n = 5$, то $\varphi = \frac{360°}{5} = 72°$ (рис. 39, *в*);

если $n = 6$, то $\varphi = \frac{360°}{6} = 60°$ (рис. 39, *г*).

На этом значении n остановимся. В результате таких построений получатся многоугольники, у которых равны друг другу все стороны и все углы. Такие многоугольники называются **правильными**.

Итак, **многоугольник, в котором равны все стороны и все углы, называется правильным.** Мы уже встречались с некоторыми правильными многоугольниками: это равносторонний треугольник и квадрат.

Прежде всего заметим, что все углы правильного многоугольника меньше 180°, поскольку *у каждого многоугольника есть хотя бы один угол, меньший* 180°. Докажем это.

□ Пусть дан многоугольник P. Проведём какую-нибудь прямую, не пересекающую его (рис. 40, *а*). Будем перемещать её параллельно самой себе в сторону многоугольника P. В некоторый момент мы получим прямую a, имеющую с многоугольником P хотя бы одну общую точку, от которой многоугольник P лежит по одну сторону (рис. 40, *б*, *в*). На прямой a лежит хотя бы одна вершина A много-

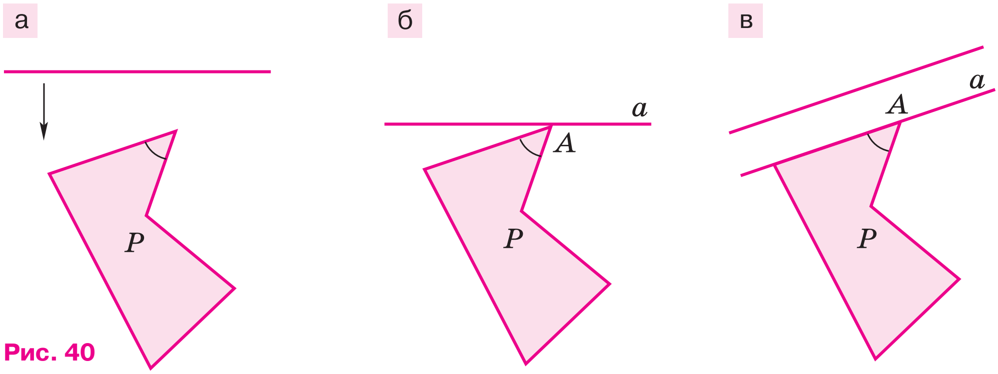


Рис. 40

угольника P. Угол с вершиной A в многоугольнике P меньше развёрнутого. ■

Мы построили некоторые правильные многоугольники, составляя их из одинаковых равнобедренных треугольников. Следующая теорема показывает, что любой правильный многоугольник можно разбить на одинаковые равнобедренные треугольники.

Теорема 1 (*о центре правильного многоугольника*). **У каждого правильного многоугольника существует точка, равноудалённая от его вершин. (Её называют центром правильного многоугольника.)**

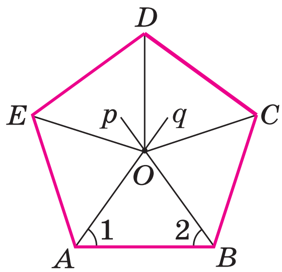


Рис. 41

Доказательство. Это доказательство не зависит от числа сторон правильного многоугольника. Поэтому проведём его для правильного пятиугольника.

Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Проведём биссектрисы p и q углов A и B (рис. 41). Они пересекутся в некоторой точке O (так как $\angle 1 + \angle 2 < 180°$). Треугольник OAB — равнобедренный (так как $\angle BAO = \angle ABO$). Поэтому $OA = OB$.

Соединим точку O и точку C отрезком OC. Тогда $\triangle OBA = \triangle OBC$ по первому признаку равенства треугольников ($BA = BC$, сторона OB общая и $\angle OBA = \angle OBC$, так как луч BO — биссектриса угла ABC). Следовательно, $OC = OA = OB$. Отметим также, что луч CO — биссектриса угла BCD.

Повторяя эти рассуждения, получим, что $OD = OC$ и $OE = OD$, т. е. $OA = OB = OC = OD = OE$. Так как $AB = BC = CD = DE = EA$, то равнобедренные треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEA равны друг другу. ■

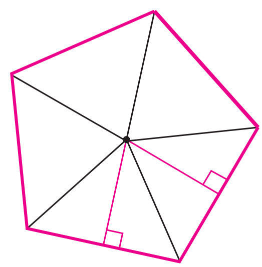


Рис. 42

Замечание. Равнобедренные треугольники, основаниями которых являются стороны правильного многоугольника, а вершина которых находится в его центре, равны друг другу (рис. 42).

СЛЕДСТВИЕ. Центр правильного многоугольника равноудалён от его сторон.

□ Действительно, расстояния от центра правильного многоугольника до его сторон равны высотам равных друг другу равнобедренных треугольников, имеющих общую вершину в центре правильного многоугольника, а основаниями — стороны правильного многоугольника (рис. 42). Поэтому эти высоты равны друг другу. Их называют **апофемами** правильного многоугольника. ■

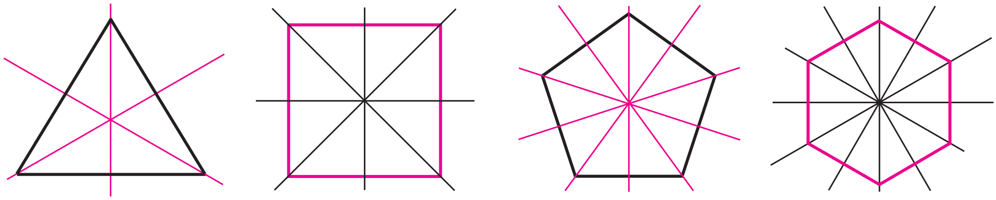


Рис. 43

У каждого правильного n-угольника *n осей симметрии* (рис. 43). Общая вершина равнобедренных треугольников, из которых составлен правильный многоугольник, является центром этого многоугольника. *Если число сторон многоугольника чётно, то его центр является также его центром симметрии* (как, например, у квадрата). *Если же число сторон правильного многоугольника нечётно, то у него центра симметрии нет* (так, например, у правильного треугольника нет центра симметрии).

▲Мы с вами рассмотрели только такие правильные многоугольники, у которых число сторон 3, 4, 5 или 6. Это не случайно. Те правильные многоугольники, которые изображены на рисунке 39, можно построить циркулем и линейкой. Правильный же семиугольник построить циркулем и линейкой нельзя. Мы уже встречались с задачей на построение, которая не может быть решена с помощью только циркуля и линейки: это была задача о трисекции угла. Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой, а какие нельзя, выяснил в 1796 г. великий немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855), когда был ещё совсем молодым учёным. Но приближённо и с необходимой степенью точности можно построить любой правильный n-угольник.▼

К. Гаусс

Вопросы для самоконтроля

1. Какой многоугольник называется правильным?
2. Как построить правильный многоугольник?
3. С какими правильными многоугольниками вы уже знакомы?
4. Какими свойствами обладают правильные многоугольники?
5. Любой ли правильный многоугольник строится циркулем и линейкой?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1.28. Найдите формулу для угла правильного n-угольника.

1.29. Докажите следующие теоремы о свойствах правильного многоугольника: а) все вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности; б) середины всех сторон правильного многоугольника лежат на одной окружности; в) биссектрисы углов правильного многоугольника проходят через его центр.

Представляем

1.30. Представьте себе, что на окружности лежат n точек так, что все расстояния между соседними точками равны друг другу. Являются ли эти точки вершинами правильного n-угольника?

Планируем

1.31. а) Построили правильный треугольник, а где его центр — забыли. Как его восстановить? б) Как решить аналогичную задачу для других правильных многоугольников?

1.32. Построили на доске правильный многоугольник, а потом стёрли все его стороны, кроме двух сторон. Как восстановить рисунок?

Вычисляем

1.33. Вычислите в правильном шестиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) углы между пересекающимися диагоналями.

1.34. Вычислите в правильном пятиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) угол между пересекающимися диагоналями.

Доказываем

1.35. а) Докажите, что середины сторон правильного треугольника являются вершинами другого правильного треугольника. б) Составьте аналогичную задачу для других правильных многоугольников. в) Найдите сами какой-либо способ получения правильного многоугольника, используя уже построенный правильный многоугольник.

1.36. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что: а) для каждой его диагонали есть равная ей диагональ; б) среди его диагоналей есть перпендикулярные; в) среди его диагоналей есть параллельные.

1.37. Дан правильный пятиугольник. Докажите, что: а) все его диагонали равны; б) каждая его диагональ параллельна какой-либо его стороне.

Исследуем

1.38. Может ли быть неправильный шестиугольник, у которого: а) все стороны равны; б) все углы равны?

Рассуждаем

1.39. а) Центр правильного многоугольника лежит на серединном перпендикуляре любой его стороны. Из чего это следует? б) Серединные перпендикуляры всех сторон правильного многоугольника имеют общую точку. Из чего это следует?

1.5. Многоугольные фигуры

Многоугольной фигурой называется объединение конечного числа многоугольников (рис. 44). Многоугольная фигура может состоять из многоугольников, вовсе не имеющих общих точек (рис. 44, *а*) или имеющих только отдельные общие точки на границе (рис. 44, *б*). (Аналогично архипелаг состоит из островов, земли фермы слагаются из отдельных её полей, а жилое помещение многокомнатной квартиры — из нескольких комнат.)

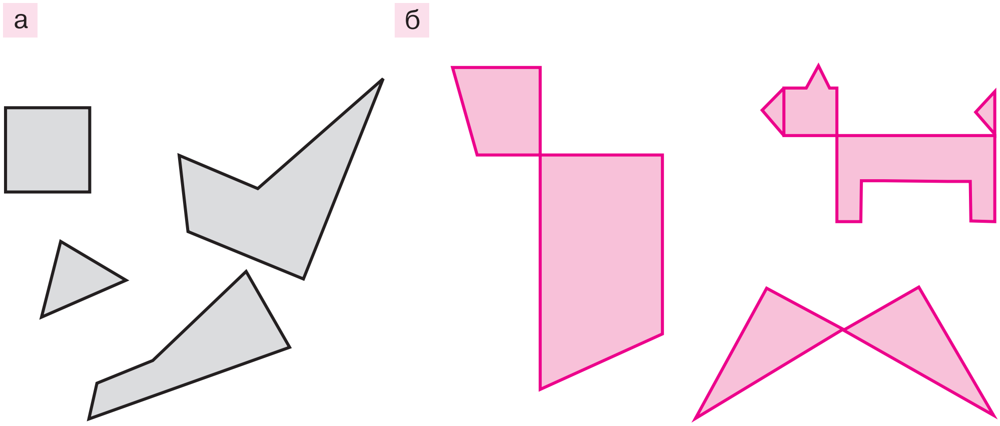


Рис. 44

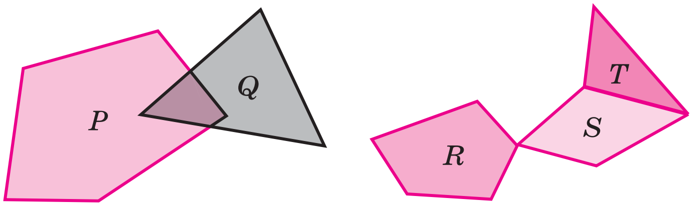


Рис. 45

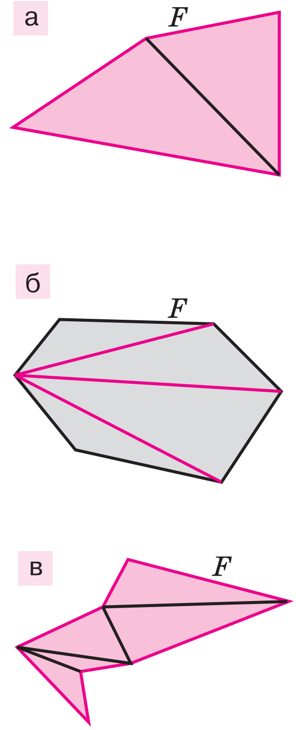


Рис. 46

Будем говорить, что многоугольные фигуры **не перекрываются**, если они не имеют общих внутренних точек (на рисунке 45 фигуры P и Q перекрываются, а фигуры R, S и T не перекрываются).

Говорят, что многоугольная фигура F **составлена** (или **состоит**) из данных многоугольных фигур, если она является их объединением, а сами эти фигуры не перекрываются (рис. 46). В этом случае говорят также, что многоугольная фигура **разбита** на данные многоугольные фигуры.

Например, каждый четырёхугольник можно разбить на два треугольника диагональю (см. рис. 46, *а*). Выпуклый многоугольник разбивается на треугольники диагоналями, проведёнными из любой его вершины (см. рис. 46, *б*).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется многоугольной фигурой?
2. Является ли многоугольник многоугольной фигурой? Любая ли многоугольная фигура является многоугольником?
3. Что значит, что многоугольная фигура разбита на многоугольные фигуры?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.40. Какие из закрашенных фигур на рисунке 47 являются многоугольными фигурами?

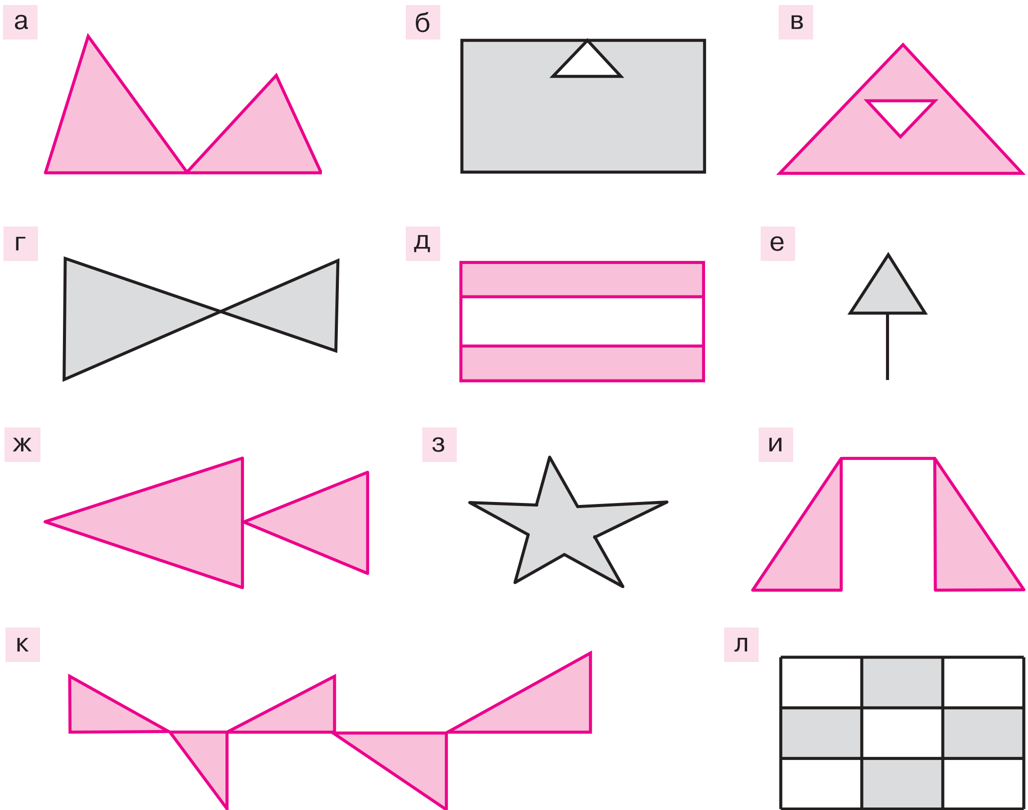


Рис. 47

Рисуем

1.41. Нарисуйте равносторонний треугольник. Разбейте его: а) на два прямоугольных треугольника; б) на три прямоугольных треугольника; в) на шесть равных прямоугольных треугольников; г) на четыре равных равносторонних треугольника.

1.42. Нарисуйте различные многоугольные фигуры, которые можно составить из двух равных треугольников: а) равносторонних; б) равнобедренных; в) прямоугольных.

Планируем

1.43. Как разбить правильный n-угольник на равные прямоугольные треугольники? Сколько их?

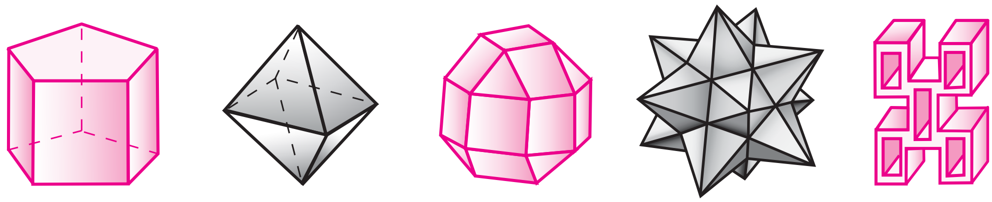


Рис. 48

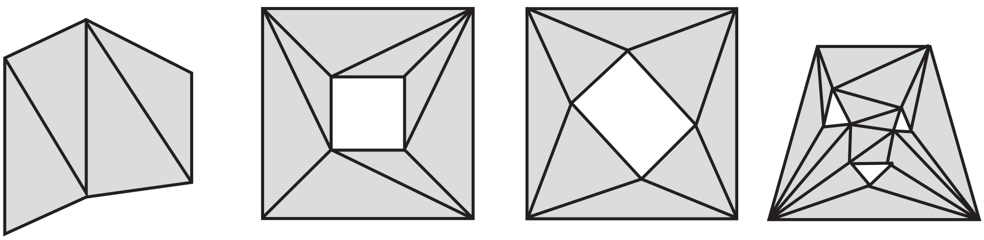


Рис. 49

1.6. Многогранники. Пирамиды

Напомним, что многоугольником мы назвали конечную часть плоскости, ограниченную простой замкнутой ломаной. **Многогранником** можно назвать конечную часть пространства, ограниченную конечным числом многоугольников (рис. 48). Многоугольнику можно было бы дать более общее определение и определить его как фигуру на плоскости, составленную из треугольников, прилегающих друг к другу по сторонам (рис. 49). Аналогично многогранником можно назвать фигуру в пространстве, составленную из тетраэдров, прилегающих друг к другу по граням (рис. 50). Например, с одной стороны, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это часть пространства, ограниченная шестью квадратами (рис. 51, *а*, назовите их), а с другой стороны, этот же куб составлен из пяти тетраэдров (рис. 51, *б*, назовите их).

Тетраэдр является простейшим среди любых многогранников, а также простейшим среди пирамид (рис. 52). Тетраэдр — это треугольная пирамида. В тетраэдре любая грань может считаться основанием пирамиды. Тогда три остальные его грани будут боковыми гранями.

Произвольную пирамиду можно построить так.

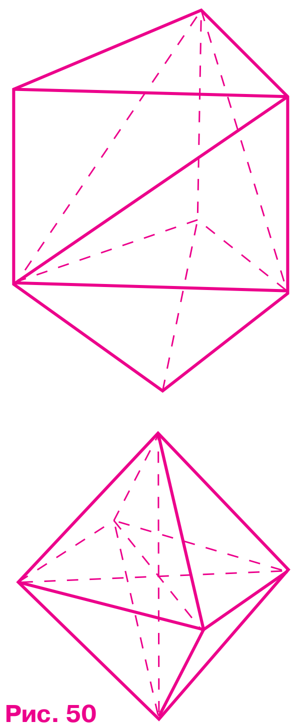


Рис. 50

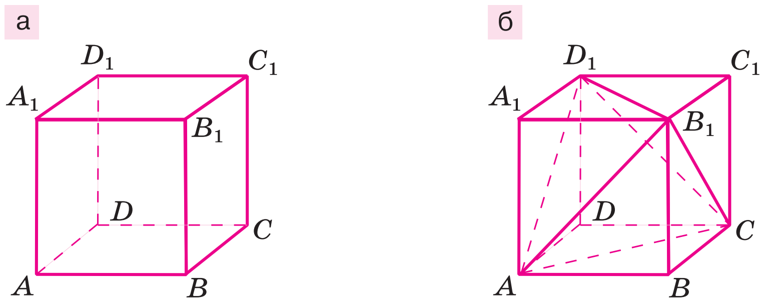


Рис. 51

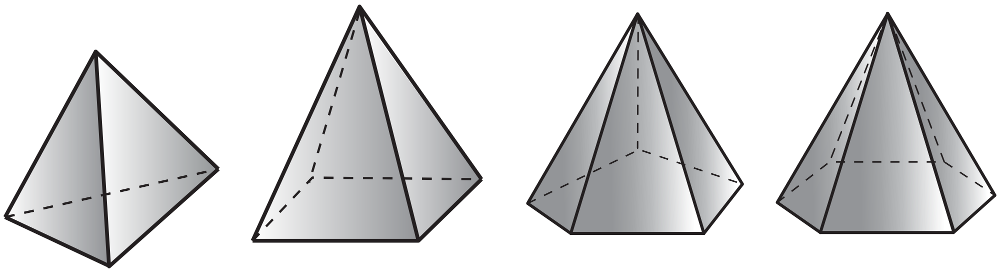


Рис. 52

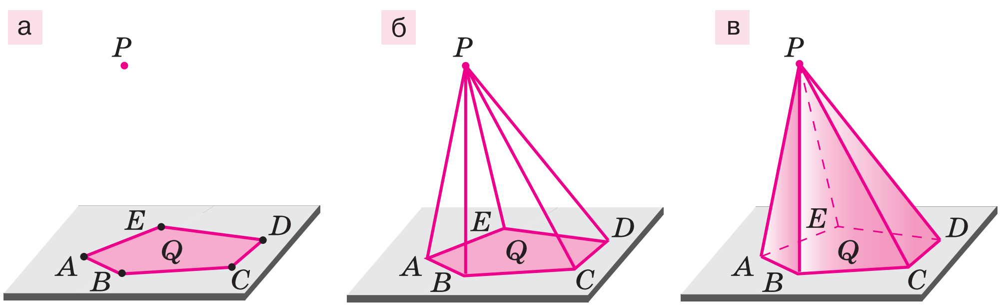


Рис. 53

Возьмём некоторый многоугольник Q (например, пятиугольник $ABCDE$) и какую-нибудь точку P вне плоскости многоугольника Q (рис. 53, *а*). Соединим отрезками точку P со всеми вершинами многоугольника Q (рис. 53, *б*). Если теперь на полученный «каркас» из отрезков «натянуть» треугольники PAB, PBC, PCD, PDE, PEA, то вместе с многоугольником Q они в пространстве ограничат **пирамиду** (рис. 53, *в*). Многоугольник Q называется **основанием пирамиды**, точка P — её **вершиной**, треугольники PAB, PBC, PCD, PDE, PEA — **боковыми гранями пирамиды**, а отрезки PA, PB, PC, PD, PE — **боковыми рёбрами пирамиды**. Мы построили пятиугольную пирамиду $PABCDE$.

Если же в основании пирамиды лежит n-угольник, то пирамиду называют **n-угольной**.

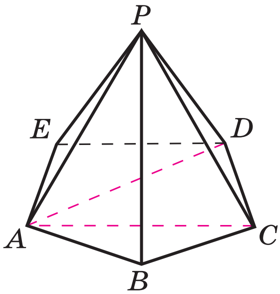


Рис. 54

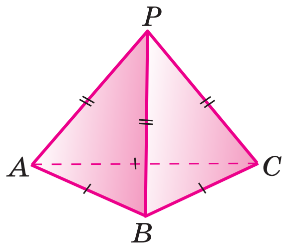


Рис. 55

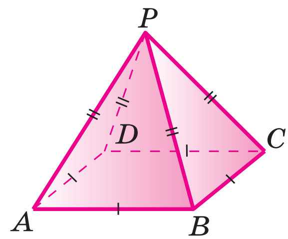


Рис. 56

Ясно, что разбиению диагоналями основания пирамиды на треугольники соответствует разбиение самой пирамиды на тетраэдры с общей вершиной — вершиной пирамиды (рис. 54).

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а все боковые рёбра пирамиды равны друг другу. Основание правильной треугольной пирамиды — равносторонний треугольник (рис. 55), а основание правильной четырёхугольной пирамиды — квадрат (рис. 56). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырёхугольные пирамиды (рис. 57).

Важный частный случай правильной треугольной пирамиды — **правильный тетраэдр:** у него все четыре грани — равносторонние треугольники. Правильный тетраэдр можно определить как тетраэдр, все рёбра которого равны.

Рисовать пирамиду всегда начинайте с основания (считая его горизонтальным), а вершину выбирайте над основанием.

Отметим, что любой тетраэдр можно изображать любым выпуклым четырёхугольником с проведёнными диагоналями (одна из которых — штриховая линия). Поэтому при изображении правильных треугольных пирамид следует указывать нужные равенства их рёбер.

Рис. 57

Вопросы для самоконтроля

1. Какие многогранники вы знаете?
2. Как построить шестиугольную пирамиду?
3. Какие элементы пирамиды вы знаете?
4. Каким свойством тетраэдр выделяется среди пирамид?
5. Какую пирамиду называют правильной?
6. Какой тетраэдр называют правильным?

ЗАДАЧИ

Рисуем

1.44. Нарисуйте треугольную и четырёхугольную пирамиды так, чтобы все их рёбра были видимыми.

1.45. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду так, чтобы у неё было одно невидимое ребро. Можно ли нарисовать её так, чтобы невидимыми были два ребра? три ребра?

1.46. Нарисуйте какой-нибудь многогранник, у которого 6 (8, 10) граней и все они треугольники. Сколько у вас получилось видимых и сколько невидимых рёбер? граней?

Представляем

1.47. Центр куба соединён отрезками со всеми его вершинами. На сколько правильных пирамид разбился при этом куб?

Исследуем

1.48. Сколько рёбер имеют четырёхугольная, пятиугольная, шестиугольная пирамиды? Может ли пирамида иметь нечётное число рёбер? Почему?

1.49. Из куба вырезали (удалили) куб меньших размеров. Сколько граней имеет получившийся многогранник? Зависит ли ответ на вопрос от того, в каком месте был вырезан куб?

1.50. Какие многоугольники могут получиться в пересечении куба с плоскостью?

1.51. Вы уже знаете, что многогранник с четырьмя вершинами и четырьмя гранями — это тетраэдр. а) Расскажите, какими могут быть многогранники, у которых пять вершин. Какими многоугольниками могут быть их грани? Сколько у них может быть рёбер? б) А каким может быть многогранник, у которого пять граней?

1.52. Верно ли, что правильной пирамидой является такая пирамида, все боковые грани которой — равные между собой равнобедренные треугольники?

1.53. У каких правильных пирамид боковые грани могут быть: а) прямоугольными треугольниками; б) равносторонними треугольниками?

§ 2. Площадь многоугольной фигуры

2.1. Понятие площади. Измерение площади

Представления о площадях имеются у каждого из вас. И находить их в простейших случаях вы уже умеете: например, вы знаете, как найти площадь прямоугольника — скажем, комнаты, где вы живёте. Подсчитывая жилую площадь квартиры, в которой несколько комнат, складывают площади этих комнат, а если требуется найти полную площадь квартиры, то складывают площади всех её помещений. Ясно также, что у одинаковых квартир одна и та же площадь. Эти представления о площади и кладутся в основу определения площади многоугольных фигур.

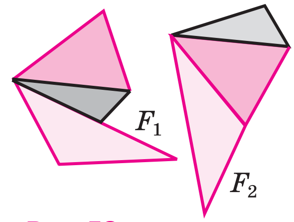


Рис. 58

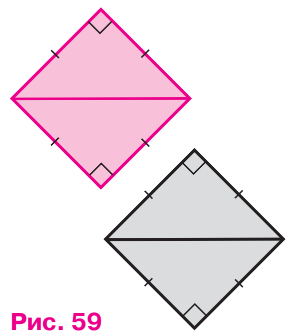


Рис. 59

Определение. Для многоугольных фигур площадью называется положительная величина с такими основными свойствами:

1) площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей этих фигур;

2) равные треугольники имеют одну и ту же площадь.

Площадь фигуры F мы будем обозначать через $S(F)$.

Площадь поверхности многогранника — это сумма площадей всех его граней.

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими**.

Простейший пример равновеликих фигур дают равные треугольники: они равновелики по свойству 2. Используя свойство 1, получаем более общее утверждение: *если фигуры составлены из попарно равных треугольников, то они равновелики* (рис. 58). В частности, равные квадраты (квадраты с равными сторонами) равновелики. Действительно, диагонали разбивают их на равные прямоугольные треугольники (рис. 59).

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью фигуры, принятой за единицу измерения. В результате получится **численное значение площади** данной фигуры.

За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, стороной которого является некоторая единица длины. Например, жилую площадь измеряют в квадратных метрах, площадь государства — в квадратных километрах. Тогда пишут, например, 20 м^2 или 156 000 км^2. Когда наименование единицы длины не указано, о численном значении площади фигуры F пишем, например, так: $S(F) = 15$ кв. ед. Запись $S(F) = 15$ является сокращением записи $S(F) = 15$ кв. ед.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные свойства площади.
2. Что такое единичный квадрат? В чём состоит измерение площади?
3. Какие фигуры называются равновеликими?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

2.1. Пусть F_1 и F_2 — две многоугольные фигуры, фигура G_1 — их объединение, а фигура G_2 — их пересечение. Докажите, что

$$S(F_1) + S(F_2) = S(G_1) + S(G_2).$$

Напомним, что *объединением фигур* называется фигура, состоящая из всех точек данных фигур; *пересечением фигур* называется фигура, состоящая из всех общих точек данных фигур.

Смотрим

2.2. Среди многоугольников на рисунке 60 найдите равновеликие.

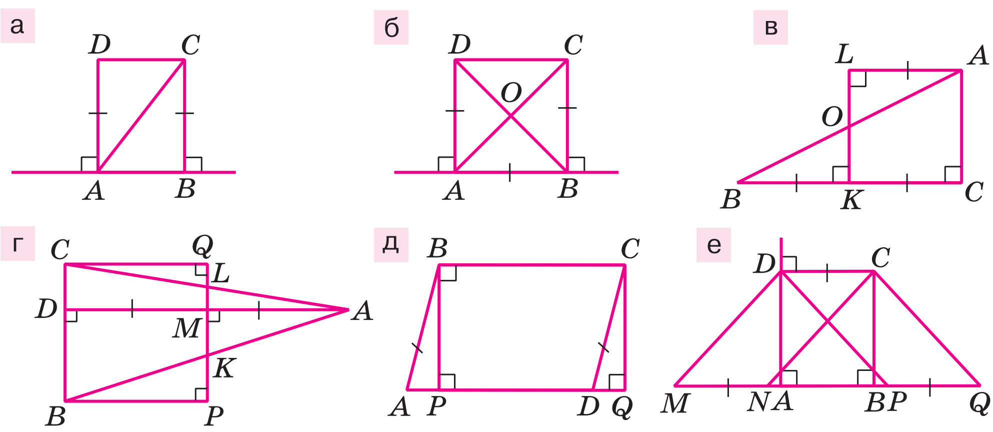


Рис. 60

2.3. На рисунке 61 изображён прямоугольный параллелепипед. Найдите среди изображённых там многоугольников равновеликие.

2.4. На рисунке 62 изображена правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$. Найдите среди изображённых там многоугольников равновеликие.

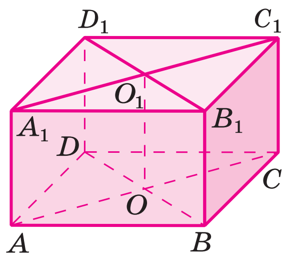


Рис. 61

Рисуем

2.5. Нарисуйте прямоугольник. Затем нарисуйте второй прямоугольник, площадь которого: а) в 3 раза больше площади первого; б) в 4 раза меньше площади первого.

2.6. Нарисуйте квадрат. Затем нарисуйте второй квадрат, площадь которого: а) в 2 раза больше площади первого квадрата; б) в 2 раза меньше площади первого квадрата.

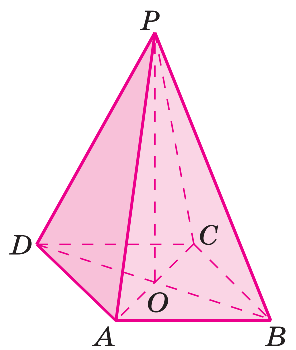


Рис. 62

Планируем

2.7. Как одним отрезком разбить на две равновеликие части: а) квадрат; б) прямоугольник; в) равносторонний треугольник?

2.8. Как разбить произвольный треугольник на фигуры, из которых можно составить прямоугольник?

2.2. Площадь прямоугольника

Вам давно известно, что **площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.** А именно если P — прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь

$$S(P) = ab. \tag{1}$$

Следует только помнить, что длины сторон прямоугольника должны быть выражены с помощью одной и той же единицы длины. (Точнее было бы сказать, что *численное значение площади прямоугольника равно произведению численных значений длин его сторон*, но мы, упрощая формулировки, здесь и в дальнейшем будем допускать аналогичные сокращения.)

В частности, когда прямоугольник P является квадратом со стороной a, его площадь равна a^2.

□ Как измеряется площадь прямоугольника P и как происходит её сравнение с площадью единичного квадрата Q в том случае, когда длины сторон прямоугольника P выражаются натуральными числами a и b, вы знаете ещё из начальной школы: прямоугольник P разбивают на ab единичных квадратов (рис. 63). Следовательно, в этом случае $S(P) = ab$.

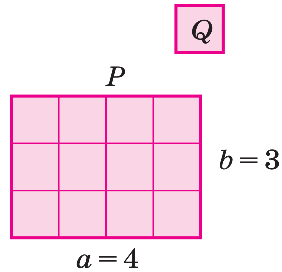


Рис. 63

Если же a и b — дробные числа, то можно считать (приведя их к общему знаменателю), что $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ (числа p, q, n — натуральные). Это означает, что на отрезке a укладывается p раз отрезок $\frac{1}{n}e$, а на отрезке b он укладывается q раз (e — единичный отрезок). Прямоугольник P разбивается на pq одинаковых квадратов Q_n со стороной $\frac{1}{n}e$ (рис. 64). Единичный квадрат Q разбивается на n^2 таких квадратов Q_n (рис. 65). Поэтому $S(Q) = n^2 S(Q_n)$, и так как $S(Q) = 1$, то $S(Q_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$. Поскольку $S(P) = pqS(Q_n)$, то

$S(P) = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab$.

Наконец, числа a и b могут быть иррациональными (одно или оба). Можно доказать, что и в этом случае равенство (1) справедливо.

★ Убедиться в этом можно так. Каждое из чисел a и b может быть представлено бесконечной десятичной дробью. Рациональные числа a_n и b_n получим, отбросив все цифры в десятичных представлениях чисел a и b, начиная с $(n + 1)$-й после запятой. Отложим от одной из вершин прямоугольника P на его сторонах отрезки длиной a_n и b_n и построим прямоугольник P_n со сторонами a_n и b_n (рис. 66). Как уже установлено,

$$S(P_n) = a_n b_n.$$

Числа $S(P_n)$ являются сколь угодно точными приближёнными значениями числа $S(P)$. И числа $a_n b_n$ являются сколь угодно точными приближёнными значениями числа ab. А так как

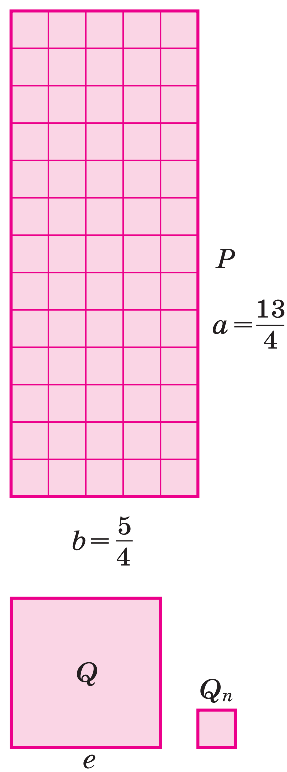


Рис. 64

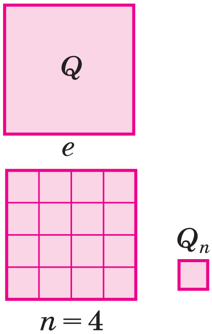


Рис. 65

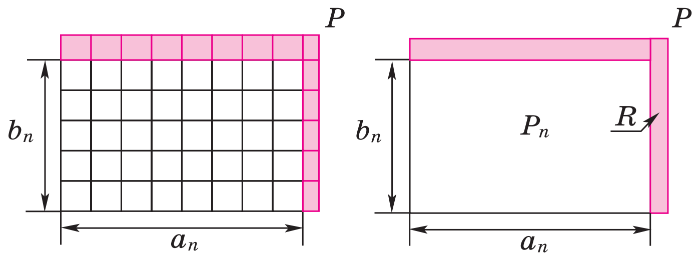


Рис. 66

сколь угодно точные приближённые значения чисел $S(P)$ и ab равны ($S(P_n) = a_n\, b_n$), то и сами эти числа равны, т. е. справедливо равенство (1).■★

К **Комментарий.** Отметим, что слова *а квадрат* и *а куб*, которые говорят о второй и третьей степенях числа a, имеют геометрическое происхождение. Геометрически можно истолковать величины a^2 и a^3 как площадь квадрата со стороной a и объём куба с ребром a.

С **Справка словесника.** Люди придумали много различных единиц измерения площадей. Например, в Древнем Риме единица измерения площади поля называлась *югер* — от латинского слова, означающего «ярмо». Югер — это площадь участка земли, который можно было вспахать за день на паре волов. Аналогичная мера земли существовала и у славян. Она называлась *плугом*. Знаете ли вы другие меры площади?

? Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляется площадь прямоугольника?
2. Какие единицы измерения площади вам известны?

ЗАДАЧИ

Планируем

2.9. На клетчатой бумаге, разбитой на единичные квадраты, нарисованы треугольники с вершинами в узлах сети квадратов (рис. 67). Как найти их площади? Вычислите их.

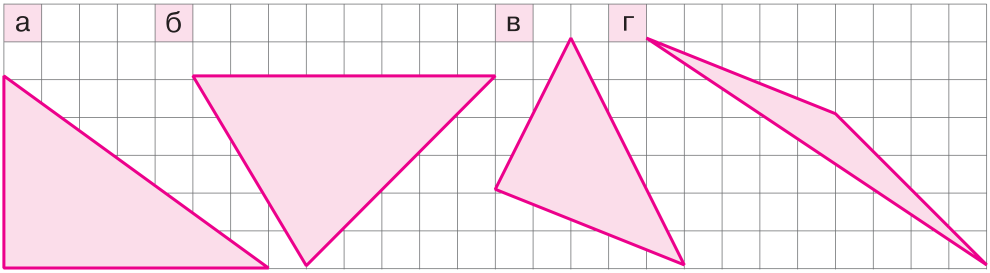


Рис. 67

2.10. На клетчатой бумаге, разбитой на единичные квадраты, нарисованы многоугольные фигуры с вершинами в узлах сети квадратов или в их центрах (рис. 68). Как найти площади фигур?

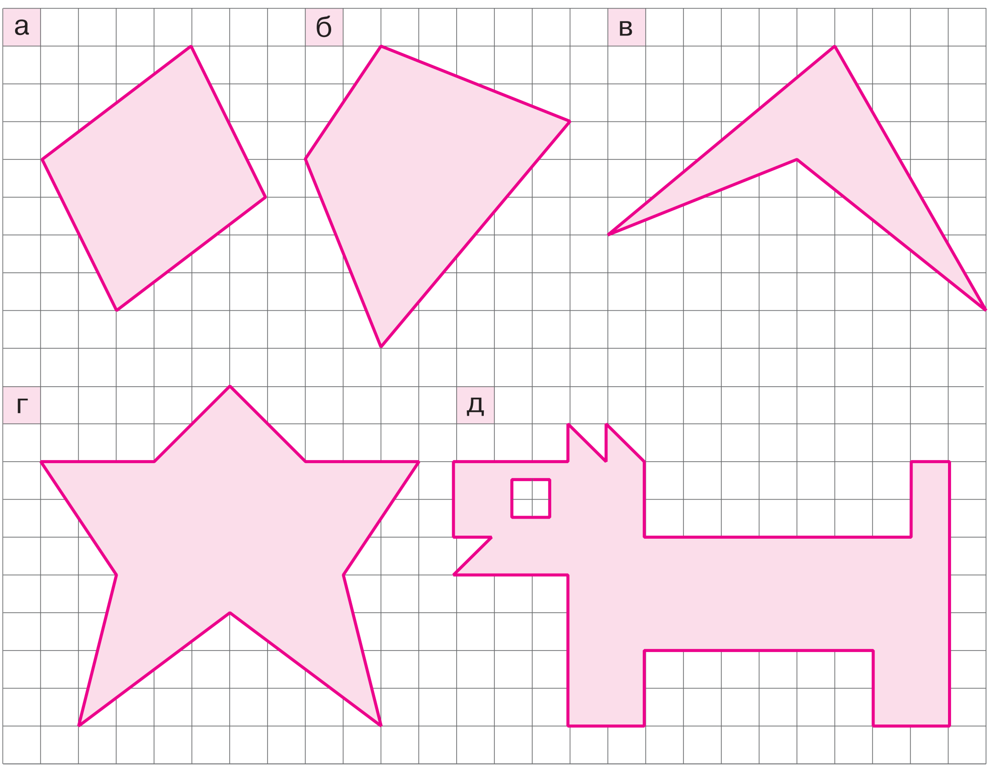


Рис. 68

Работаем с формулой

2.11. Нарисуйте прямоугольник. Пусть его основание равно d, а высота — h. Запишите формулу его площади. а) Пусть основание увеличилось в 2 раза, а высота не изменилась. Что произошло с площадью? б) Пусть основание уменьшилось в 5 раз, а высота не изменилась. Что произошло с площадью? в) Пусть основание изменяется, а высота остаётся постоянной. Объясните, почему зависимость между площадью и основанием является прямой пропорциональностью. г) Какая зависимость существует между площадью и высотой при постоянном основании? д) Пусть основание прямоугольника увеличилось в 3 раза. Что нужно сделать с его высотой, чтобы его площадь не изменилась? е) Объясните, почему при постоянной площади прямоугольника его основание и высота являются обратно пропорциональными величинами. ж) Может ли прямоугольник иметь одну из сторон 1 км, а площадь меньше чем 1 кв. мм?

2.12. Длину стороны квадрата увеличили в 4 раза. Как изменятся его периметр и площадь? Обобщите результаты.

2.13. Что произойдёт с площадью прямоугольника, если: а) основание увеличить в 2 раза, а высоту увеличить в 3 раза; б) основание уменьшить в 4 раза, а высоту увеличить в 8 раз; в) основание и высоту увеличить в 1,5 раза; г) основание и высоту увеличить на 10%?

Вычисляем

2.14. Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны: а) 28 см и 18 мм (выразите площадь в квадратных миллиметрах); б) 2,5 м и 78 см (выразите площадь в квадратных метрах); в) 3,8 км и 500 м (выразите площадь в гектарах).

2.15. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 4 м и: а) отношение размеров равно 2; б) длина больше ширины на 0,5 м; в) одна из сторон равна x метров?

2.16. Чему равен периметр прямоугольника, если его площадь равна 20 кв. м и: а) одна из сторон равна 5 м; б) длина составляет 125% от ширины; в) одна из сторон равна x метров?

2.17. Выразите как функцию от величины x площади таких фигур: а) квадрата со стороной x; б) квадрата с периметром x; в) прямоугольника с одной стороной x, а другой — на 1 больше; г) прямоугольника с одной стороной x, а другой — в 2 раза больше; д) прямоугольника с периметром 1 и одной из сторон x; е) объединения двух равных квадратов со стороной x, которые пересекаются по квадрату со стороной 1.

2.18. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3, 4, 5; б) 8 см, 1,5 см и 30 см; в) 20 см, 3 дм и 1,2 м; г) 1, 1, x; д) a, b, c.

2.19. Найдите площадь поверхности куба, ребро которого равно: а) 0,6; б) 3 см; в) x.

2.20. Выразите через x площадь поверхности таких фигур: а) прямоугольного параллелепипеда, у которого основанием является квадрат со стороной x, а боковое ребро в 2 раза больше ребра основания; б) объединения двух равных кубов с ребром 1, которые пересекаются по кубу с ребром x.

Ищем границы

2.21. В каких границах лежит площадь: а) квадрата со стороной больше 11 мм, но меньше 12 мм; б) прямоугольника с одной стороной больше 15 и меньше 16, а другой больше 12 и меньше 13?

Доказываем

2.22. Прямая, перпендикулярная одной из сторон прямоугольника, делит пополам его площадь. Докажите, что она делит пополам и его периметр. Верно ли обратное?

Исследуем

2.23. Куб с ребром 6 разрезали на кубы с рёбрами 2. Сравните суммарную площадь поверхностей полученных кубов с площадью поверхности исходного куба. Обобщите результаты.

2.24. Куб с ребром 1 м распилили на кубики с ребром 1 дм, а потом все эти кубики поставили один на другой. Чему равна высота получившегося столба? А если распилить его на кубики с ребром 1 см? А если на кубики с ребром 1 мм?

2.25. Какая зависимость существует между площадью и периметром квадрата? Существует ли зависимость и для произвольного прямоугольника?

2.26. Можно ли сделать прямоугольник площадью 4, если периметр его равен: а) 8; б) 10^6; в) 10^{-6}?

2.27. Нарисуйте два квадрата так, чтобы они имели общий центр и параллельные стороны. а) Пусть сторона меньшего квадрата составляет $\frac{2}{3}$ стороны большего квадрата. Какая площадь больше: маленького квадрата или оставшейся части большого квадрата без маленького? б) Пусть сторона маленького квадрата составляет 0,9 стороны большого квадрата. Сколько процентов от площади исходного квадрата находится в оставшейся части?

Применяем геометрию

2.28. Перед вами страница книги. Сколько процентов составляет площадь, занятая текстом, от общей площади страницы? Сначала попробуйте дать ответ на глаз, а затем проверьте его вычислениями.

2.29. Для облицовки стены дома имеются равные квадратные плитки. Как вы узнаете, сколько понадобится плиток для выполнения работы?

2.30. Требуется узнать, сколько деревьев можно посадить на данном прямоугольном участке земли для обустройства сада. Как вы будете действовать?

Рассуждаем

2.31. Имеются два прямоугольника. Какие из следующих утверждений верны: а) если прямоугольники равны, то их площади равны; б) если площади прямоугольников равны, то равны и прямоугольники; в) если равны их площади, то равны и периметры; г) если равны их периметры, то равны и площади; д) если один из них имеет бо́льшую площадь, то он имеет и больший периметр; е) если один из них имеет больший периметр, то он имеет и бо́льшую площадь?

Занимательная геометрия

2.32. Китайская игра танграм представляет собой квадрат, разрезанный на треугольники и четырёхугольники так, как показано на рисунке 69. Найдите их площади, если сторона квадрата равна 2.
Составьте из этих частей разные фигуры.

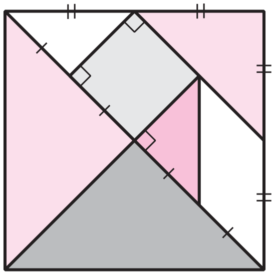


Рис. 69

§ 3. Теорема Пифагора

3.1. Важнейшая теорема геометрии

В самой знаменитой теореме геометрии — теореме Пифагора — говорится о площадях: **площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах этого треугольника** (рис. 70). Известно много различных доказательств этой теоремы. Вот одно из них.

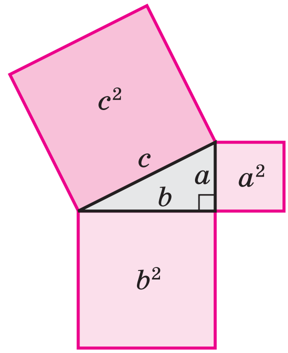


Рис. 70

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник T с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 71). Построим два равных квадрата, стороны которых равны $a + b$: квадрат P с вершинами A, B, C, D и квадрат Q с вершинами K, L, M, N (рис. 72). На сторонах этих квадратов отмечены точки, разбивающие эти стороны на отрезки, равные отрезкам a и b (двумя способами). Соединяя последовательно точки разбиения сторон в квадрате P отрезками, получим разбиение квадрата P на четыре треугольника, равные треугольнику T, и на четырёхугольник F, все стороны которого равны c (рис. 73, *а* на с. 46). Четырёхугольник F является квадратом, так как все его углы прямые: они равны разности 180° и 90° (суммы острых углов прямоугольного треугольника T), т. е. равны 90°. Итак, F — квадрат со стороной c.

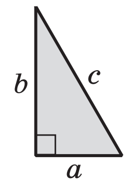


Рис. 71

Соединив отрезками точки разбиения противоположных сторон квадрата Q, разобьём его на квадрат G со стороной a, квадрат H со стороной b и два прямоугольника со сторонами a и b (рис. 73, *б*). Каждый из этих прямоугольников диагональю разобьём на два треугольника, равные треугольнику T (рис. 73, *в*).

Из свойств площади следуют равенства

$$S(P) = S(F) + 4S(T),$$
$$S(Q) = S(G) + S(H) + 4S(T)$$
$$\text{и} \quad S(P) = S(Q).$$

Поэтому $S(F) = S(G) + S(H)$. ■

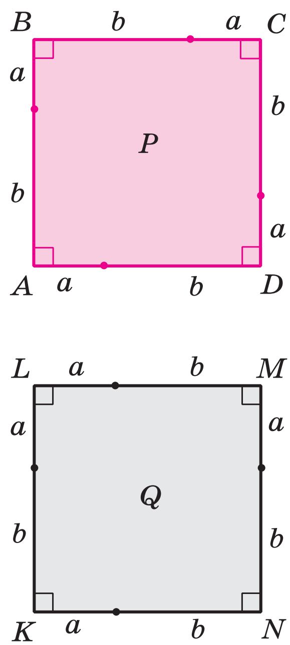


Рис. 72

Для применений теоремы Пифагора удобнее её другая, алгебраическая формулировка. Эта алгебраическая формулировка получится из первой, чисто геометрической формулировки, если

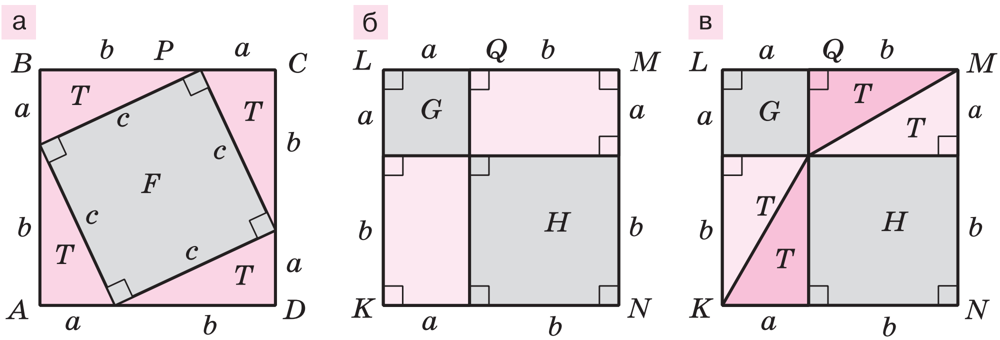


Рис. 73

вспомнить, что площадь квадрата равна квадрату его стороны. И тогда имеем такую теорему:

Теорема 2 (*теорема Пифагора*). **В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.**

Используя традиционные обозначения для катетов a, b и для гипотенузы c, имеем такое равенство:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Часто теорему Пифагора формулируют ещё короче: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов,* имея в виду длины катетов и гипотенузы.

Замечание. В дальнейшем, когда в формулировках теорем речь идёт о длинах некоторых отрезков (сторон, диагоналей, наклонных, проекций и т. п.), мы, как и в этом случае, будем ради краткости речи опускать слово *длина*.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете формулировки теоремы Пифагора?
2. На какие свойства площадей опирается доказательство теоремы Пифагора?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

3.1. Теорема Пифагора выражает *свойство прямоугольного треугольника*. Обратное ей утверждение является *признаком прямоугольного треугольника*. Этим утверждением Евклид завершил первую книгу своих «Начал». Сформулируем и докажем его.

Если в треугольнике квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других его сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Доказательство. Действительно, пусть в треугольнике ABC выполняется равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 74). Построим прямоугольный треугольник KLM с прямым углом M и катетами KM и LM, равными соответственно сторонам AC и BC. По теореме Пифагора $KL^2 = KM^2 + LM^2$. Так как $AC = KM$ и $BC = LM$, то $AB^2 = KL^2$, а потому $AB = KL$. Значит, в треугольниках ABC и KLM стороны равны, т. е. эти треугольники равны. А в равных треугольниках и соответственные углы равны. Поэтому угол C равен углу M, т. е. угол C прямой. ■

Итак, *равенство* (1) *является характерным свойством прямоугольного треугольника.*

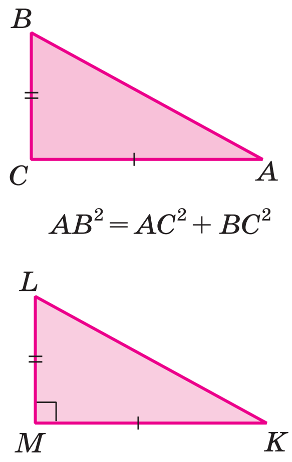


Рис. 74

Работаем с формулой

3.2. Три натуральных числа a, b, c называют **пифагоровой тройкой**, если выполняется равенство (1). Проверьте, что тройки чисел $(2n,\ n^2 - 1,\ n^2 + 1)$ и $(2pq,\ p^2 - q^2,\ p^2 + q^2)$ — пифагоровы (числа n, p, q — натуральные). Напишите несколько пифагоровых троек. Почему треугольник, длины сторон которого — пифагоровы тройки, является прямоугольным?

Доказываем

3.3. Глядя на рисунки 75—78, найдите различные доказательства теоремы Пифагора.

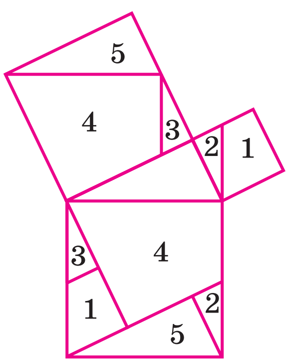


Рис. 75

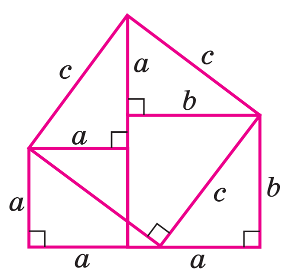


Рис. 76

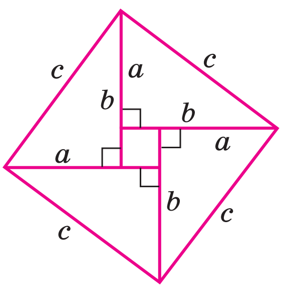


Рис. 77

Исследуем

3.4. Стороны прямоугольного треугольника умножили на одно и то же положительное число. Являются ли полученные отрезки сторонами прямоугольного треугольника?

3.5. Каждую сторону прямоугольного треугольника увеличили на один и тот же отрезок. Являются ли полученные отрезки сторонами прямоугольного треугольника?

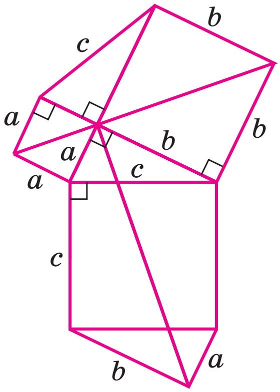


Рис. 78

3.2. Пифагор

Знаменитый древнегреческий учёный, именем которого названа важнейшая теорема геометрии, жил в VI в. до н. э. (ок. 570—ок. 500 гг. до н. э.). Он родился и провёл свою юность на острове Самосе в Эгейском море, в молодые годы много странствовал, долго жил в Египте, затем в Вавилоне, может быть, побывал и в Индии.

Пифагор

Последний период своей жизни (примерно с 530 г. до н. э.) Пифагор прожил в городе Кротоне — греческой колонии на юге Италии. Здесь он создал знаменитую пифагорейскую школу. Его исследования охватывали и арифметику («Всё есть число» — девиз пифагорейцев), и музыку (Пифагором создана теория гармонии), и, конечно, геометрию. От пифагорейцев идёт и слово *математика*: греческое μαθημα — познание, учение. Μαθημα у пифагорейцев состояла из четырёх разделов: арифметики, геометрии, музыки и астрономии. Эти же разделы составили и средневековый *квадривиум*. Вместе с *тривиумом*, включавшим грамматику, риторику и диалектику, квадривиум составлял «семь свободных искусств», которым обучали молодёжь в Средние века.

Символом пифагорейцев была **пентаграмма** — пятиконечная звезда из диагоналей правильного пятиугольника (рис. 79). В этой фигуре таится много красивых геометрических и арифметических соотношений. Мы подробно расскажем о них в п. 10.5.

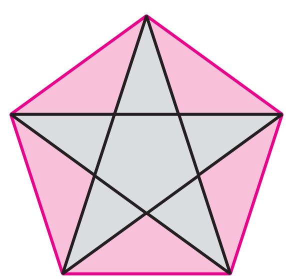
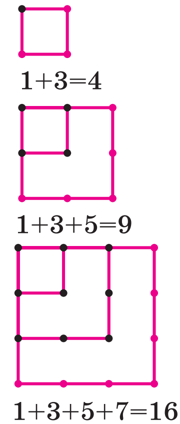


Рис. 79

Сейчас, конечно, ясно, что числами выражаются основные закономерности в арифметике, геометрии и астрономии. Пифагорейцы искали такие закономерности, используя геометрический язык. На рисунке 80 выражена геометрически одна из арифметических закономерностей, открытая пифагорейцами. Но Пифагор нашёл, что и теория гармонии покоится на арифметических соотношениях, и впервые выразил математически физическую закономерность.

О том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, знали в Египте и Вавилоне задолго до Пифагора, но лишь как факт, выведенный из измерений. Пифагор же нашёл доказательство этого утверждения, и факт, взятый из отдельных измерений, стал необходимым законом: ведь если утверждение доказано, то «иначе быть не может».



$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Рис. 80

3.3. Равносоставленные фигуры

Ясно, что фигурки, составленные из всех частей танграма (рис. 81 и 82), имеют одинаковую площадь, равную площади заполненного ими квадрата (задача 2.32, рис. 69). Действительно, ведь фигуры на этих рисунках **равносоставлены**, т. е. составлены из соответственно равных друг другу частей. Пары соответственных частей имеют равные площади. Когда вычисляют площадь всей фигуры, то площади её частей складывают, а потому *площади двух равносоставленных фигур равны*, так как, вычисляя их, складывают соответственно равные слагаемые. Этим свойством равносоставленных фигур вы пользовались и когда доказывали теорему Пифагора, глядя на рисунки 75 и 76: на этих рисунках ясно, что квадрат, построенный на гипотенузе, равносоставлен с фигурой, состоящей из квадратов, построенных на катетах.

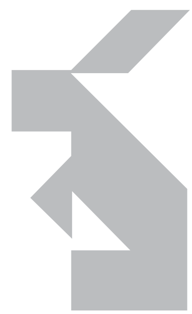


Рис. 81

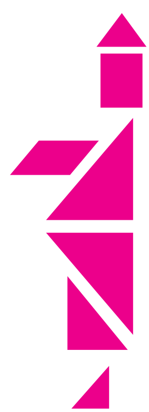


Рис. 82

Вопросы для самоконтроля

1. Когда и в какой стране жил Пифагор?
2. Что еще вы знаете о Пифагоре?

3.4. Вычисление длин. Квадратный корень

Теорема Пифагора будет для нас основным средством не только в теории курса 8 класса, но и при решении вычислительных задач. Так, теорема Пифагора позволяет по любым двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону.

Найдём, например, гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 и 8. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен $6^2 + 8^2 = 100$. И чтобы завершить решение задачи, надо найти сторону квадрата, площадь которого равна 100. Ясно, что она равна 10, так как $10^2 = 100$.

Если известны гипотенуза и один из катетов, то можно найти другой катет. Например, если гипотенуза равна 13, а катет равен 12, то по теореме Пифагора квадрат другого катета равен $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$. И мы снова приходим к той же задаче: найти положительное число, квадрат которого известен. В данном случае, когда квадрат равен 25, ясно, что это число равно 5. Следовательно, второй катет треугольника равен 5.

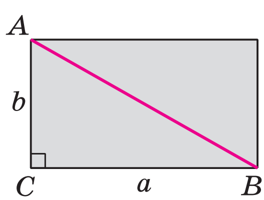
В обеих рассмотренных задачах нам пришлось по известному квадрату положительного числа находить само это число. А именно, зная некоторое положительное число a, мы находим такое положительное число b, что $b^2 = a$. Найденное положительное число b обозначается так: $b = \sqrt{a}$, читается: **«b равно корню квадратному из a»**.

Операцию нахождения квадратного корня называют **извлечением квадратного корня**.

Нахождение положительного квадратного корня можно геометрически истолковать как нахождение стороны квадрата, площадь которого известна. Подробно об извлечении квадратного корня говорится в курсе алгебры.

В тех случаях, когда нельзя найти точное значение квадратного корня в виде отношения натуральных чисел (например, для $\sqrt{2}$), мы будем искать его приближённо по таблице или с помощью микрокалькулятора (например, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$) либо оставлять в ответе знак квадратного корня (например, $\sqrt{2}$).

Вернёмся к вычислению длин. Прямоугольный треугольник всегда можно достроить до прямоугольника, а прямоугольник, наоборот, всегда можно разбить на два равных прямоугольных треугольника. При этих преобразованиях катеты прямоугольного треугольника становятся сторонами прямоугольника, а гипотенуза — его диагональю (рис. 83). Поэтому теореме Пифагора



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Рис. 83

можно дать ещё одну формулировку, в которой речь уже пойдёт о сторонах и диагонали прямоугольника.

Теорема (*теорема Пифагора*). **Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его измерений.**

Вопросы для самоконтроля

1. Какую еще формулировку теоремы Пифагора вы теперь знаете?
2. По какой формуле можно вычислить диагональ прямоугольника?

Теорема Пифагора позволяет находить высоту треугольника, зная длины его сторон. Как это можно сделать, мы рассказываем в рубрике «Разбираемся в решении» среди задач к этому пункту.

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

3.6. Найдите высоты треугольника, зная его стороны.

Решение. Пусть заданы стороны a, b, c треугольника ABC и требуется найти его высоты h_a, h_b, h_c. Например, пусть $a = 8$, $b = 7$, $c = 9$. Как здесь быть? Теорема Пифагора позволяет решить такую задачу на вычисление. Пусть AD — искомая высота (рис. 84, *а*).

Обозначим через x отрезок BD. Тогда $CD = 8 - x$. Так как

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \text{ и } AD^2 = AC^2 - CD^2,$$

$$\text{то } AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2, \text{ т. е.}$$

$$81 - x^2 = 49 - (8 - x)^2. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем, что $x = 6$. Так как $BD = 6$, то

$$AD^2 = 81 - 36 = 45,$$

$$\text{т. е. } AD = 3\sqrt{5}.$$

Две другие высоты этого треугольника найдите самостоятельно.

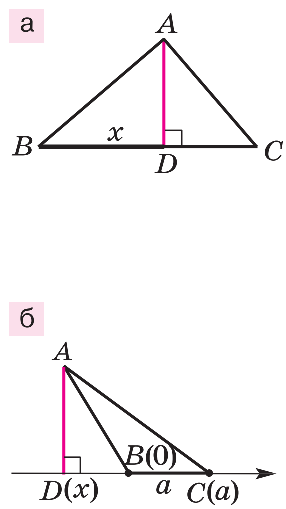


Рис. 84

★ Если повторить проведённое нами решение в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях) с тем же чертежом, то для отрезка x получим такое выражение:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \qquad (3)$$

Если $a^2 + c^2 < b^2$, то по этой формуле $x < 0$. Что же это значит? Вспомним, что $CD = a - x$, и если $x < 0$, то $CD > a$! Это неравенство подсказывает нам, что точка B лежит внутри отрезка CD и угол B тупой (рис. 84, *б*). Объединить в решении все случаи расположения точки D на прямой BC можно так. Эту прямую считать числовой осью с началом в точке B, идущей от B к C. Точка C будет иметь координату a, точка D — координату x. Тогда $BD = |x|$, $CD = |a - x|$ и уравнение относительно x будет иметь вид $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$. Решая его, получаем выражение (3) для x. Далее,

$$AD^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 + c^2 - b^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2)^2 + 2(a^2 + c^2)b^2 - b^4)$$

и для высоты h_a получаем такую формулу:

$$h_a^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}. \star \qquad (4)$$

Смотрим

3.7. Найдите длину отрезка x на рисунке 85.

3.8. а) На рисунке 86 выберите какой-нибудь прямоугольный треугольник. Найдите в нём гипотенузу и выразите её через другие стороны этого же треугольника. б) Затем найдите такой треугольник, в котором эта же гипотенуза является стороной другого прямоугольного треугольника. Выразите её ещё раз, но уже через стороны второго треугольника.

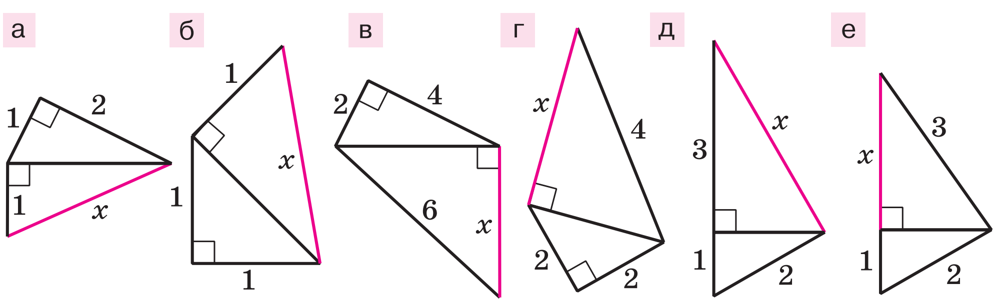


Рис. 85

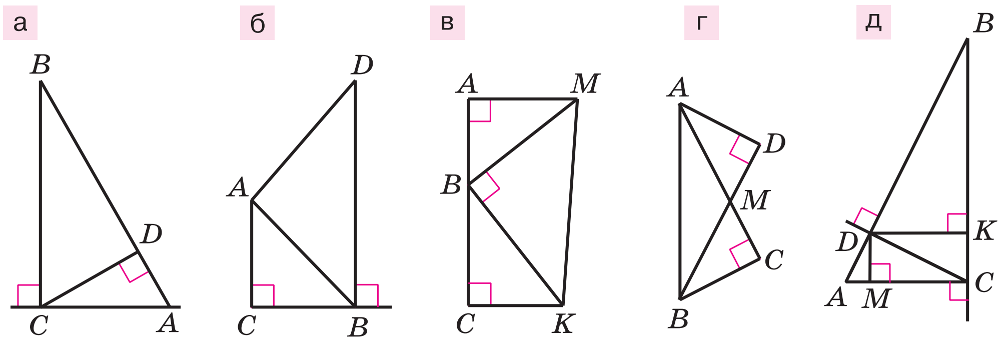


Рис. 86

Планируем

3.9. Точки A и B лежат на биссектрисах смежных углов с общей вершиной O. Как найти расстояние между ними, если известны их расстояния от точки O?

3.10. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. а) В этом треугольнике провели медиану BK. Как найти её длину, если известны катеты? б) Известны длины медианы BK и катета BC. Как найти другой катет? другие медианы? в) Известны длины медианы BK и катета AC. Как найти другой катет? другие медианы? г) Известны гипотенуза AC и медиана BK. Как найти катеты и другие медианы?

3.11. Пусть известны расстояния от некоторой точки квадрата до прямых, содержащих стороны квадрата. Как найти расстояния от этой точки до вершин квадрата?

Вычисляем

3.12. Вычислите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 8 и 6; б) 0,4 и 0,3; в) 1 и 2; г) 1,5 и 2,5.

3.13. Вычислите катет прямоугольного треугольника, если известны другой его катет и гипотенуза: а) 1,2 и 1,3; б) 1,5 и 2,5.

3.14. Найдите диагонали прямоугольника: а) стороны которого равны 3 и 4; б) периметр которого равен 10, а одна из сторон прямоугольника равна 2; в) площадь которого равна 12, а одна из сторон прямоугольника равна 4.

3.15. Найдите: а) диагональ квадрата, сторона которого равна 6; б) стороны квадрата, диагональ которого равна a.

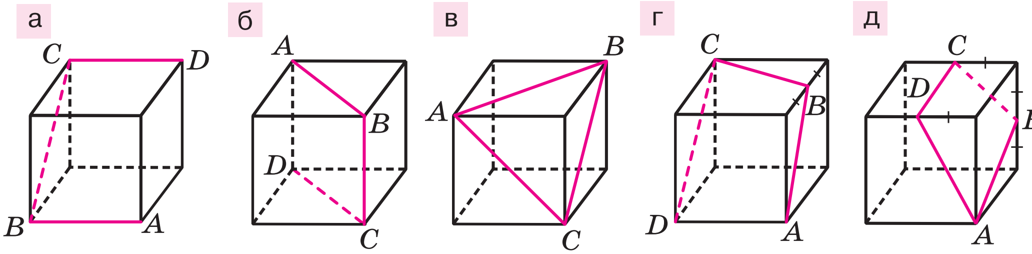


Рис. 87

3.16. Найдите: а) высоту равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона и основание равны соответственно 13 и 10; б) основание равнобедренного треугольника, боковая сторона и высота которого равны соответственно a и h.

3.17. Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, сторона которого равна 6; б) сторону равностороннего треугольника, высота которого равна h.

3.18. Найдите медианы прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8.

3.19. AB и CD — два перпендикуляра в одной плоскости к прямой BD, лежащие с одной стороны от неё. Вычислите: а) AC, если $BD = 1$, $AB = 1$, $CD = 2$; б) BD, если $AC = 3$, $CD = 3$, $AB = 2$; в) CD, если $AB = BD = 3$, $AC = 5$.

3.20. Найдите длины ломаных на поверхности единичного куба, изображённых на рисунке 87.

3.21. Найдите: а) диагональ куба, ребро которого равно a; б) расстояние от центра единичного куба до его вершины.

3.22. Найдите ребро куба, диагональ которого равна 1.

3.23. Найдите: а) гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами x и $2x$; б) катеты прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 1, если известно, что один из катетов в 2 раза больше другого.

3.24. Выразите через x диагональ прямоугольника, в котором: а) измерения равны $1+x$ и $1-x$; б) одно измерение равно x, а периметр равен 1; в) площадь равна 1, а одно измерение равно x.

3.25. Найдите: а) диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями x, $1 - x$, $1 + x$; б) ребро прямоугольного параллелепипеда с диагональю x и двумя другими рёбрами 1 и 2.

$\mathcal{X}$ Выводим формулу

3.26. Найдите зависимость между отрезками x и y на рисунке 88.

3.27. В плоскости два круга с радиусами R_1 и R_2 имеют общую хорду длины d. Расстояние между центрами кругов равно a. Пусть три из этих четырёх величин известны. Как найти четвёртую?

Исследуем

3.28. В плоскости задан прямоугольник. Известно расстояние от некоторой точки этой плоскости до трёх его вершин. Сможете ли вы найти расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника?

3.29. а) Из одной точки окружности проведены две перпендикулярные между собой хорды с длинами a и b. Можете ли вы найти радиус этой окружности? б) В окружности радиуса R проведены две равные, пересекающиеся и перпендикулярные хорды длиной d. Чему равно расстояние от центра окружности до точки пересечения этих хорд?

3.30. В окружности проведены диаметр и хорда, перпендикулярная ему. Она делит диаметр на отрезки длиной a и b. Можете ли вы найти длину хорды?

Применяем геометрию

3.31. Скорость гребца, плывущего поперёк реки, 3 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. Гребец плыл на другой берег 40 мин. а) Какое расстояние он преодолел? б) С какой результирующей скоростью он передвигался?

3.32. Бревно имеет диаметр у тонкого конца 450 мм. Из него нужно выпилить доски шириной 360 мм и толщиной 30 мм. Сколько получится досок? А сколько их будет, если надо изготовить доски шириной 270 мм?

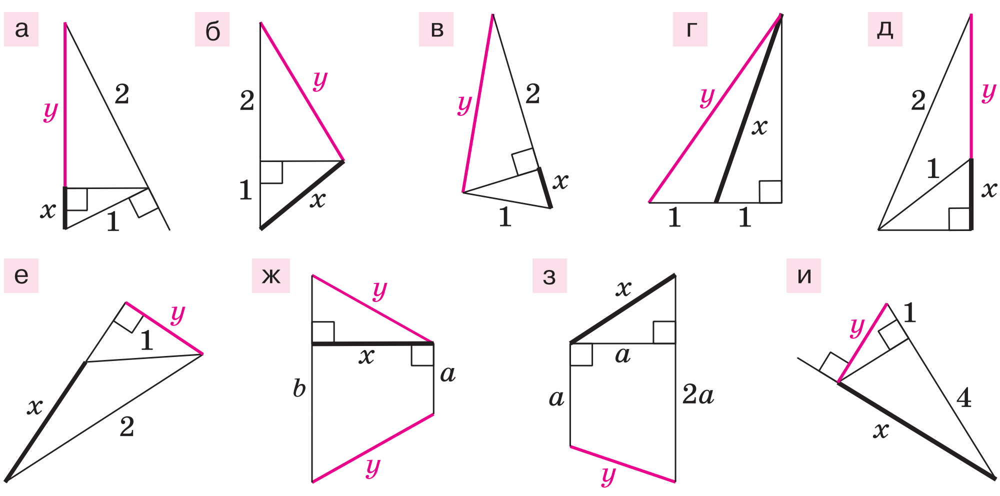


Рис. 88

3.33. Как найти длину провода, натянутого между вершинами двух вертикальных мачт, если известны высоты мачт и расстояния между их основаниями?

Занимательная геометрия

3.34. Эта задача взята из древнего китайского трактата «Математика в 9 книгах»: «Имеется квадратный водоём со стороной 1 чжан. В центре его растёт камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается: какова глубина водоёма и какова длина камыша?» (Чжан и чи — меры длины, 1 чжан = 10 чи.)

3.35. Этой задаче 4000 лет — её решали ещё в Вавилоне. «Шест длиной $\frac{1}{2}$ прислонён вертикально к стене. Его верхний конец опустили на $\frac{1}{10}$. Как далеко отодвинется его нижний конец?»

3.36. Задан отрезок a. Придумайте способ построения циркулем и линейкой отрезка $\sqrt{na}$, где n — натуральное число, например $n = 11$.

3.5. Наклонные и проекции

Пусть точка A не лежит на прямой p. **Наклонной**, проведённой из точки A к прямой p, называется любой отрезок AB, соединяющий точку A с точкой B на прямой p и не перпендикулярный прямой p (рис. 89). Если из точки A проведён также перпендикуляр AC на прямую p, то появляется прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB и катетами AC и BC. Отрезок BC называется **проекцией наклонной** AB на прямую p. Теорема Пифагора связывает длины наклонной AB, перпендикуляра AC и проекции BC равенством

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \qquad (5)$$

Поэтому **если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то: 1) перпендикуляр короче наклонной ($AC < AB$) и 2) проекция короче наклонной ($BC < AB$).**

Часто эти утверждения формулируют более кратко: **перпендикуляр короче наклонной** и **проекция короче наклонной** (подразумевая, что перпендикуляр и наклонная проведены из одной точки и к одной прямой).

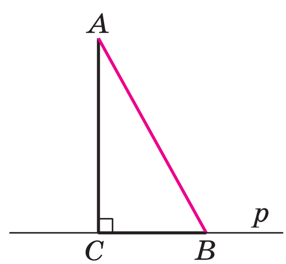


Рис. 89

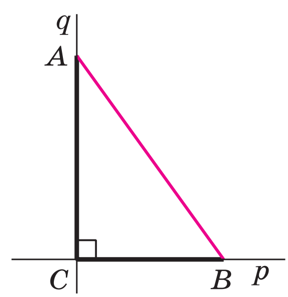
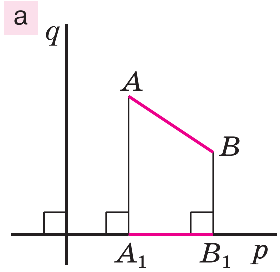


Рис. 90

▲*Формулировка теоремы Пифагора в терминах проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые*. Вернёмся к рисунку 89 и пополним его прямой AC, которую обозначим через q (рис. 90). Тогда катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC — это проекции отрезка AB на прямые q и p соответственно. Поэтому равенство (5) можно сформулировать как теорему о проекциях: **на плоскости квадрат длины отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на две взаимно перпендикулярные прямые.**



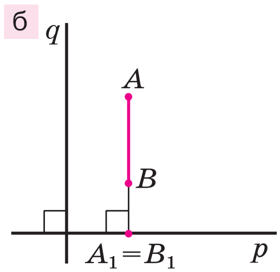


Рис. 91

В формулировке не сказано, что концы отрезка лежат на данных прямых, потому что это и неважно: теорема верна без этих ограничений.

Действительно, пусть на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные прямые p и q, а также некоторый отрезок AB (рис. 91, *а*). Опустив из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую p, получим отрезок A_1B_1, который называется **проекцией отрезка AB на прямую p**. Проекция отрезка AB на прямую p может выродиться в точку, если $A_1 = B_1$, т. е. в случае, когда $AB \perp p$ (рис. 91, *б*).

Спроектируем отрезок AB на обе прямые p и q: в отрезок A_1B_1 на p и в отрезок A_2B_2 на q (рис. 92). Тогда теорема о проекциях утверждает, что

$$AB^2 = A_1B_1{}^2 + A_2B_2{}^2. \qquad (6)$$

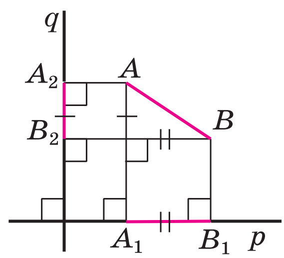


Рис. 92

Равенство (6) является обобщением равенства (1), а потому теорема о проекциях является обобщением теоремы Пифагора. Доказательство равенства (6) проведите самостоятельно, глядя на рисунок 92 и разбирая, кроме того, частные случаи.▼

Справка словесника. Латинское слово *проекция* (*projectio*) означает *бросание вперёд*. Сравните его с латинским словом *инъекция (injectio)*, которое означает *вбрасывание*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется наклонной из данной точки к прямой?
2. Что такое проекция наклонной на прямую?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

3.37. Из точки A к данной прямой проведены перпендикуляр AC и две наклонные AB и AD. Докажите, что: а) $BC = CD$, если $AB = AD$; б) $AB = AD$, если $BC = CD$; в) $BC > CD$, если $AB > CD$; г) $AB > AD$, если $BC > CD$.
Дайте различные словесные формулировки этих утверждений. Как формулируются соответствующие утверждения в пространстве?

3.38. В прямоугольном треугольнике провели высоту на гипотенузу. Докажите, что: а) квадрат этой высоты равен произведению проекций катетов на гипотенузу; б) квадрат каждого катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Смотрим

3.39. На рисунке 93 укажите проекцию каждой наклонной на прямую a.

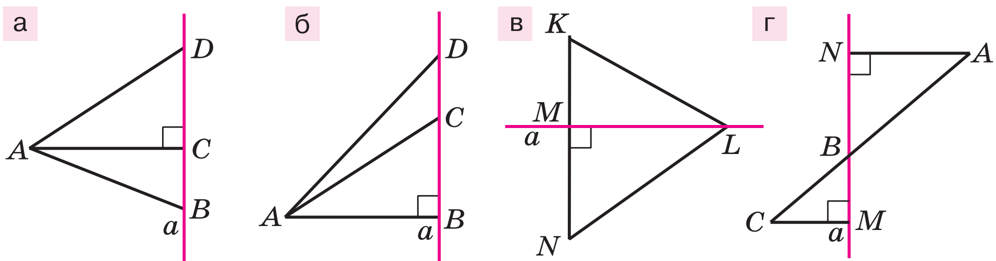


Рис. 93

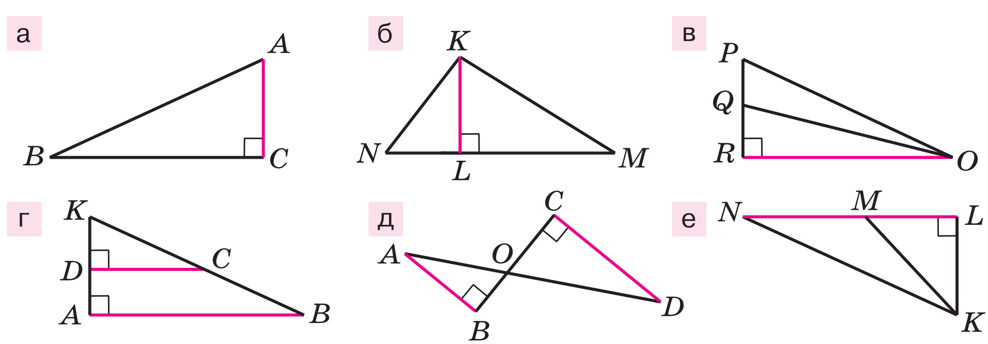


Рис. 94

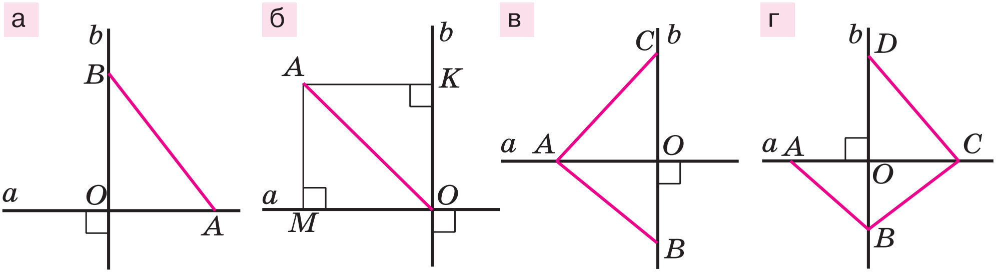


Рис. 95

3.40. На рисунке 94 для каждого малинового отрезка укажите те наклонные, для которых этот отрезок является проекцией.

3.41. На рисунке 95 укажите проекцию каждой наклонной на горизонтальную прямую a и вертикальную прямую b. Укажите наклонную, проекцией которой является каждый вертикальный или горизонтальный отрезок на этом рисунке.

Доказываем

3.42. Из точки к данной прямой проведены перпендикуляр и две наклонные. Докажите, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций. Проверьте обратное утверждение.

3.43. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны проекции: а) боковых сторон на основание; б) боковых сторон на прямые, проходящие через другие боковые стороны; в) основания на прямые, проходящие через боковые стороны; г) высоты к основанию на боковые стороны; д) высот к боковым сторонам на основание; е) высот к боковым сторонам на прямые, проходящие через другие боковые стороны.

Исследуем

3.44. Нарисуйте прямую a, на ней точку A и наклонную AB к ней. Всегда ли можно провести из точки B к прямой a другую наклонную, которая: а) равна данной; б) больше данной; в) меньше данной? А сколько таких наклонных можно провести?

3.45. Нарисуйте окружность с центром O и два взаимно перпендикулярных диаметра. Пусть некоторая точка X движется по окружности. Понаблюдайте за проекцией радиуса OX на каждый из диаметров. Какие выводы вы можете сделать?

§ 4. Площадь треугольника и площадь трапеции

4.1. Площадь треугольника

Многоугольники составлены из треугольников. Поэтому, узнав, как вычисляется площадь треугольника, мы сумеем найти площадь любого многоугольника.

Площадь любого прямоугольного треугольника найти совсем просто — она *равна половине произведения его катетов.*

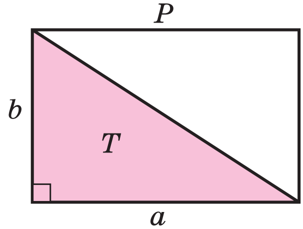


Рис. 96

Действительно, любой прямоугольный треугольник T с катетами a и b можно достроить до прямоугольника P со сторонами a и b (рис. 96). Этот прямоугольник диагональю разбивается на два равных треугольника, один из которых — исходный треугольник T. Поэтому $S(P) = 2S(T)$. А так как $S(P) = ab$, то $S(T) = \frac{1}{2}ab$.

Отметим, что каждый из катетов прямоугольного треугольника является высотой, опущенной на другой катет.

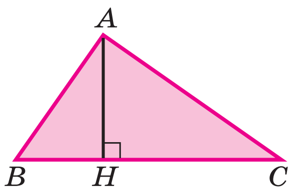


Рис. 97

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC. Проведём его высоту AH. Если высота AH лежит внутри треугольника ABC, то она разбивает его на два прямоугольных треугольника AHB и AHC (рис. 97). Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей S_1 и S_2 треугольников AHB и AHC. Как вычисляются площади S_1 и S_2, мы уже знаем:

$$S_1 = \frac{1}{2}BH \cdot AH, \ S_2 = \frac{1}{2}CH \cdot AH.$$

Поэтому

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(BH + CH) \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AH. \quad (1)$$

Итак, для уже рассмотренных случаев мы доказали, что **площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника и высоты, опущенной на эту сторону.**

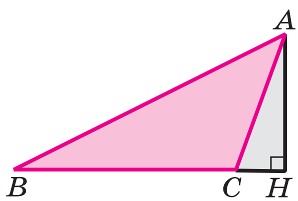


Рис. 98

Докажем, что это утверждение справедливо и для оставшегося ещё случая, когда высота AH лежит вне треугольника ABC (рис. 98).

Будем считать, что точка C лежит между точками B и H. В этом случае площадь треугольника ABC равна разности площадей S_1 и S_2 треугольников ABH и ACH, а потому

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(BH - CH) \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AH,$$

т. е. мы снова пришли к формуле (1).

Мы рассмотрели все возможные случаи. В результате мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 3 (*о площади треугольника*). **Площадь треугольника равна половине произведения любой из его сторон и высоты, проведённой к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле**

$$S(T) = \frac{1}{2}ah_a. \qquad (2)$$

Замечание. Обычно одну из сторон треугольника рисуют горизонтальной и тогда её называют *основанием*, а под *высотой треугольника* понимают ту его высоту, которая проведена к основанию. Тогда теорему о площади треугольника формулируют совсем коротко: *площадь треугольника равна полупроизведению его основания и высоты.*

Комментарий. Можно доказать теорему о площади треугольника различными способами. Например, с помощью «перестраивания» треугольника в равновеликий ему прямоугольник. На рисунке 99, *а*, *б* показан возможный вариант такого «перестраивания». Используя этот рисунок, самостоятельно проведите соответствующие доказательства. Подумайте о том, какие трудности могут возникнуть при проведении доказательства, если высота треугольника будет проведена не на бóльшую сторону. Как можно эти трудности преодолеть?

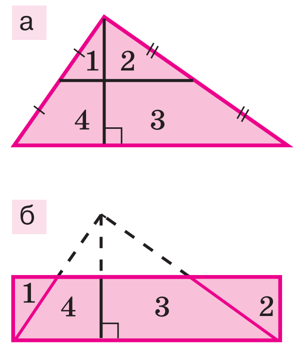


Рис. 99

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляют площадь прямоугольного треугольника?
2. По какой формуле вычисляют площадь произвольного треугольника?
3. Можно ли считать формулу для площади прямоугольного треугольника частным случаем формулы для площади произвольного треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.1. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, проведённой к ней. б) Каждую из величин в полученной в пункте «а» формуле выразите через остальные. в) Запишите формулу из пункта «а» в виде пропорции.

4.2. Пусть a и b — стороны треугольника, h_a и h_b — высоты, проведённые к ним. а) Докажите, что $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. б) Запишите эту формулу в виде пропорции. в) Докажите, что $a = b$ тогда и только тогда, когда $h_a = h_b$. г) Докажите, что в треугольнике к большей стороне проводится меньшая высота. д) Сформулируйте и проверьте утверждение, обратное утверждению «г».

Смотрим

4.3. Какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь S (рис. 100)? Точки K, L, M — середины сторон треугольника.

4.4. Сравните площади треугольников, изображённых на рисунке 101.

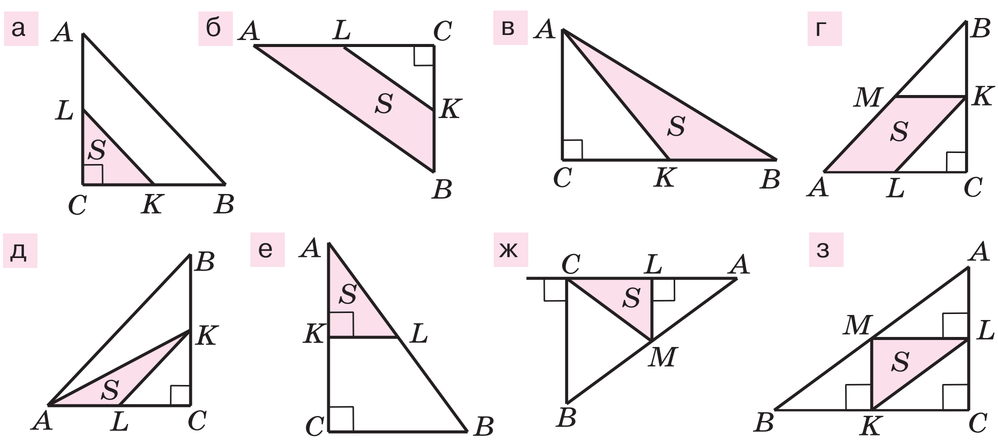


Рис. 100

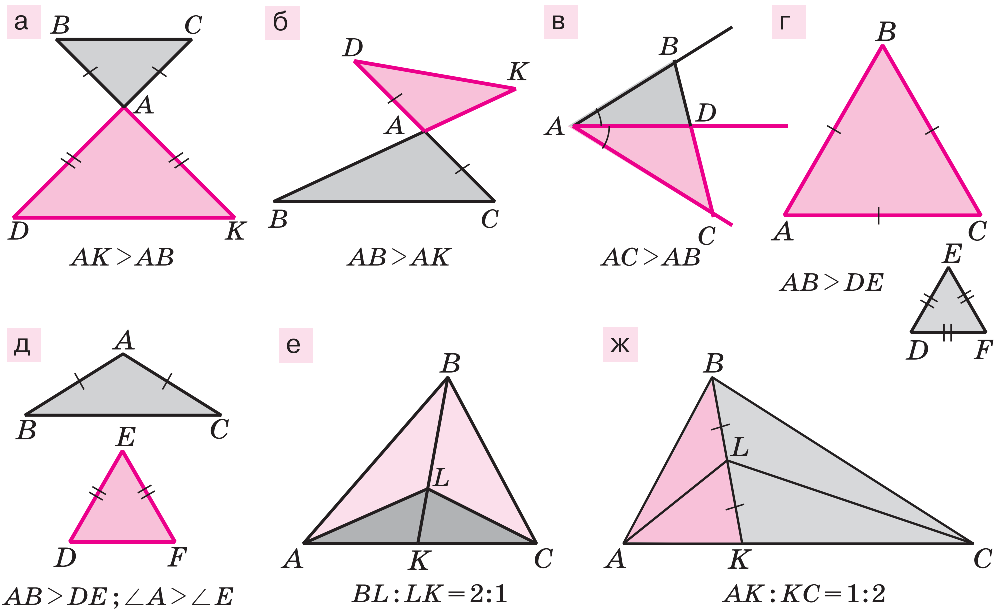


Рис. 101

Планируем

4.5. Как найти площадь закрашенных частей единичного квадрата, изображённых на рисунке 102?

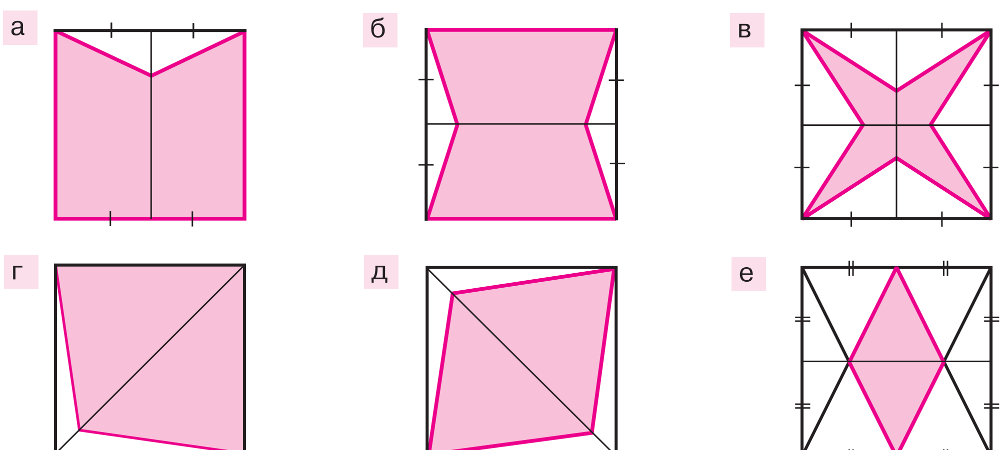


Рис. 102

4.6. Как найти площадь поверхности: а) правильного тетраэдра, если известно его ребро; б) правильной треугольной пирамиды, если известны её рёбра; в) правильной четырёхугольной пирамиды, если известны её рёбра?

Представляем

4.7. Площадь одного треугольника больше площади другого. Следует ли из этого, что и периметр его больше?

Работаем с формулой

4.8. Запишите формулу площади прямоугольного треугольника через длины его катетов. а) Что произойдёт с площадью, если, не меняя один из катетов, другой увеличить в 2 раза? уменьшить в 3 раза? б) Пусть один из катетов не меняется. Какой будет зависимость между площадью треугольника и другим катетом? в) Пусть один из катетов увеличился в 10 раз. Что нужно сделать с другим катетом, чтобы площадь треугольника не изменилась? г) Пусть площадь треугольника не меняется. Какой зависимостью связаны между собой катеты?

4.9. Как изменилась площадь прямоугольного треугольника, если: а) один катет увеличили в 2 раза, другой — в 3 раза; б) один катет уменьшили в 2 раза, другой — в 3 раза; в) один катет увеличили в 4 раза, другой уменьшили в 3 раза; г) один катет увеличили на 20%, другой уменьшили на 20%?

4.10. Запишите формулу площади треугольника. Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 4.8, для произвольного треугольника.

4.11. Запишите формулу для площади равностороннего треугольника, сторона которого равна a. а) Как называется такая зависимость площади от стороны? б) Выразите из этой формулы сторону треугольника. в) Приведите пример вычисления его стороны по заданной площади.

Вычисляем

4.12. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого: а) 62 см и 25 мм; б) 64 дм и 58 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

4.13. Вычислите площадь треугольника, у которого: а) основание 16 см, а высота к нему 12 дм (выразите площадь в квадратных сантиметрах); б) основание 1,2 км, а высота к нему 230 м (выразите площадь в квадратных метрах).

4.14. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, у которого: а) высота равна 5, а боковая сторона — 13; б) основание равно 16, а боковая сторона — 10.

4.15. Вычислите площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна 6; б) высота равна 4.

4.16. В тетраэдре $PABC$ рёбра $PB = BA = BC = 2$. Вычислите площадь его поверхности, если ребро PB перпендикулярно плоскости грани ABC и угол ABC равен: а) 90°; б) 120°; в) 60°.

4.17. Выразите через x площадь прямоугольного треугольника, в котором: а) каждый катет равен x; б) гипотенуза равна x, а один из острых углов равен 30°; в) один из катетов равен x, причём он на единицу меньше гипотенузы; г) один из катетов равен x, а другой в 3 раза меньше гипотенузы.

4.18. Выразите через x площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого: а) катет равен x; б) гипотенуза равна x; в) высота, опущенная на гипотенузу, равна x.

4.19. Выразите через x площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна x; б) высота равна x.

Ищем границы

4.20. В каких границах находится площадь треугольника, у которого две стороны равны: а) 1 и 1; б) 2 и 3; в) a и b?

Доказываем

4.21. а) Основания двух треугольников равны. Докажите, что их площади относятся, как высоты, проведённые к этим основаниям. б) Высоты двух треугольников равны. Докажите, что их площади относятся, как основания, на которые проведены эти высоты.

4.22. Два треугольника имеют общий угол. Докажите, что их площади относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол.

4.23. В треугольнике ABC провели медиану AA_1. а) Докажите, что площади полученных частей треугольника одинаковы. б) Возьмите на медиане какую-нибудь точку и соедините её с вершинами B и C. Укажите равновеликие треугольники. в) Докажите, что на медиане треугольника есть такая точка, соединив которую с вершинами треугольника отрезками мы разобьём данный треугольник на три равновеликие части.

4.24. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников с данной боковой стороной наибольшую площадь имеет прямоугольный.

4.25. Докажите, что площадь правильного многоугольника равна половине произведения периметра этого многоугольника и его апофемы. (Напомним, что **апофема правильного многоугольника** равна расстоянию от его центра до его сторон.)

Разбираемся в решении

4.26. а) Докажите, что биссектриса угла треугольника разбивает его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. б) Используя результат задачи «а», предложите способ деления произвольного отрезка в некотором заданном отношении только циркулем и линейкой.

Решение. а) Рассмотрим треугольник ABC. Проведём его биссектрису AM (рис. 103, *а*). Из точки M проведём высоты MH и MK треугольников ABM и ACM (рис. 103, *б*). Так как точка M равноудалена от лучей AB и AC, то $MH = MK$. Поэтому отношение площадей S_1 и S_2 треугольников ABM и ACM равно отношению их сторон AB и AC, т. е. $S_1 : S_2 = AB : AC$. С другой стороны, треугольники ABM и ACM имеют одну и ту же высоту — высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A. Поэтому их площади относятся, как их основания BM и CM (задача 4.21 б), т. е. $S_1 : S_2 = BM : CM$. Из этих двух равенств и следует, что $AB : AC = BM : CM$.■

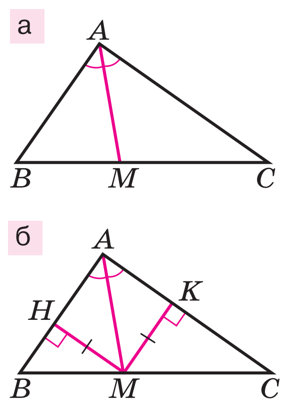


Рис. 103

Исследуем

4.27. Нарисуйте несколько равновеликих друг другу треугольников с одним и тем же основанием AB. а) Где лежат их вершины, противолежащие стороне AB? б) Где лежат вершины X равновеликих треугольников ABX, если рассматривать эти треугольники в пространстве?

4.28. Нарисуйте несколько треугольников с одним и тем же основанием AB, имеющих равные друг другу медианы, проведённые к стороне AB. Какой из таких треугольников имеет наибольшую площадь?

4.29. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Возьмите точку X на основании. Из неё на боковые стороны проведите перпендикуляры. Докажите, что их сумма не зависит от выбора точки X на стороне AC. Останется ли верным это утверждение для точки X, взятой внутри треугольника ABC? А что получится, если взять точку внутри равностороннего треугольника и проводить из неё перпендикуляры на все его стороны?

4.30. а) Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b. Они взаимно перпендикулярны. Чему равна площадь этого четырёхугольника? б) Изменится ли полученный результат, если: 1) четырёхугольник не будет выпуклым; 2) диагонали не будут взаимно перпендикулярны?

4.31. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построили равносторонние треугольники. Будет ли для площадей этих фигур выполняться утверждение, аналогичное теореме Пифагора?

Рассуждаем

4.32. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

★ 4.2. Формула Герона

Легко найти площадь треугольника, если уже известны одна из его сторон и опущенная на неё высота. А если высота ещё не известна, то приходится её искать, выражать через другие данные треугольника, например через его стороны. Делать это достаточно сложно, как вы, наверное, уже убедились решая задачи. Но если воспользоваться формулой (4) для квадрата высоты h_a треугольника (решение задачи 3.6 п. 3.3) и вспомнить, что числитель в этой дроби равен $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$, то, дважды разложив его на множители как разности квадратов, получим такое равенство:

$$4a^2h_a^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a).$$

Правую часть этого равенства можно представить как $16p(p - a)(p - b)(p - c)$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, а слева в этом равенстве стоит $16S(T)^2$. Поэтому площадь $S(T)$ треугольника T выражена через его стороны a, b, c формулой

$$S(T) = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}\,. \qquad (3)$$

Выразить площадь треугольника через его стороны смог ещё в I в. греческий геометр Герон, а до него Архимед решал эту задачу для частного случая. Поэтому формулу (3) называют формулой Герона.★

Вопросы для самоконтроля

1. Разложите на множители числитель в выражении (4) из п. 3.4 на с. 52.
2. Выведите формулу Герона.

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

4.33. Найдите из формулы Герона выражение для площади: а) равностороннего треугольника со стороной a; б) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

Вычисляем

4.34. Найдите площади треугольников, стороны которых равны: а) 5, 6, 7; б) 5, 11, 12; в) 5, 8, 11.

4.35. Найдите площадь поверхности четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной 4, а боковые рёбра имеют длины 3, 3, 5, 5.

4.3. Трапеция. Площадь трапеции

Мы уже говорили, что, зная, как найти площадь треугольника, можно найти площадь любого многоугольника, разбивая его на треугольники. Но для некоторых многоугольников этого каждый раз не делают, а выводят формулы, по которым сразу вычисляют их площадь. Например, вы давно знаете, что площадь прямоугольника равна произведению его измерений, а решив задачу 4.25, вы вывели формулу для вычисления площади правильного многоугольника. Мы рассмотрим два вида четырёхугольников — трапецию и параллелограмм, площади которых вычисляют по простым формулам. Они определяются парами параллельных сторон: в трапеции одна такая пара, а в параллелограмме две (рис. 104).

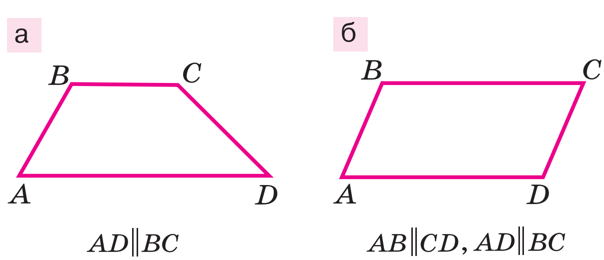


Рис. 104

Рис. 105

Итак, **трапецией** называется четырёхугольник, у которого только одна пара параллельных сторон (рис. 104, *а*). Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие — **боковыми сторонами**. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется **равнобедренной** (или **равнобокой**, рис. 105). **Высотой трапеции** называется общий перпендикуляр её оснований (или прямых, содержащих основания, рис. 106). Высотой называется также длина этого перпендикуляра.

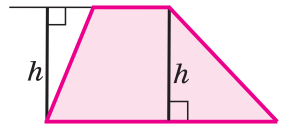


Рис. 106

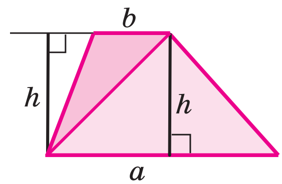


Рис. 107

Теорема 4 (*о площади трапеции*). **Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты, т. е. если a и b — основания трапеции, h — её высота и S — площадь трапеции, то**

$$S = \frac{a+b}{2}h. \qquad (4)$$

Доказательство. □ Проведя диагональ трапеции (рис. 107), получим два треугольника с основаниями a и b и одной высотой h. Их площади будут равны $S_1 = \frac{1}{2}ah$ и $S_2 = \frac{1}{2}bh$. $S = S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2}h$. ■

Замечание. Треугольник можно считать вырожденной трапецией, когда одно из её оснований «стянулось» в точку. В этом случае можно считать $b = 0$ и из равенства (4) получается равенство $S = \frac{1}{2}ah$ для площади треугольника.

Справка словесника. Греческое слово *трапеция* обозначает *обеденный стол*. Однокоренные слова — *трапеза*, *трапезная*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое трапеция и равнобедренная трапеция?
2. По какой формуле вычисляют площадь трапеции? Можно ли из этой формулы получить формулу для площади треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.36. Докажите следующие *свойства равнобедренной трапеции:*
а) углы, прилежащие к основанию равнобедренной трапеции, равны (другими словами, боковые стороны равнобедренной тра-

пеции равнонаклонены к её основанию); б) диагонали равнобедренной трапеции равны; в) равнобедренная трапеция имеет ось симметрии, которая проходит через середины её оснований.

4.37. Докажите *признак равнобедренной трапеции:* если углы, прилежащие к основанию трапеции, равны, то она равнобедренная.

4.38. Докажите, что диагональ трапеции равнонаклонена к её основаниям.

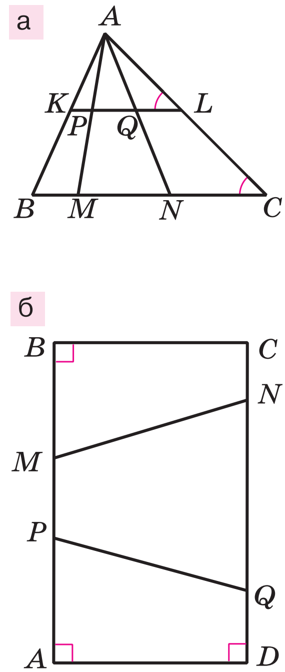


Рис. 108

Смотрим

4.39. Назовите трапеции на рисунке 108. Укажите равные углы на этом рисунке.

Работаем с формулой

4.40. Можно ли из формулы площади трапеции получить формулу площади прямоугольника?

Планируем

4.41. Как найти площадь трапеции, если известны длины всех её сторон? Приведите численные примеры (результат получите с точностью до двух знаков после запятой).

Вычисляем

4.42. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Найдите площадь этой трапеции, если её основания равны: а) 4 и 6; б) a и b. (У прямоугольной трапеции есть прямой угол.)

4.43. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой: а) основания равны 6 и 14, а наклонная к ним боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а наклонная к ним боковая сторона равна c.

4.44. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой: а) основания равны 8 и 20, а боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а боковая сторона равна c.

4.45. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны: а) 2 и 1; б) 4 и 10; в) a и b.

4.46. Вычислите площадь трапеции, у которой: а) основания 1,2 см и 8 мм, а высота 0,02 м; б) основания 1,5 м и 9 дм, а высота 60 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

4.47. Выразите через x площадь равнобедренной трапеции, у которой: а) меньшее основание равно 1, большее равно 2, а боковые стороны равны x; б) большее основание равно x, а все другие стороны равны 1; в) большее основание в 2 раза больше меньшего основания и при этом три стороны трапеции равны x.

Доказываем

4.48. Докажите, что диагональ правильного пятиугольника отсекает от него равнобедренную трапецию. Найдите её углы.

4.49. Докажите свойства точки пересечения диагоналей равнобокой трапеции. а) Она равноудалена от вершин каждого основания. б) Она равноудалена от её боковых сторон. в) Она ближе к меньшему основанию трапеции, чем к большему.

Рассуждаем

4.50. Сколько острых, прямых и тупых углов может иметь трапеция?

4.51. Верно ли утверждение: если два угла трапеции равны, то она равнобедренная?

§ 5. Параллелограмм и его площадь

5.1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Напомним, что **параллелограммом** называется четырёхугольник, имеющий две пары параллельных сторон (рис. 109). С частными случаями параллелограммов — прямоугольниками и квадратами и с их свойствами вы уже знакомы. Параллелограммы вы рисовали каждый раз, когда рисовали куб или прямоугольный параллелепипед — их грани изображались параллелограммами. Познакомимся теперь с общими свойствами параллелограммов.

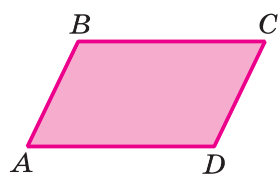


Рис. 109

Во-первых, отметим, что параллелограмм является пересечением двух полос между параллельными прямыми (рис. 110, *а*). Ширина каждой из этих полос называется **высотой параллелограмма** (рис. 110, *б*). Таким образом, у параллелограмма две высоты. Высотой параллелограмма называют также любой общий перпендикуляр двух параллельных прямых, на которых лежат противоположные стороны параллелограмма.

Разнообразные свойства параллелограмма мы объединим в одной теореме.

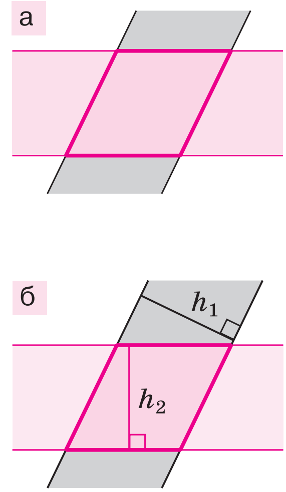


Рис. 110

Теорема 5 (*о свойствах параллелограмма*). **Параллелограмм обладает следующими свойствами: 1) диагональ разбивает параллелограмм на равные треугольники; 2) противоположные стороны параллелограмма равны; 3) противоположные углы параллелограмма равны; 4) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам.**

Доказательство. 1) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Проведём его диагональ AC (рис. 111, *а*). В треугольниках ABC и ACD общая сторона AC и соответственно равные углы, прилежащие к этой стороне: $\angle 1 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC) и $\angle 2 = \angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных AB и CD и секущей AC). Следовательно, треугольники ABC и ACD равны (по второму признаку равенства треугольников). Первое свойство параллелограмма доказано.

2—3) Второе и третье свойства вытекают из первого свойства: $AB = CD$, $BC = DA$ и $\angle B = \angle D$ как соответственные элементы равных треугольников ABC и CDA.

4) Проведём вторую диагональ BD параллелограмма $ABCD$ и обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD (рис. 111, *б*). Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников, так как в этих треугольниках $AD = CB$, $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 6$ (как накрест лежащие). Поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$. ■

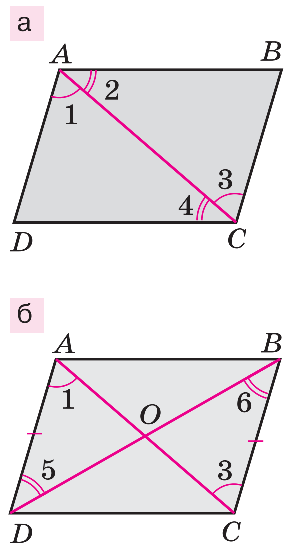


Рис. 111

Отметим, что из свойства 4 вытекает, что *точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.*

Вопросы для самоконтроля

1. Какие определения вы можете дать параллелограмму?
2. Что такое высота параллелограмма?
3. Перечислите свойства параллелограмма.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.1. Докажите ещё два свойства параллелограмма: а) сумма его соседних углов равна 180°; б) диагональ параллелограмма образует с противоположными сторонами равные углы.

5.2. Докажите *два признака прямоугольника*: прямоугольником является параллелограмм, у которого: а) диагонали равны и б) один из углов прямой.

Смотрим

5.3. На рисунке 112 обозначены некоторые величины параллелограмма $ABCD$. Какие ещё величины можно найти?

Рисуем

5.4. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$, в котором: а) AD меньше AB и угол A тупой; б) BC меньше CD и угол B тупой; в) AD больше AB и угол C острый; г) BC больше AB и угол D прямой.

5.5. Нарисуйте параллелограмм, имеющий диагональ, которая: а) короче каждой стороны; б) длиннее каждой стороны; в) равна одной из сторон; г) равна каждой стороне.

Планируем

5.6. Как разбить параллелограмм на две центрально-симметричные друг другу трапеции?

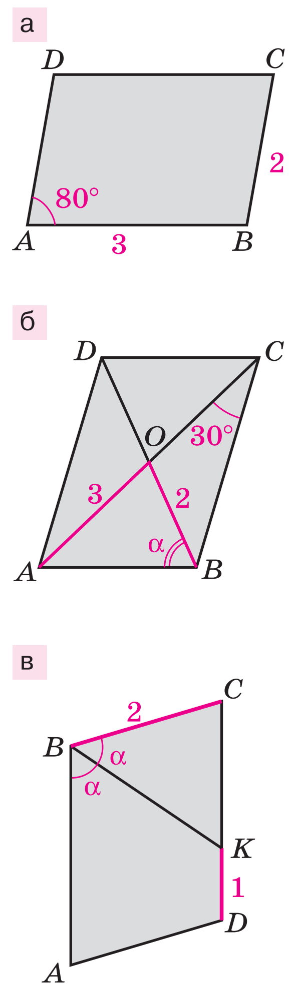


Рис. 112

Представляем

5.7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Не рисуя его, постарайтесь ответить на такие вопросы: а) Пусть AD больше AB. Что больше: AD или CD? BC или AB? б) Пусть угол B тупой. Какой угол больше: угол C или угол D?

Вычисляем

5.8. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 2 м и: а) разность соседних сторон равна 1 см; б) отношение соседних сторон равно 2; в) параллелограмм составлен из двух равнобедренных треугольников периметры которых равны 1,6 м?

5.9. Вычислите все углы параллелограмма, если один из его углов: а) $20°$; б) $100°$; в) в 2 раза больше другого; г) на $90°$ больше другого.

Доказываем

5.10. Докажите, что в параллелограмме: а) биссектрисы соседних углов перпендикулярны; б) биссектрисы противоположных углов параллельны (или лежат на одной прямой).

5.11. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма провели прямую. Она пересекает стороны параллелограмма в точках M и P. Докажите, что точка O — середина отрезка MP.

Строим

5.12. Постройте параллелограмм по сторонам и высоте.

Рассуждаем

5.13. Сколько углов каждого вида может быть в параллелограмме? А в трапеции?

5.14. Сформулируйте и проверьте утверждения, обратные утверждениям о свойствах параллелограмма: 1) диагональ разбивает параллелограмм на равные треугольники; 2) противоположные стороны параллелограмма равны; 3) противоположные углы параллелограмма равны; 4) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам.

5.2. Признаки параллелограмма

Три из четырёх свойств параллелограмма, доказанных в теореме 5 (свойства 2–4), являются *характерными свойствами параллелограмма*. Это значит, что верны обратные им утверждения, которые являются *признаками параллелограмма*. Сформулируем и докажем их.

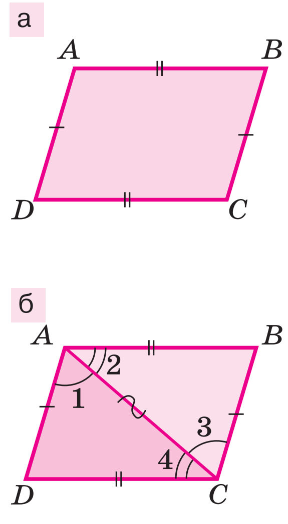


Рис. 113

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 113, *а*). Проведём его диагональ AC (рис. 113, *б*). Получим два равных треугольника ABC и CDA (они равны, поскольку соответственно равны их стороны). В этих треугольниках равны углы, лежащие против равных сторон. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$, а потому стороны AD и BC параллельны (по равенству накрест лежащих углов). Аналогично $\angle 2 = \angle 4$ и $AB \parallel CD$. ■

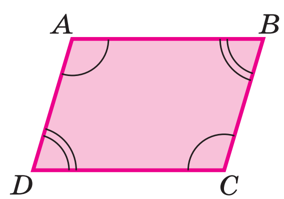


Рис. 114

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, противоположные углы которого попарно равны, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ (рис. 114). Так как $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$. Поэтому $\angle A + \angle B = 180°$ и $AD \parallel BC$ (по первому признаку параллельности прямых). ■

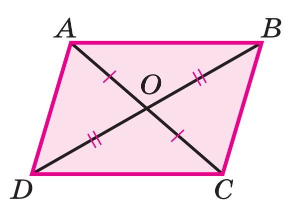


Рис. 115

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, в котором диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и выполняются равенства $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 115). Ясно, что $\triangle AOB = \triangle COD$ и $\triangle BOC = \triangle DOA$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AB = CD$ и $BC = AD$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку). ■

К доказанным трём признакам добавим ещё один.

Четвёртый признак *параллелограмма.* **Четырёхугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны, является параллелограммом.**

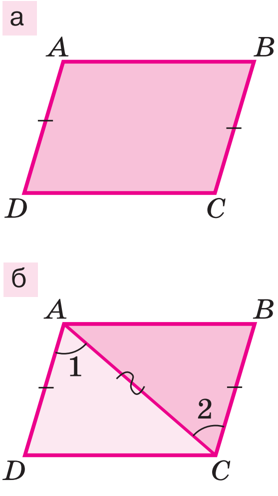


Рис. 116

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, у которого $AD = BC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 116, *а*). Проведём диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA (рис. 116, *б*). В этих треугольниках сторона AC общая, $AD = CB$ и $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Поэтому треугольники ABC и CDA равны, $AB = CD$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку).■

Замечание. Теперь, опираясь на четвёртый признак параллелограмма, мы можем утверждать, что основания трапеции равными быть не могут.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете признаки параллелограмма?
2. Какие характерные признаки параллелограмма вам известны?
3. Почему прямоугольник является параллелограммом?

ЗАДАЧИ

Смотрим

5.15. Объясните, откуда следует, что четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 117 — параллелограмм.

5.16. Назовите параллелограммы, изображённые на рисунке 118.

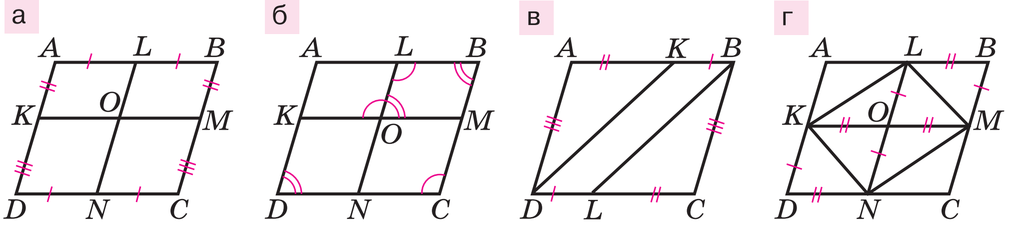


Рис. 117

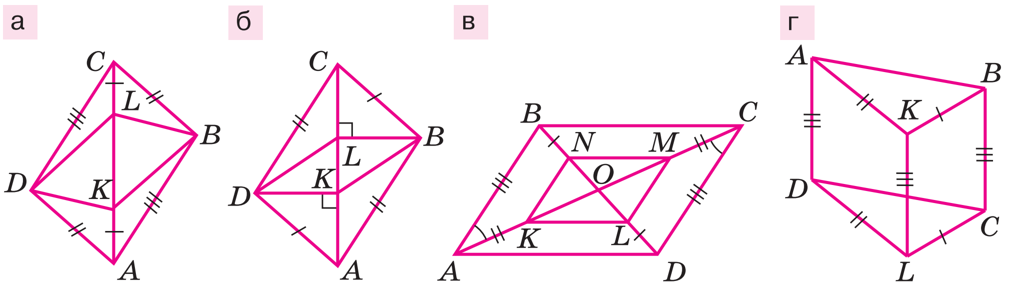


Рис. 118

Рисуем

5.17. Нарисуйте параллелограмм как результат пересечения двух: а) углов; б) треугольников; в) параллелограммов; г) трапеций.

5.18. Нарисуйте параллелограмм как объединение: а) двух треугольников; б) двух параллелограммов; в) прямоугольника и двух треугольников; г) треугольника и трапеции; д) двух трапеций.

Планируем

5.19. Как построить параллелограмм: а) по двум сторонам и одной из диагоналей; б) по диагоналям и углу между диагоналями; в) по стороне и диагоналям?

5.20. а) Как разбить трапецию на параллелограмм и треугольник? б) Как построить трапецию по четырём сторонам?

Доказываем

5.21. Медиану AO треугольника ABC продолжили на отрезок OP, равный медиане AO. Докажите, что четырёхугольник $ABPC$ — параллелограмм.

5.22. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане между ними.

5.23. Напомним, что **средней линией четырёхугольника** называется отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон. Докажите, что средняя линия параллелограмма параллельна его стороне и равна ей.

5.24. Нарисуйте два параллелограмма $ABCD$ и $ABKM$. Докажите, что или CD и KM лежат на одной прямой, или четырёхугольник $CKMD$ — параллелограмм.

5.25. Нарисуйте два параллелограмма $ABCD$ и $AMCP$. Докажите, что: а) отрезки AC, BD и MP проходят через одну точку; б) четырёхугольник $BMDP$ — параллелограмм.

Представляем

5.26. Всегда ли четырёхугольник, у которого имеются две пары равных сторон, является параллелограммом?

Исследуем

5.27. Параллелограмм нарисовали мелом на доске. Потом часть его стёрли. Сможете ли вы восстановить параллелограмм, если от него остались: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) сторона и точка пересечения диагоналей; д) три вершины; е) середины трёх сторон?

Применяем геометрию

5.28. Как получить параллелограмм (не прямоугольник) одними только сгибаниями тетрадного листа?

5.29. Используя свойства и признаки параллелограмма, придумайте способ нахождения расстояния между двумя пунктами на одном берегу реки, находясь на другом её берегу. (Расстояния до этих пунктов вы знаете.)

5.3. Частные виды параллелограмма

Рис. 119

С одним из частных видов параллелограмма — прямоугольником (рис. 119) — вы знакомы с первых классов.

Прямоугольник можно определить как четырёхугольник, все углы которого равны.

□ Действительно, сумма всех углов четырёхугольника равна 360°. Поэтому если все углы четырёхугольника равны, то каждый из них равен 90°. Такой четырёхугольник является прямоугольником.■

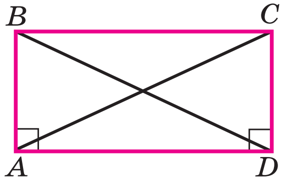


Рис. 120

Прямоугольник, конечно, является параллелограммом (например, по второму признаку). Среди всех параллелограммов прямоугольники выделяются следующим характерным свойством:

ХАРАКТЕРНОЕ СВОЙСТВО *прямоугольника*: **1) диагонали прямоугольника равны; 2) параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.**

□ Докажем первое утверждение. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 120). Проведём его диагонали AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны (по двум катетам). Поэтому равны их гипотенузы: $AC = BD$. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ равны диагонали AC и BD. Тогда $\triangle ABC = \triangle BAD$ (по трём сторонам: $BC = AD$, $AC = BD$, сторона AB — общая). Поэтому углы ABC и BAD равны. А так как их сумма равна $180°$, то они прямые. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.■

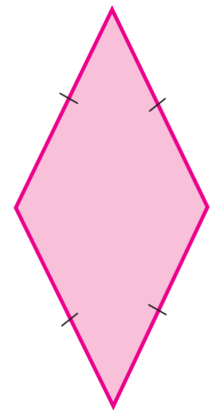


Рис. 121

Мы рассмотрели четырёхугольники с равными углами — прямоугольники. Теперь рассмотрим четырёхугольники, все стороны которых равны друг другу (рис. 121). Они называются ромбами. Итак, **ромбом** называется четырёхугольник, все стороны которого равны друг другу.

Ромб является параллелограммом (согласно признаку 1). Среди всех параллелограммов ромбы выделяются следующими двумя характерными свойствами:

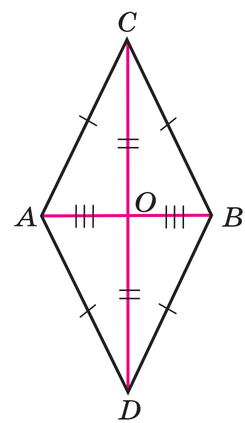


Рис. 122

СВОЙСТВО 1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

□ Действительно, четыре треугольника, на которые разбивают ромб $ABCD$ его диагонали, равны друг другу (по трём сторонам, рис. 122). Поэтому равны друг другу их углы с вершиной в точке пересечения диагоналей. Следовательно, каждый из этих углов равен $90°$.■

СВОЙСТВО 2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

□ Из равенства четырёх треугольников ACO, BCO, BDO и DAO (рис. 122) следует равенство их соответственных углов. А это означает, что выполняется свойство 2.■

Утверждения, обратные этим свойствам, докажите, решив задачи к этому пункту.

Как вы знаете, у квадрата все углы прямые и все стороны равны друг другу. Поэтому квадрат

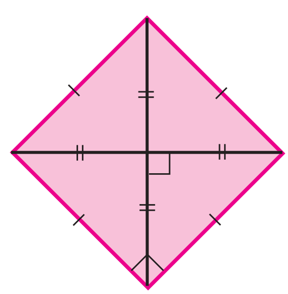


Рис. 123

является и прямоугольником и ромбом одновременно. Следовательно, *диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны* (рис. 123).

Справка словесника. Слово *ромб* происходит от греческого слова *rhombos*, означающего *бубен*. Оказывается, в древности бубны — музыкальные инструменты — были не круглыми, как сейчас, а имели форму четырёхугольника с равными сторонами. Такие бубны сохранились в игральных картах.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким свойством выделяются прямоугольники среди четырёхугольников?
2. Каким свойством выделяются прямоугольники среди параллелограммов? Выделяет ли это свойство прямоугольник среди четырёхугольников?
3. Какое свойство выделяет ромбы среди четырёхугольников?
4. Какие свойства выделяют ромбы среди параллелограммов?
5. Какой четырёхугольник является одновременно прямоугольником и ромбом?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.30. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника равноудалена от его вершин.

5.31. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

Рисуем

5.32. Нарисуйте ромб как пересечение двух: а) углов; б) треугольников.

5.33. а) Нарисуйте четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, но не ромб. б) Нарисуйте четырёхугольник с равными диагоналями, но не прямоугольник.

Представляем

5.34. Как разбить ромб на: а) два равных треугольника; б) четыре равных треугольника?

Работаем с формулой

5.35. Выразите сторону a ромба через его диагонали b и c. Вычислите сторону ромба, если его диагонали равны 6 и 8.

5.36. Выразите диагональ c ромба через его сторону a и другую диагональ b. Вычислите эту диагональ, если $a = 13$ и $b = 10$.

Планируем

5.37. Как восстановить ромб, если на рисунке остались такие его элементы: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не принадлежащая ей; г) сторона и точка на противоположной стороне?

5.38. Как построить ромб, у которого периметр равен 80 см и: а) острый угол равен 30°; б) одна из диагоналей равна стороне; в) диагонали равны?

5.39. Как построить ромб по: а) стороне и углу; б) стороне и диагонали; в) двум диагоналям; в) одной из диагоналей и углу?

Исследуем

5.40. Можно ли восстановить прямоугольник, если на рисунке остались такие его элементы: а) сторона и точка на его противоположной стороне; б) диагональ и точка на другой диагонали; в) точка пересечения диагоналей и по одной точке на противоположных сторонах?

5.41. У каких параллелограммов имеются оси симметрии? Сколько осей симметрии эти параллелограммы могут иметь? Как идут эти оси?

Строим

5.42. Постройте ромб: а) по стороне и одной из диагоналей; б) по диагоналям; в) по углу и одной из диагоналей; г) с вершинами на сторонах данного прямоугольника; д) с вершинами на сторонах данного равнобедренного треугольника.

Применяем геометрию

5.43. Как из прямоугольного листа бумаги одними только его сгибаниями получить ромб? А квадрат?

5.44. Лист бумаги имеет форму ромба. Как из него склеить конверт?

5.45. Прямоугольный лист бумаги согнули вчетверо — пополам и ещё раз пополам в другом направлении. Взяв ножницы, вы хотите отрезать угол полученного листа так, чтобы после разворачивания обратно в центре исходного листа получилась дыра в форме квадрата. Как вы сделаете отрез? А как сделать отрез, если нужна дыра в форме ромба?

Рассуждаем

5.46. В каком ромбе диагональ равна его стороне?

5.47. Объясните, почему вершины ромба, не являющегося квадратом, не лежат на одной окружности.

5.4. Площадь параллелограмма

Теорема 6 **Площадь параллелограмма равна произведению стороны параллелограмма и его высоты, проведённой к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле**

$$S = ah_a, \qquad (1)$$

где a — сторона параллелограмма и h_a — проведённая к ней высота (рис. 124).

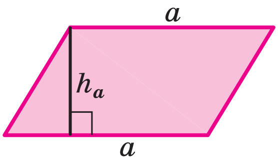


Рис. 124

Доказательство. Проведём диагональ параллелограмма. Она разбивает параллелограмм на два равных треугольника со стороной a и высотой h_a (рис. 125). Площади этих треугольников равны $\frac{1}{2}ah_a$. Площадь S параллелограмма равна сумме площадей этих треугольников. Значит,

$$S = \frac{1}{2}ah_a + \frac{1}{2}ah_a = ah_a. \blacksquare$$

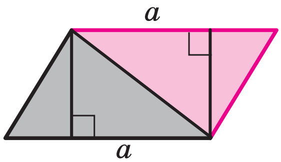


Рис. 125

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют высотой параллелограмма? Сколько у параллелограмма высот?
2. Напишите формулу для вычисления высот параллелограмма.

ЗАДАЧИ

Смотрим

5.48. Какую часть от площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника P на рисунке 126?

Представляем

5.49. На плоскости равновеликие друг другу параллелограммы имеют общее основание AB. Где лежат стороны этих параллелограммов, противоположные стороне AB? А если такие параллелограммы не лежат в одной плоскости?

Работаем с формулой

5.50. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, h_a и h_b — длины высот, проведённых к ним. а) Докажите, что

$$ah_a = bh_b. \qquad (2)$$

б) Выразите из формулы (2) каждую из величин. в) Запишите формулу (2) в виде пропорции и дайте словесную формулировку этой пропорции. г) Докажите, что в ромбе равны высоты, проведённые к соседним сторонам. д) Докажите утверждение, обратное предыдущему. е) Докажите, что бóльшая высота параллелограмма проводится на меньшую сторону. ж) Докажите утверждение, обратное предыдущему.

Планируем

5.51. Как найти площадь параллелограмма, если известны: а) его стороны и одна из диагоналей; б) диагонали и одна из сторон? Приведите численные примеры (результат получите с точностью до двух знаков после запятой).

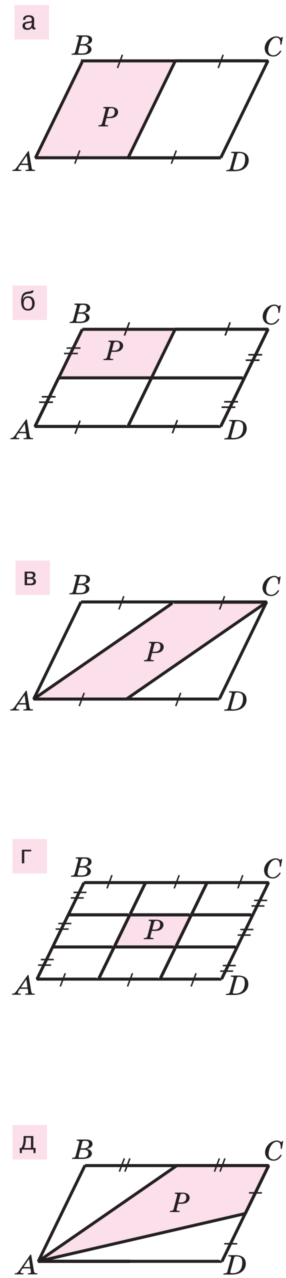


Рис. 126

Вычисляем

5.52. Вычислите площадь параллелограмма, у которого: а) сторона равна 14 мм, а высота к ней — 3,2 см; б) сторона равна 1532 мм, а высота к ней — 0,16 м. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

5.53. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°. Найдите его площадь, если стороны параллелограмма равны: а) 6 см и 8 см; б) a и b. Решите эту задачу и для угла A, равного 45°.

5.54. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны: а) 10 и 24; б) a и b.

Ищем границы

5.55. Какой среди всех параллелограммов с данными сторонами a и b имеет наибольшую площадь? Чему она равна?

Исследуем

5.56. а) Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из этих фигур имеет бóльшую площадь? б) Квадрат и ромб имеют одинаковые площади. Сравните периметры этих фигур.

Рассуждаем

5.57. Запишите формулу для площади трапеции. При каких условиях из этой формулы можно получить формулу для площади параллелограмма? А формулу для площади треугольника?

▲ 5.5. Параллелепипед. Призмы

Вы уже знакомы с одним многогранником, все грани которого — параллелограммы, а точнее, параллелограммы частного вида — прямоугольники: это **прямоугольный параллелепипед** (рис. 127, *а*).

А вообще **параллелепипедом** называют многогранник, у которого шесть граней и все они — параллелограммы (рис. 127, *б*). Из этого определения и свойств параллелограмма вытекает, что двенадцать рёбер параллелепипеда распадаются на три группы рёбер по четыре равных друг другу и взаимно параллельных между собой ребра в каждой из трёх групп (рис. 128). Два параллельных друг другу ребра параллелепипеда,

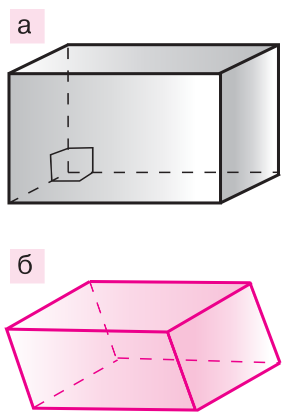


Рис. 127

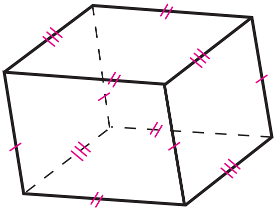


Рис. 128

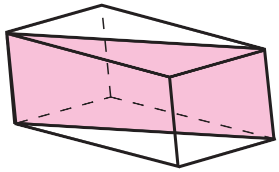


Рис. 129

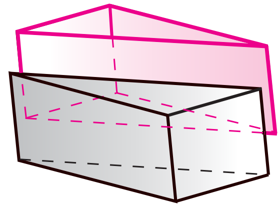


Рис. 130

не лежащие в одной его грани, являются противоположными сторонами **диагонального сечения параллелепипеда,** которое также представляет собой параллелограмм (рис. 129).

Диагональное сечение параллелепипеда рассекает его на две **треугольные призмы** (рис. 130). Из треугольных призм можно составить более сложные призмы (подобно тому как из треугольников составляют многоугольники, рис. 131). Вообще ***n*-угольной призмой** называется многогранник, имеющий $n + 2$ граней, из которых две грани, называемые **основаниями призмы**, представляют собой n-угольники с соответственно равными и параллельными сторонами, а остальные n граней — параллелограммы. Эти грани называют **боковыми гранями** призмы, а их стороны, не лежащие в основаниях призмы, — **боковыми рёбрами призмы**. Все боковые рёбра призмы равны и параллельны друг другу.

Ясно, что параллелепипед — особый случай четырёхугольной призмы: любая пара его противоположных граней может считаться её основаниями.

Прямой называется призма, у которой боковые грани являются прямоугольниками (рис. 132). Плоскости боковых граней прямой призмы также перпендикулярны плоскостям её оснований. Боковые рёбра прямой призмы обычно изображают вертикальными отрезками.

Призмы, не являющиеся прямыми, называют **наклонными** (рис. 133).

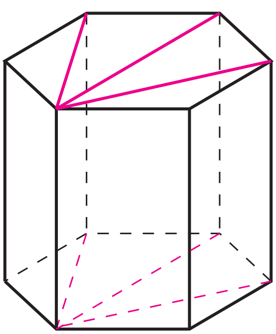


Рис. 131

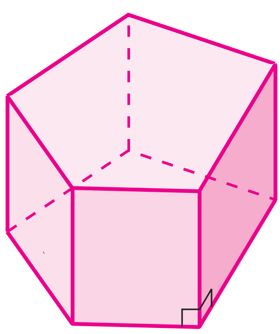


Рис. 132

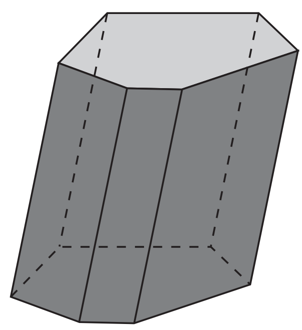


Рис. 133

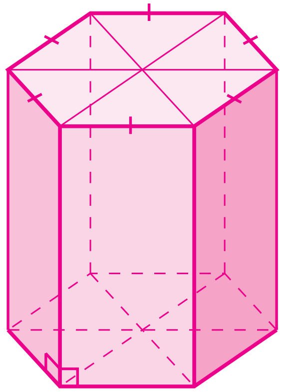


Рис. 134

Рис. 135

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной призмой** (рис. 134).

Многие архитектурные сооружения представляют собой сочетания правильных призм и пирамид (рис. 135).

Справка словесника. Греческое слова πρισμα означает *отпиленный кусок*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется параллелепипедом?
2. Что такое призма?
3. Какая призма называется прямой?
4. Какая призма называется правильной?

ЗАДАЧИ

Рисуем

5.58. Из куба сделали детали, проекции которых изображены на рисунке 136. Нарисуйте эти детали.

5.59. Нарисуйте три отрезка, идущие из одной точки. Достройте их до изображения параллелепипеда.

5.60. Нарисуйте треугольную призму. Дорисуйте её изображение до изображения параллелепипеда. Из какой треугольной призмы получится прямоугольный параллелепипед?

5.61. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. Дорисуйте его изображение до изображения треугольной призмы с основанием ABC и боковым ребром PA.

5.62. Нарисуйте треугольную призму. Разбейте её на тетраэдры, вершинами которых являются вершины призмы. Сколько получилось тетраэдров?

5.63. Нарисуйте какой-либо многогранник, но не параллелепипед, все грани которого — параллелограммы.

5.64. Нарисуйте параллелепипед. Разбейте его на тетраэдры, все вершины которых являются вершинами параллелепипеда. Сколько получилось тетраэдров?

Представляем

5.65. Сколько параллельных и равных друг другу рёбер имеет параллелепипед? Сколько диагональных сечений имеет параллелепипед?

5.66. Какие многоугольники могут получиться в сечении параллелепипеда плоскостью? Сделайте рисунки, подтверждающие ваши представления.

Планируем

5.67. Вспомните, как мы составляли правильные многоугольники из равнобедренных треугольников (см. п. 1.4). Предложите аналогичное построение для правильных призм. Из каких призм можно составить правильную призму?▼

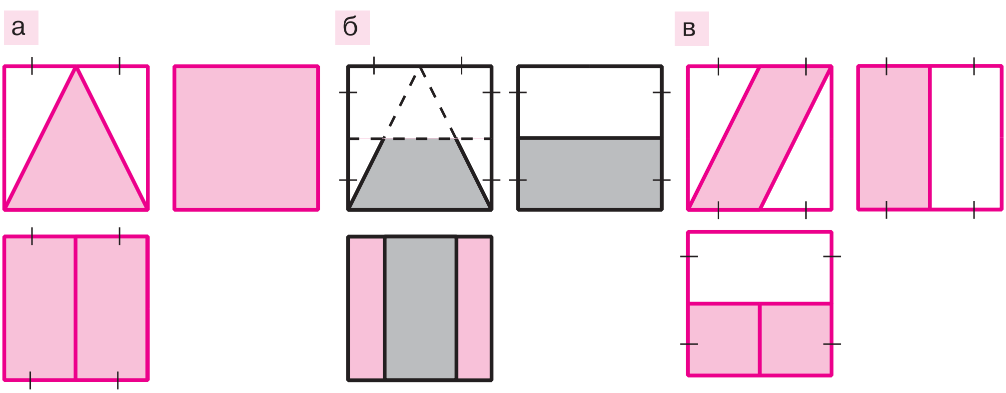


Рис. 136

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

Смотрим

I.1. Установите вид четырёхугольника $ABCD$, вершины которого указаны на рисунке 137.

Планируем

I.2. Как разметить квадрат со стороной 2 м (рис. 138), чтобы площадь буквы равнялась 1 м^2?

I.3. Как построить параллелограмм по: а) диагоналям и высоте; б) углу, высоте и диагонали, проведённым из одной вершины?

I.4. Как построить трапецию по: а) основаниям, высоте и диагонали; б) основаниям и диагоналям?

I.5. Внутри угла взяли точку. Как провести такую хорду угла, которая данной точкой делилась бы пополам?

Вычисляем

I.6. Дан квадрат со стороной 1 (рис. 139). Из него вырезается фигура площадью S. Запишите формулу для вычисления площади S, если известна величина x.

I.7. Выразите как функцию от x площади таких фигур: а) прямоугольника с диагональю 1 и стороной, равной x; б) ромба, у которого одна из диагоналей равна 2, а сторона равна x; в) равнобедренной трапеции, у которой большее основание равно 1, а диагональ, равная x, составляет с боковой стороной прямой угол.

I.8. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой: а) сторона основания равна 6, а боковое ребро — 5; б) все рёбра равны a.

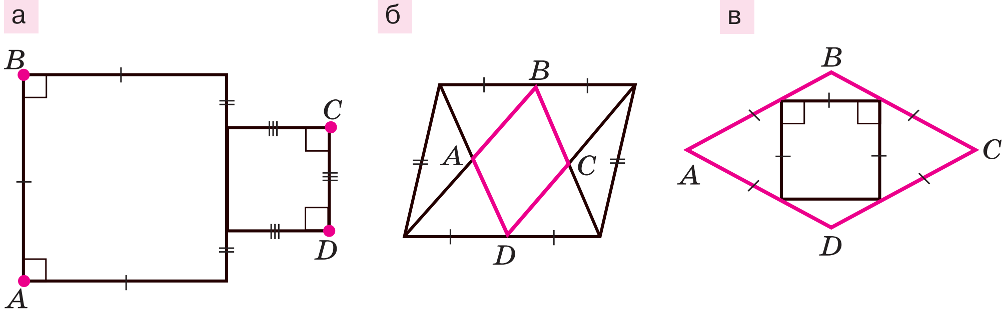


Рис. 137