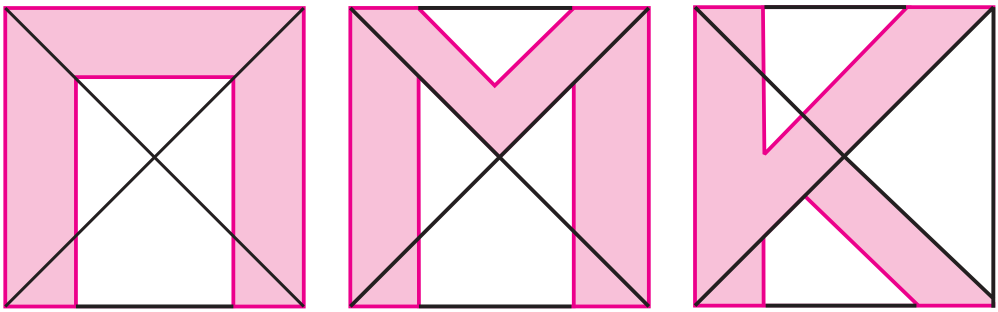


Рис. 138

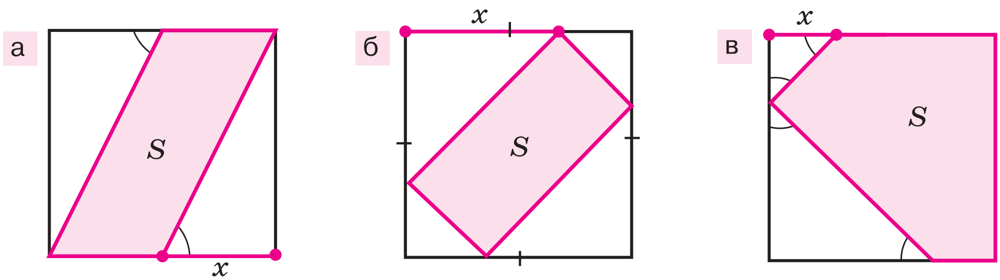


Рис. 139

I.9. Каждую сторону треугольника ABC продолжили на расстояние, равное этой стороне треугольника: AB за точку B до точки K, BC за точку C до точки M, CA за точку A до точки P. Во сколько раз площадь треугольника KMP больше площади треугольника ABC?

Ищем границы

I.10. Какова наибольшая площадь прямоугольника с: а) диагональю 1; б) периметром, равным 2?

I.11. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1. Из точки K гипотенузы проводятся перпендикуляры KL на CA и KM на CB. Обозначим площадь прямоугольника $CLKM$ как S.
а) Вычислите S, если точка K находится в середине гипотенузы.
б) Пусть $KA = x$. Найдите зависимость S от x. в) В каких границах находится $S(x)$?

I.12. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Пусть K — точка ребра BD. Обозначим площадь поверхности тетраэдра $ACKD$ как S_1, а площадь поверхности тетраэдра $ACKB$ как S_2. а) Сравните S_1 и S_2, когда $BK = KD$. б) Как изменяется отношение $S_1 : S_2$ при движении точки K по ребру BD от B к D? в) Как изменяется при этом движении площадь треугольника ACK? г) Может ли площадь треугольника ACK составлять половину от площади грани тетраэдра $ABCD$?

Доказываем

I.13. а) Отрезок AB движется по плоскости параллельно самому себе, причём его концы движутся по прямым. Докажите, что точки A и B проходят при этом одинаковые расстояния. б) Треугольник ABC движется по плоскости параллельно самому себе, причём его вершины движутся по прямым. Докажите, что площадь, заметённая при движении одной из его сторон, равна сумме площадей, заметённых при движении двумя другими его сторонами. в) Исходя из результата предыдущего пункта, докажите теорему Пифагора.

I.14. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Докажите, что три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку. Сделайте обобщение этой задачи для выпуклого многоугольника с большим числом сторон.

Исследуем

I.15. Является ли четырёхугольник параллелограммом, если одна из диагоналей делит его на равные треугольники?

I.16. На окружности отмечены по порядку точки A, B, C, D. При этом $AB = CD$ и $AD \neq BC$. Докажите, что эти точки являются вершинами трапеции.

I.17. Найдутся ли точки, являющиеся вершинами ромба на сторонах: а) прямоугольника; б) ромба; в) равнобедренного прямоугольного треугольника; г) произвольного прямоугольного треугольника; д) произвольного треугольника; е) произвольного параллелограмма?

I.18. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрису угла A. а) Пусть она пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что треугольник ABK равнобедренный. б) Пусть она пересекает прямую CD в точке L. Сколько равнобедренных треугольников вы можете насчитать на полученном рисунке? в) Пусть известны периметры треугольников ABK и KCL. Сможете ли вы найти периметр треугольника ADL? г) Может ли точка K быть серединой стороны BC? д) Оказывается, если точка K — середина стороны BC, то точка C — середина стороны DL. Докажите это.

е) Пусть DM — биссектриса угла D и точка M лежит на BC. Сможете ли вы, зная стороны параллелограмма $ABCD$, найти MK?

I.19. Установите связь между периметром, площадью и диагональю данного прямоугольника. Существует ли прямоугольник с: а) площадью 1 и периметром 2; б) площадью 1 и диагональю 1; в) периметром 2 и диагональю 1?

Применяем геометрию

I.20. Произведите необходимые расчёты для того, чтобы сделать из проволоки, использовав её всю, каркас прямоугольника площадью 150 см^2, если длина проволоки 50 см.

Занимательная геометрия

I.21. Используя только двустороннюю линейку: а) разделите пополам данный угол; б) разделите пополам данный отрезок; в) удвойте данный отрезок; г) проведите перпендикуляр к данной прямой через данную на ней точку; д) проведите прямую, параллельную данной прямой, через данную точку; е) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую; ж) постройте точку, симметричную данной точке, относительно данной прямой; з) отложите от данного луча угол, равный данному. (В двусторонней линейке используются оба её края).

Применяем компьютер

Решая задачи этой рубрики с помощью компьютера, используйте, например, среду «Живая математика», которую можно найти по адресу: http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

I.22. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD (при построении воспользуйтесь командой «Параллельная прямая»). Проверьте, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ABD. Пошевелите вершины трапеции и убедитесь, что равенство площадей сохраняется. Объясните это.

I.23. В условиях предыдущей задачи постройте точку O — пересечение диагоналей трапеции $ABCD$. Проверьте, что площадь треугольника AOD равна площади треугольника BOC. Пошевелите вершины трапеции и убедитесь, что равенство площадей сохраняется. Можете ли вы это объяснить?

I.24. Окно из цветного стекла двух цветов (зелёного и красного) имеет форму правильного восьмиугольника. Зелёное стекло заполняет прямоугольник, две стороны которого — две параллельные стороны восьмиугольника. Красное стекло — остальная часть восьмиугольника. Что больше — площадь красной части или площадь зелёной части восьмиугольника? Какую часть площади окна занимает зелёное стекло?

Глава II

Геометрия треугольника

Мы уже не раз говорили, что треугольник — важнейшая геометрическая фигура. Решение большинства геометрических задач сводится к *решению треугольников*. Под решением треугольников понимают выражение одних элементов треугольника через его другие элементы. Мы уже знаем две важнейшие теоремы, в которых говорится о зависимостях между элементами треугольников: теорему о сумме углов треугольника и теорему Пифагора. Но пока мы не знаем, как, например, найти углы треугольника, зная его стороны, или как найти сторону треугольника, зная две его стороны и угол между ними. Ясно, что такие задачи постоянно приходится решать на практике.

В теории они лежат в основе целого раздела математики — **тригонометрии**. Слово *тригонометрия* в переводе означает *измерение треугольников*.

В этой главе мы познакомимся с основными понятиями тригонометрии — синусом и косинусом, а также докажем важнейшие теоремы тригонометрии — теорему синусов и теорему косинусов. Эти теоремы позволяют *решать* любые треугольники. Опираясь на них, мы изучим в этой главе подобные треугольники.

§ 6. Синус. Применения синуса

6.1. Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной

Все основные понятия в этой главе выражаются через отношение отрезков. Например, отношение отрезков может характеризовать форму предмета: так, отношение измерений прямоугольника характеризует его вытянутость. Отношением отрезков характеризуются и различия в размерах фигур одинаковой формы: отношение периметров двух квадратов равно отношению их сторон, а отношение их площадей — квадрату отношения их сторон. Уточним понятие *отношение отрезков*.

Под **отношением** $\frac{a}{b}$ **отрезков** a **и** b понимают отношение численных значений их длин при условии, что длины измерены одной и той же единицей длины. При замене единицы длины численное значение длины каждого отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица длины меньше (больше) старой. Следовательно, *отношение численных значений длин двух отрезков не изменяется при замене единицы длины*. Именно поэтому можно говорить просто об отношении двух отрезков.

К отношению отрезков приводят многие практические задачи, например задачи, в которых говорится о подъёме при движении по ровному наклонному пути (например, по эскалатору или по ровной дороге, рис. 140). Крутизну подъёма можно охарактеризовать отношением высоты подъёма к длине пройденного пути. Мы сейчас убедимся, что это отношение не зависит от длины пройденного пути (если путь прямолинейный).

Рис. 140

Говоря о наклонном пути, естественно представлять его как одну из сторон острого или тупого угла A, другая сторона которого горизонтальна (рис. 141). Мы обозначим через p наклонную сторону угла A, а через q его горизонтальную сторону. Тогда пройденный путь — это некоторый отрезок AB на стороне p, а подъём — это перпендикуляр BC, опущенный из точки B на прямую, содержащую луч q (рис. 142). Крутизна же подъёма характеризуется отношением $\frac{BC}{AB}$, которое *не зависит от выбора точки B внутри стороны p*. Это значит, что для любой другой точки B' стороны p (рис. 143) выполняется равенство

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}. \qquad (1)$$

Докажем равенство (1).

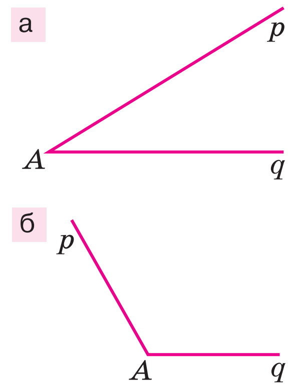


Рис. 141

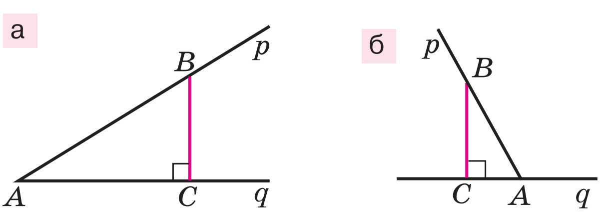


Рис. 142

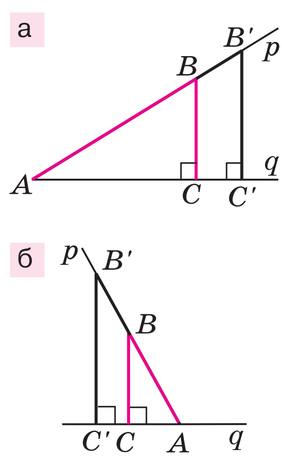


Рис. 143

Доказательство. Выберем некоторую точку M внутри луча q и проведём отрезок BM (рис. 144). Отрезок BC — высота треугольника ABM, проведённая из вершины B. Проведём другую его высоту MK из вершины M. Обозначим AM через b, а MK через h. Если S — площадь треугольника ABM, то $2S = b \cdot BC$ и $2S = h \cdot AB$. Поэтому $b \cdot BC = h \cdot AB$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{BC}{AB} = \frac{h}{b}. \qquad (2)$$

Правая часть равенства (2) не зависит от выбора точки B на луче p: если взять другую точку B' на луче p (рис. 145) и повторить проведённые уже рассуждения, то придём к равенству

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{h}{b}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) вытекает равенство (1). ■

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 7 (*об отношении перпендикуляра и наклонной*). **Отношение перпендикуляра, опущенного из некоторой точки стороны угла на другую сторону угла (или её продолжение), к расстоянию от этой точки до вершины угла не зависит от выбора точки на стороне угла.**

Замечание. Мы доказали теорему 7 для острых и тупых углов. Для прямого угла A перпендикуляр BC совпадает с отрезком AB (рис. 146). Поэтому для прямого угла их отношение равно единице, т. е. утверждение теоремы 7 тоже справедливо.

Равенство (2) говорит также о том, что не имеет значения, на какой стороне угла мы выбираем точку: в левой части этого равенства стоит отношение отрезков BC и AB, идущих из точки B стороны p, а справа — отношение отрезков MK и MA, идущих из точки M стороны q.

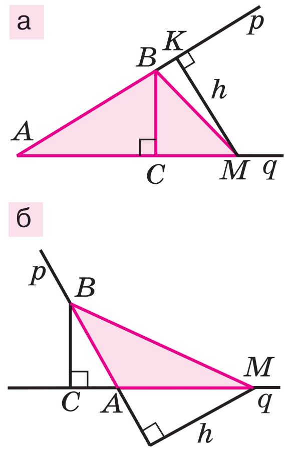


Рис. 144

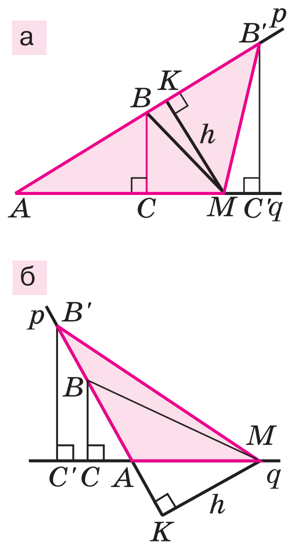


Рис. 145

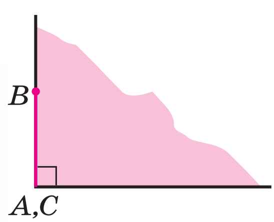


Рис. 146

Вопросы для самоконтроля

1. Изменяется ли отношение отрезков при изменении единицы длины?
2. От чего зависит отношение перпендикуляра к наклонной? Как вы это объясните?

ЗАДАЧИ

Смотрим

6.1. На рисунке 147 найдите пропорциональные отрезки и запишите равенство их отношений. Вычислите неизвестную длину отрезка x.

6.2. Нарисуйте какой-нибудь остроугольный треугольник ABC и две его высоты AM и BP. Обозначьте через O точку пересечения данных высот. Найдите на получившемся рисунке пропорциональные отрезки. Запишите равенства отношений этих пропорциональных отрезков.

Вычисляем

6.3. Чему равно отношение отрезков, длины которых равны: а) 1 см и 1 дм; б) 12 мм и 1,2 см; в) 160 см и 0,8 м; г) 1 мм и 1 км?

Выводим формулу

6.4. Запишите зависимость отрезка y от отрезка x, обозначенных на рисунке 148 данном на с. 96.

Применяем геометрию

6.5. Представьте себе, что вы стоите на движущемся эскалаторе в метро. Как бы вы могли определить глубину той станции метро, к которой ведёт этот эскалатор?

6.6. Строят прямолинейную наклонную эстакаду длиной 120 м, поднимающуюся на 48 м (рис. 149). Шесть опор для этой эстакады ставят на равных расстояниях друг от друга. Каковы высоты этих опор?

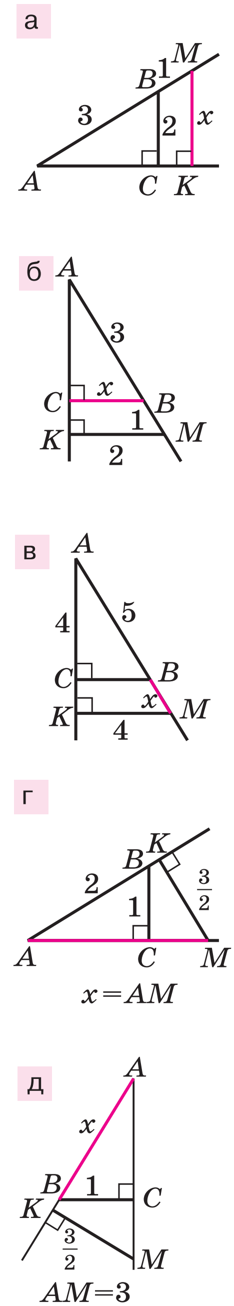


Рис. 147

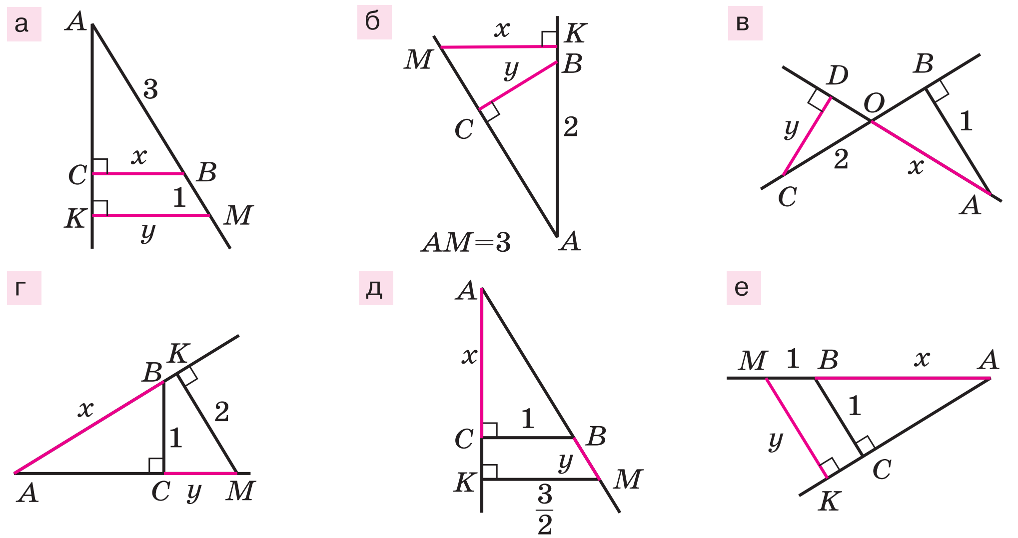


Рис. 148

6.2. Определение синуса

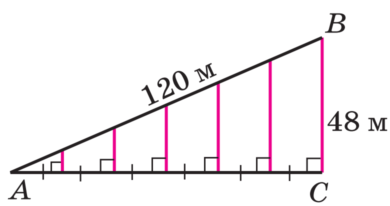


Рис. 149

Что такое синус угла A — его обозначают $\sin A$, мы фактически уже определили: это то отношение, о котором идёт речь в теореме 7. Итак, даём определение.

Определение. Если на одной стороне неразвёрнутого угла A отложить отрезок AB и опустить перпендикуляр BC на другую сторону угла A или её продолжение (рис. 150), то отношение отрезков BC и AB называется **синусом угла** A, т. е.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}. \qquad (4)$$

Вспомним практическую задачу о подъёме по наклонной прямолинейной дороге, которая привела нас к этому определению: высота подъёма BC прямо пропорциональна пройденному пути BA, а коэффициентом пропорциональности является синус угла A, т. е. $BC = (\sin A)BA$.

Из данного определения непосредственно вытекает, что **синусы смежных углов равны**.

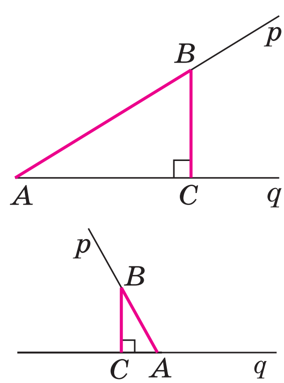


Рис. 150

Действительно, у смежных углов с общей вершиной A и отрезок AB, и перпендикуляр BC один и тот же (рис. 151). Поэтому их синусы равны.

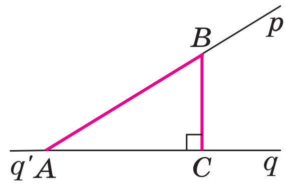


Рис. 151

Нам осталось определить синус развёрнутого угла. У развёрнутого угла A нет перпендикуляра BC — он вырождается в точку B и длина его обращается в нуль (рис. 152). Поэтому полагают, что *синус развёрнутого угла равен нулю.*

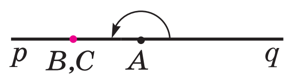


Рис. 152

Легко доказать, что *синусы равных углов равны.*

□ Действительно, рассмотрим равные друг другу острые углы: $\angle A$ и $\angle K$ (рис. 153, *а*). Внутри одной стороны угла A возьмём некоторую точку B и опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A (рис. 153, *б*). На одной из сторон угла K возьмём такую точку P, что $KP = AB$. Из точки P опустим перпендикуляр PM на другую сторону угла K (рис. 153, *в*). Построенные прямоугольные треугольники ABC и KPM равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому

$$\sin K = PM : PK = BC : BA = \sin A.$$

Если равны друг другу два тупых угла, то равны смежные с ними острые углы. Синусы этих острых углов, как уже доказано, равны. Но они по определению и являются синусами смежных им тупых углов. Поэтому синусы равных друг другу тупых углов равны.

Напомним ещё, что синусы всех прямых углов равны единице, а синусы всех развёрнутых углов равны нулю. Теперь мы рассмотрели все случаи и для всех случаев доказали, что синусы равных углов равны.■

Доказав это утверждение, мы можем теперь говорить, например, о синусе 50° и писать $\sin 50°$, понимая под этим синус любого угла, величина которого равна 50°: все такие углы равны и синусы их равны.

Удобно ввести угол величиной 0°. Таким углом можно считать вырожденный угол, стороны которого совпадают (как стрелки часов в 12 ч). Для этого вырожденного угла полагают $\sin 0° = 0$.

Так как синусы смежных углов равны, то для любого угла α от 0° до 180° справедливо равенство

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (5)$$

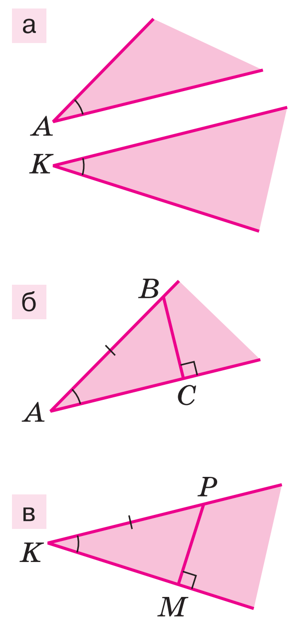


Рис. 153

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое синус угла? Как его вычислить?
2. Чему равен синус: а) прямого угла; б) угла 180°; в) угла 0°?
3. Дайте синусу несколько разных толкований.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.7. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = c$ и катетами $AC = b$, $BC = a$ проведите высоту CD. Пусть $AD = b_1$ и $BD = a_1$. Выразите через эти данные синусы острых углов треугольника ABC. Используя полученные равенства, докажите ещё раз (также см. задачу 3.38), что: 1) $a^2 = a_1c$; 2) $b^2 = b_1c$.

Рассуждаем

6.8. Верно ли, что из равенства синусов двух углов следует равенство этих углов?

Смотрим

6.9. Отношению каких отрезков равны синусы углов, обозначенных цифрами на рисунке 154? Запишите эти отношения.

Вычисляем

6.10. Найдите синусы следующих углов: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°.

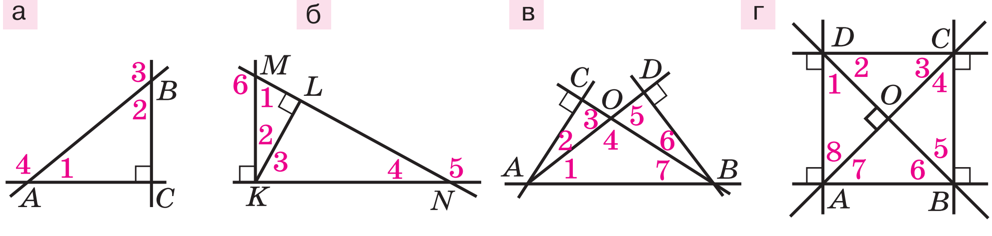


Рис. 154

6.11. Найдите синусы углов треугольника: а) равнобедренного прямоугольного; б) равностороннего; в) «египетского»; г) прямоугольного с катетами 5 см и 12 см; д) равнобедренного с основанием 8 см и боковой стороной 5 см; е) со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.

6.12. Угол ромба равен 60°. Найдите синусы углов, которые образуют со сторонами ромба его диагонали.

6.13. Вычислите синусы углов равнобокой трапеции со сторонами: а) 2, 2, 2, 4; б) a, a, a, b $(a < b)$.

6.14. Найдите синусы углов, которые образует диагональ куба с его рёбрами.

6.15. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите синусы углов, которые образует диагональ этого параллелепипеда с его рёбрами.

Доказываем

6.16. Докажите, что синус любого угла треугольника равен синусу суммы двух других его углов.

6.3. Свойства синуса и его график

Так как каждому углу соответствует его синус, то *синус является функцией угла, а точнее, функцией величины угла*.

Указжем простейшие свойства этой функции.

СВОЙСТВО 1. Синус каждого угла не больше единицы.

□ Это свойство следует из определения синуса и того, что катет BC короче гипотенузы AB. ■

Чтобы найти другие свойства, выполним следующие построения.

Проведём горизонтальную прямую p и выберем на ней точку A. Выберем единицу длины и отложим вправо от точки A единичный отрезок AM на этой прямой. Затем построим единичную полуокружность L с центром A и диаметром NM на прямой p, лежащую выше прямой p (на рисунке 155, *а* точка N лежит левее точки M). Будем рассматривать переменный угол α между фиксированным радиусом AM и подвижным радиусом AB полуокружности L (рис. 155, *б*). Считаем, что угол α возрастает от 0° до 180°. По-

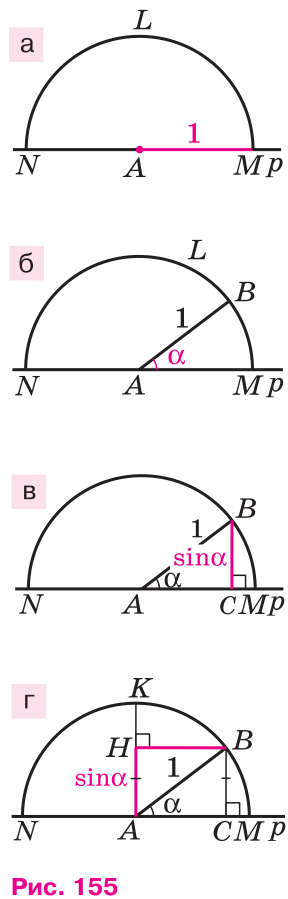


Рис. 155

скольку $AB = 1$, то синус этого угла α равен длине перпендикуляра BC, опущенного из точки B на прямую p (рис. 155, *в*). Проведём также вертикальный радиус AK и опустим на прямую AK перпендикуляр BH (рис. 155, *г*). Отрезок AH равен отрезку BC, а потому $\sin\alpha = AH$. После этих построений можно выводить свойства синуса.

СВОЙСТВО 2. **При возрастании величины острого угла от 0° до 90° его синус возрастает от 0 до 1.**

□ Действительно, когда угол α возрастает от 0° до 90°, длина отрезка AH возрастает от 0 до 1. А так как $\sin\alpha = AH$, то свойство 2 доказано. ■

СВОЙСТВО 3. **Величина острого угла определяется синусом этого угла.**

Это значит, что, зная синус острого угла, можно определить этот угол, т. е. для острых углов из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ вытекает равенство $\alpha = \beta$.

□ Действительно, угол α не может быть больше угла β, так как в этом случае $\sin\alpha$ больше $\sin\beta$ (по свойству 2). Аналогично угол α не может быть меньше угла β (в этом случае $\sin\alpha$ меньше $\sin\beta$). Поэтому $\alpha = \beta$. ■

СВОЙСТВО 4. **При возрастании величины тупого угла от 90° до 180° его синус убывает от 1 до 0.**

Аналогично свойству 3 нетрудно установить, что *из равенства синусов тупых углов следует равенство самих углов*. Если же вид углов неизвестен, то из равенства синусов равенство самих углов не следует: углы могут быть смежными. Например, если $\sin\alpha = \sin\beta = 0{,}5$, то один из этих углов может быть равен 30°, а другой — 150°.

Если задана величина острого угла в градусах, то синус этого угла находят по таблицам (см. с. 175 учебника) или с помощью калькулятора. Синус тупого угла находят как синус смежного с ним острого угла. По таблицам же или с помощью калькулятора решают и обратную задачу — находят величину острого угла, если известен его синус. Сколь угодно точное вычисление синуса для любых углов осуществляется по формулам высшей математики.

На рисунке 156 изображён график синуса: на горизонтальной оси откладывается угол в градусах, на вертикальной — значение его синуса. На графике хорошо видно, как изменяется синус при изменении угла от 0° до 180°.

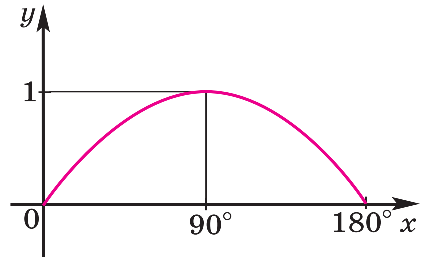


Рис. 156

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства синуса вы знаете?
2. Какое значение синуса угла определяет угол однозначно?
3. Верны ли такие утверждения: а) если углы не равны, то и синусы их не равны; б) если синусы углов не равны, то и сами углы не равны; в) большему углу соответствует больший синус; г) меньшему углу соответствует меньший синус?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

6.17. Расположите в порядке возрастания синусы таких углов: а) 25°, 15°, 65°, 10°; б) 170°, 100°, 140°; в) 105°, 35°, 74°, 118°, 58°, 17°, 178°.

6.18. Всегда ли наибольший из трёх углов треугольника тот угол, синус которого будет наибольшим?

Строим

6.19. Постройте острые углы, синусы которых равны: а) 0,4; б) $\frac{1}{3}$; в) 0,6. Найдите величины этих углов.

6.20. Постройте тупые углы, синусы которых равны: а) 0,2; б) $\frac{2}{3}$; в) 0,8. Найдите величины этих углов.

Оцениваем

6.21. В каких границах лежит синус угла α, если: а) $0° < \alpha < 60°$; б) $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$; в) $120° \leqslant \alpha < 150°$?

Доказываем

6.22. Докажите, что треугольник, синусы двух углов которого равны, равнобедренный.

6.23. Из одной и той же точки A к данной прямой p проводятся наклонные разной длины. а) Докажите, что, чем больше наклонная, тем меньший угол она образует с прямой p. б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению «а».

6.24. К данной прямой p проводятся различные наклонные равной длины. а) Докажите, что, чем ближе к прямой другой конец наклонной, тем меньший угол она образует с прямой. б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению «а».

Применяем геометрию

6.25. Какая лестница более крутая: в 20 ступенек, поднимающаяся на 3 м, или в 15 ступенек, поднимающаяся на 2 м? Ширина и длина ступенек одна и та же.

6.26. Представьте, что вы спускаетесь по ровному склону. Верно ли, что, чем короче спуск, тем он круче?

6.4. Решение прямоугольных треугольников

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 157). Из определения синуса следует, что

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и} \tag{6}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \tag{7}$$

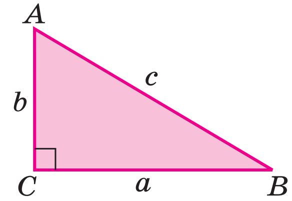


Рис. 157

т. е. *синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, лежащего против этого угла, и гипотенузы треугольника.*

Короче говорят так: *синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.*

Формулы (6) и (7) вместе с теоремой Пифагора и теоремой о сумме углов треугольника позволяют **решить прямоугольный треугольник** для всех возможных случаев. Перечислим эти случаи.

1. Заданы катеты a и b. Сначала находим гипотенузу c по теореме Пифагора, а затем находим острые углы A и B, используя формулы (6) и (7). Ясно, что можно найти сначала один из острых углов, например угол A, а тогда угол B находится из равенства $\angle B = 90° - \angle A$.

2. Заданы гипотенуза c и один из катетов. По теореме Пифагора находим второй катет, а затем углы A и B, используя формулы (6) и (7).

3. Заданы гипотенуза c и один из острых углов. Сначала находим второй острый угол из равенства

$$\angle A + \angle B = 90°. \tag{8}$$

Затем находим катеты из равенств

$$a = c \sin A \tag{9}$$

$$\text{и } b = c \sin B. \tag{10}$$

4. Задан один из катетов, например катет a, и один из острых углов. Сначала находим второй острый угол из равенства (8), а затем гипотенузу c, используя формулу (9). Второй катет находим по теореме Пифагора или по формуле (10).

Запомните: *катет находят умножением гипотенузы на синус противолежащего угла* (формулы (9) и (10)), *а гипотенузу находят делением катета на синус противолежащего угла:*

$$c = \frac{a}{\sin A}. \qquad (11)$$

Обратим внимание, что углами треугольник однозначно не определяется: могут быть неравные треугольники, имеющие соответственно равные углы, — это подобные треугольники, о которых речь пойдёт в конце данной главы (рис. 158).

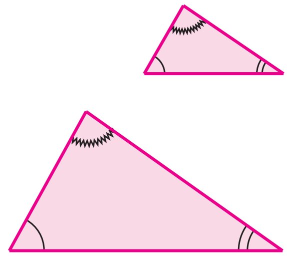


Рис. 158

Вопросы для самоконтроля

1. Как в прямоугольном треугольнике с помощью синуса можно найти углы?
2. Как в прямоугольном треугольнике с помощью синуса можно найти: а) катеты; б) гипотенузу?

ЗАДАЧИ

Смотрим

6.27. Назовите прямоугольные треугольники на рисунке 159. а) Для каждого из острых углов этих треугольников укажите противолежащий ему катет. Запишите выражение для синуса этого угла. б) Для каждого из катетов этих треугольников укажите противолежащий ему угол.

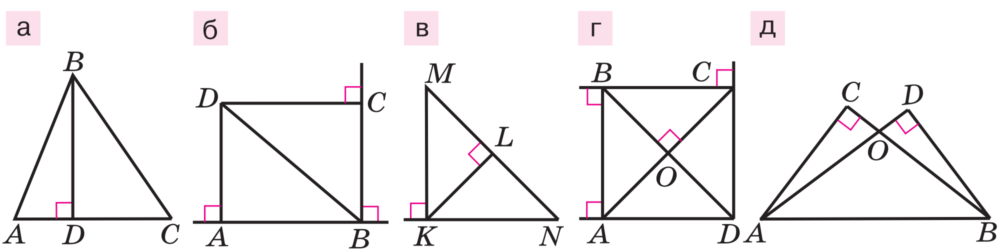


Рис. 159

Планируем

6.28. Как вычислить углы прямоугольного треугольника, если известны: а) катеты; б) отношение катетов; в) катет и медиана к другому катету; г) катет и медиана к этому катету; д) катет и медиана к гипотенузе; е) площадь и сумма катетов; ж) площадь и гипотенуза?

6.29. Как найти площадь равнобедренного треугольника, если известны: а) основание и угол при вершине; б) боковая сторона и угол при вершине; в) высота, проведённая на основание, и угол при вершине; г) высота, проведённая на основание, и угол при основании?

6.30. Как найти площадь прямоугольника, если известны: а) диагональ и угол, который она составляет с одной из сторон; б) диагональ и угол между диагоналями; в) сторона и угол между диагоналями?

6.31. Известны все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды. Как найти углы её граней и угол между её боковыми рёбрами и диагоналями основания пирамиды?

Вычисляем

6.32. Решите прямоугольный треугольник ABC по следующим его элементам[1]: а) $a = 1$, $b = 2$; б) $c = 3$, $a = 1$; в) $a = 2$, $\angle A = 35°$; г) $a = 2$, $\angle B = 70°$; д) $c = 12$, $\angle A = 44°$.

6.33. Решите равнобедренный треугольник ABC с вершиной A и основанием BC по следующим его элементам: а) $AB = 13$, $BC = = 10$; б) $BC = 10$, $\angle A = 52°$; в) $BC = 10$, $\angle B = 36°$; г) $AB = 8$, $\angle A = 52°$; д) $AB = 8$, $\angle B = 36°$.

6.34. Диагональ прямоугольника равна 10 и образует с одной из его сторон угол 36°. Найдите площадь прямоугольника.

6.35. Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 36°. Найдите площадь ромба.

6.36. Найдите углы равнобокой трапеции, основания которой равны 6 см и 18 см, а боковая сторона равна 8 см.

6.37. В круге радиуса R проведена хорда. Она видна из центра круга под углом α. На каком расстоянии от центра находится эта хорда? Какова длина хорды? Составьте сами задачи с аналогичным сюжетом.

---

[1] Здесь и далее предполагается, что в прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой.

Доказываем

6.38. Докажите, что сумма квадратов синусов острых углов прямоугольного треугольника равна единице.

6.39. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма синусов острых углов больше 1 и меньше 2.

Исследуем

6.40. Один из катетов прямоугольного треугольника остаётся неизменным, а другой катет увеличивается. Как при этом изменяется синус угла, лежащего против: а) изменяющегося катета; б) постоянного катета?

6.41. Можно ли построить такой прямоугольный треугольник, в котором: а) синус одного угла равен 0,5, а синус другого угла равен 0,6; б) синус одного угла равен 0,6, а синус другого угла равен 0,8; в) синус каждого угла равен 0,75?

Применяем геометрию

6.42. Угол подъёма дороги составляет в среднем 2°. На какую высоту поднимется турист, пройдя по дороге 12 км?

6.43. Пожарная лестница, укреплённая на машине, может быть выдвинута на 20 м, а её наклон может достигать 70°. Основание лестницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?

6.44. Из вершины триангуляционного пункта хотят измерить ширину реки. Высота пункта известна. Как это сделать?

6.5. Вычисление площади треугольника

Треугольник однозначно задаётся своими двумя сторонами и углом между ними. Поэтому все величины треугольника, в том числе и его площадь, должны выражаться через длины двух его сторон и угла между ними. Понятие синуса позволяет вывести простую формулу, по которой можно вычислить площадь треугольника, зная его стороны и угол между ними.

Рассмотрим треугольник ABC, у которого известны его стороны b, c и угол A между ними (рис. 160). Тогда его площадь S вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A. \qquad (12)$$

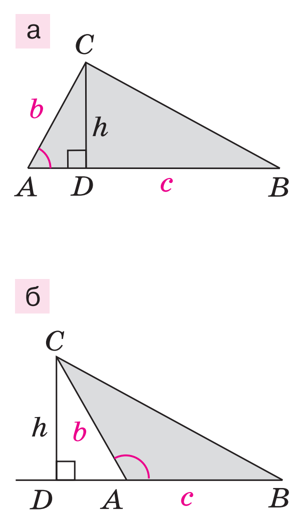


Рис. 160

Докажем равенство (12).

□ Проведём высоту $h = CD$. Отрезок CD является катетом в прямоугольном треугольнике ACD, лежащим против угла A (рис. 160, *а*) или смежного с ним угла (рис. 160, *б*). Поэтому $h = b\sin A$. Подставляя это выражение для h в формулу для площади $S = \frac{1}{2}ch$, получаем равенство (12). ■

Вопрос для самоконтроля

Какие вы знаете формулы для площади треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.45. Докажите, что площадь параллелограмма со сторонами a и b и углом φ между ними вычисляется по формуле

$$S = ab\sin\varphi. \qquad (13)$$

6.46. Пусть φ — угол между диагоналями выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а S — его площадь. Докажите, что

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi. \qquad (14)$$

Смотрим

6.47. Вычислите отношение площадей S_1 и S_2 фигур, изображённых на рисунке 161.

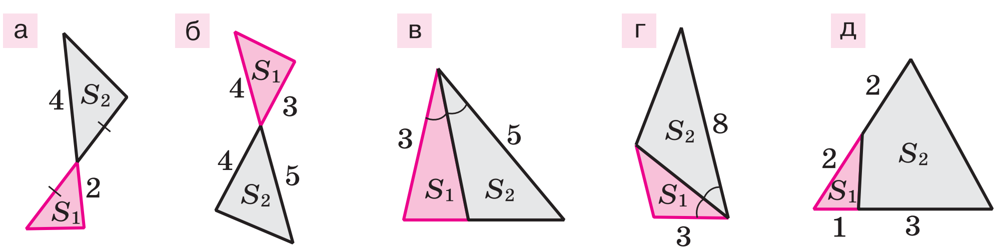


Рис. 161

Вычисляем

6.48. Найдите площади треугольников со сторонами 2 и 3, углы между которыми равны: а) 30°; б) 40°; в) 55°; г) 120°; д) 125°; е) 140°; ж) 150°.

6.49. Найдите площади параллелограммов со сторонами 3 и 4, углы которых равны: а) 60°; б) 75°; в) 80°; г) 105°; д) 150°; е) 160°.

6.50. Найдите площадь прямоугольника с диагональю d и углом между диагоналями φ.

Разбираемся в решении

6.51. В выпуклом шестиугольнике все углы равны по 120°, а стороны через одну равны 1 и 2. Вычислите его площадь.

Решение. Сначала себе представим, как можно было бы построить какой-нибудь шестиугольник с углами, равными 120°. Проще всего такой шестиугольник построить, если «срезать» вершины равностороннего треугольника, отсекая от него три равносторонних треугольника (рис. 162). Ясно, что тот шестиугольник, о котором говорится в условии задачи, можно получить, если отсечь от равностороннего треугольника со стороной 4 три равносторонних треугольника со стороной 1 (рис. 163). И становится ясно, что площадь S такого шестиугольника вычисляется так:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sin 60° - 3 \cdot \frac{1}{2}\sin 60° =$$

$$= 6{,}5\sin 60° = \frac{13}{4}\sqrt{3}.$$

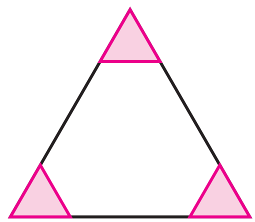


Рис. 162

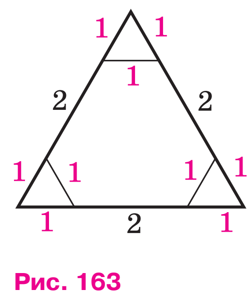


Рис. 163

Ищем границы

6.52. Стороны переменного треугольника равны a и b, а его угол между ними возрастает от 30° до 150°. В каких пределах изменяется площадь этого треугольника? Сформулируйте и решите аналогичные задачи для параллелограмма.

6.53. Переменная хорда KM круга с центром O движется перпендикулярно одному и тому же диаметру. В каких границах лежит площадь треугольника KOM?

Доказываем

6.54. Треугольник ABC со сторонами $AB = c$ и $AC = b$ биссектриса AD разбивает на треугольники ABD и ACD. Докажите, используя формулу (12), что отношение их площадей равно $c : b$.

6.55. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.
Замечание. Эту задачу мы уже решали в п. 4.1. Но к одной и той же задаче полезно возвращаться по несколько раз и решать её с помощью вновь полученных теоретических результатов.

Исследуем

6.56. Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, а угол между ними равен φ. Запишите формулу (13) площади параллелограмма, полученную в задаче 6.45. а) Как эта формула выглядит для ромба? б) Можно ли по этой формуле найти площадь прямоугольника? в) Как с помощью этой формулы найти угол между смежными сторонами параллелограмма? г) Какие ещё следствия можно получить из этой формулы?

6.57. Пусть в выпуклом четырёхугольнике диагонали равны a и b, а угол между ними равен φ. Запишите формулу (14) для его площади, полученную в задаче 6.46. а) Как выглядит эта формула для прямоугольника, ромба, квадрата? б) Верна ли формула (14) для невыпуклого четырёхугольника?

6.6. Теорема синусов

Синусы углов треугольника и его стороны связаны простой зависимостью, о которой говорится в следующей теореме:

Теорема 8 (*теорема синусов*). **Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Мы должны доказать, что

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}. \qquad (15)$$

Проведём в треугольнике ABC высоту CH из вершины C (рис. 164). Выразим CH из прямоугольных треугольников ACH и BCH. Получим

$$CH = b\sin A \text{ и } CH = a\sin B.$$

Следовательно, $a \sin B = b \sin A$. Из этого равенства и вытекает равенство (15).■

Простым следствием теоремы синусов является признак равнобедренного треугольника: *если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный*. Этот признак вам уже известен. Из равенства (15) он получается совсем просто: если $\angle A = \angle B$, то $\sin A = \sin B$, а потому $a = b$.

Теореме 8 можно дать другую формулировку, в которой уже говорится о всех углах и сторонах треугольника.

Теорема 8′ **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов треугольника, т. е. для любого треугольника имеют место равенства**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (16)$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ то } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Аналогично так как

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \text{ то } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Поэтому справедливы равенства (16). ■

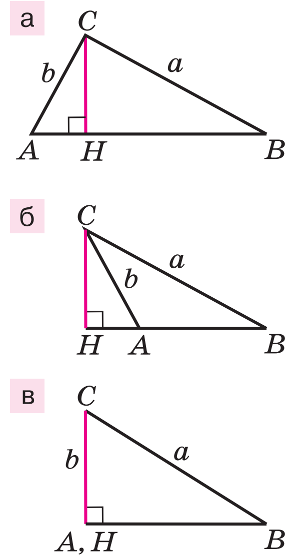


Рис. 164

Теорема синусов позволяет *решить треугольник по стороне и двум углам*. Во-первых, находим третий угол как разность 180° и суммы двух данных углов. А затем из равенств (16) находим стороны треугольника, зная все углы треугольника и одну из его сторон.

Такие задачи приходится решать и практически, определяя, например, расстояние до недоступного предмета (на рисунке 165 он обозначен точкой C). Этот предмет наблюдают из двух точек A и B, расстояние между которыми может быть измерено. Измеряются также углы CAB и CBA. А затем вычисляются расстояния AC и BC по теореме синусов.

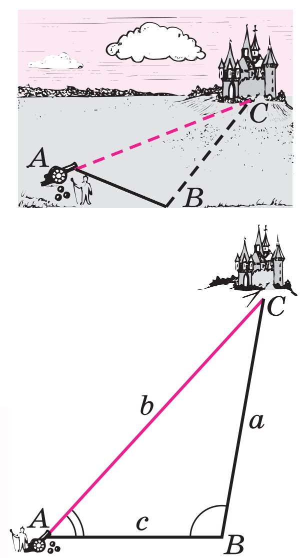


Рис. 165

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема синусов?
2. Какие вы знаете практические применения теоремы синусов?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

6.58. Дан треугольник ABC. Используя теорему синусов, запишите, чему равны отношения $a : b$, $b : c$, $c : a$, $\sin A : \sin B$, $\sin C : \sin B$, $\sin A : \sin C$.

Планируем

6.59. Пусть известны сторона равнобедренного треугольника и один из его углов. Как найти его стороны, используя теорему синусов?

6.60. Как найти стороны параллелограмма, зная его диагональ и углы, которые она составляет с его сторонами?

6.61. Пусть известны углы треугольника и одна из его сторон. Как найти биссектрису треугольника, проведённую на данную сторону?

6.62. В тетраэдре $ABCD$ $\angle ADC = \angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \angle BCD = \beta$, $AB = CD = a$. Как найти площадь его поверхности, т. е. сумму площадей его граней?

Вычисляем

6.63. Вычислите отношения сторон $b : a$ и $c : a$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$; б) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$; в) $\angle A = 178°$, $\angle B = 1°$.

6.64. Решите треугольник ABC, у которого сторона $BC = 12$ см, имеющего такие углы: а) $\angle B = 73°$, $\angle C = 25°$; б) $\angle B = 25°$, $\angle A = 57°$; в) $\angle B = 168°$, $\angle C = 55°$; г) $\angle B = 52°$, $\angle A = 110°$.

6.65. Найдите площадь параллелограмма со стороной 12 см, у которого диагонали образуют углы 30° и 45° с этой стороной.

6.66. В равнобокой трапеции $ABCD$ основание $AD = 12$, $\angle BAD = 72°$, $\angle CAD = 30°$. Вычислите стороны трапеции и её площадь.

6.67. В треугольнике ABC сторона $AB = 16$ см и $\angle B = 30°$. Решите треугольник ABC для следующих случаев: а) $AC = 6$ см; б) $AC = 8$ см; в) $AC = 10$ см. Чем различаются эти случаи? Иллюстрируйте свои вычисления рисунками.

Доказываем

6.68. С помощью теоремы синусов ещё раз докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

6.69. С помощью теоремы синусов докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

6.70. Углы двух треугольников соответственно равны. Докажите, что стороны этих треугольников пропорциональны.

Исследуем

6.71. Дан треугольник ABC. Запишите теорему синусов для его сторон a и b. Что следует из этой формулы: а) при равенстве углов A и B; б) при равенстве сторон a и b; в) если угол A больше угла B; г) если сторона a больше стороны b?

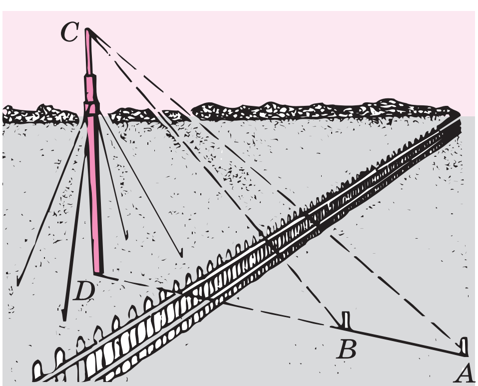
6.72. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник. а) Его прямой угол разделили лучами на три равные части. Какой отрезок гипотенузы между этими лучами оказался наибольшим? б) Гипотенузу разделили на три равных отрезка. Какой из них виден из вершины прямого угла под наибольшим углом?

6.73. Дан равносторонний треугольник ABC. а) Его угол A разделили лучами на три равные части. Какой отрезок стороны BC между этими лучами оказался наибольшим? б) Сторону BC разделили на три равных отрезка BK, KM и MC. Какой из углов BAK, KAM и MAC наибольший?

Применяем геометрию

6.74. По рисунку 166 расскажите, как находится высота недоступного предмета. Сделайте вычисления для $AB = 100$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

6.75. Три дороги образуют треугольник. Обозначим его через ABC. При этом $\angle A = 20°$, $\angle B = 150°$. Автомобилист из пункта A хо-



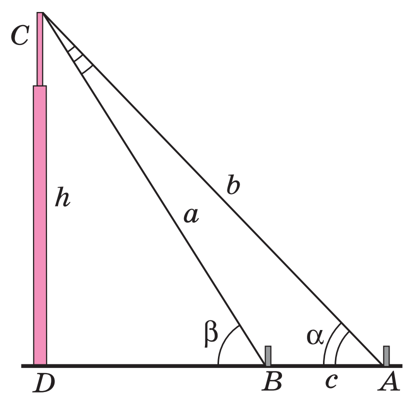


Рис. 166

чет попасть в пункт C побыстрее. Известно, что участки AC и CB — просёлочные дороги, AB — шоссе. Скорость движения по шоссе в 2 раза больше, чем по просёлку. Какой путь ему выбрать?

6.76. Спортивный самолёт летит по замкнутому треугольному маршруту. Два угла этого треугольника равны 30° и 70°. Меньшую сторону маршрута он пролетел за 1 час. За какое время самолёт пролетит по всему маршруту, сохраняя постоянную скорость?

§ 7. Косинус. Применения косинуса

7.1. Определение косинуса

С помощью синуса вы научились решать многие важные задачи. Однако у синуса есть существенный недостаток: он не определяет угол. Если, например, $\sin\alpha = 0{,}5$, то $\alpha = 30°$ или $\alpha = 150°$. Поэтому мы не можем однозначно по синусу найти угол. Угол находится однозначно с помощью другой функции — косинуса. Её обозначают так: cos. Перейдём к определениям. Они связаны с понятием проекции отрезка на прямую. Напомним это понятие и расширим его.

Снова (как и при определении синуса) рассмотрим некоторый угол A со сторонами p и q (рис. 167). Сторону q считаем горизонтальной и содержащую её прямую обозначаем через x. На стороне p отложим некоторый отрезок AB (рис. 168). Если угол A острый или тупой, то отрезок AB — наклонная к прямой x. Как нам известно (см. п. 3.4), проекция отрезка AB на прямую x — это отрезок AC, у которого конец C является основанием перпендикуляра BC, опущенного на прямую x (рис. 168, *а*, *б*). Если угол A прямой, то полагаем проекцией отрезка AB на прямую x точку A: в этом случае точка C совпадает с точкой A (рис. 168, *в*). Если же угол A развёрнутый, то проекция отрезка AB на прямую x — это сам отрезок AB: точка C совпадает с точкой B (рис. 168, *г*).

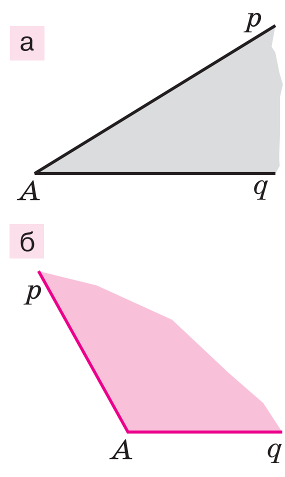


Рис. 167

Тем самым мы теперь можем говорить о проекции AC отрезка AB на прямую x для любых углов A, а не только для острых и тупых углов: в частных случаях точка C может совпадать с точкой A (для прямого угла A) или с точкой B (для развёрнутого угла A).

В том случае, когда проекция AC отрезка AB на прямую x вырождается в точку A (т. е. в том случае, когда угол A прямой), длину его проекции полагаем равной нулю.

Теперь дадим определение косинуса угла для любых углов.

Определение. Пусть на одной стороне угла A отложен отрезок AB и AC — его проекция на прямую, содержащую другую сторону угла A. Тогда **косинусом угла** A называется отношение отрезков AC и AB, взятое со знаком «плюс», если угол A острый, и со знаком «минус», если угол A тупой или развёрнутый.

Итак, для острого угла A

$$\cos A = \frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

Далее, **косинус прямого угла равен нулю.**

Для тупого угла A

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Наконец, из данного определения ясно, что **косинус развёрнутого угла равен −1.**

Из определения косинуса следует также, что *косинусы смежных углов отличаются лишь знаком, т.е. противоположны* (рис. 169).

Действительно, если из двух смежных углов один острый, то другой тупой. Косинус одного из них вычисляется по формуле (1), а другого — по формуле (2). Отношения, стоящие справа в этих равенствах, отличаются лишь знаком. Если же один из смежных углов прямой, то другой угол тоже прямой. Их косинусы равны нулю. Поэтому и для прямых смежных углов обсуждаемое утверждение тоже верно.

В том, что данное нами определение косинуса угла A не зависит от выбора отрезка AB на стороне угла A, мы убедимся в следующем пункте, где установим зависимость косинуса и синуса угла.

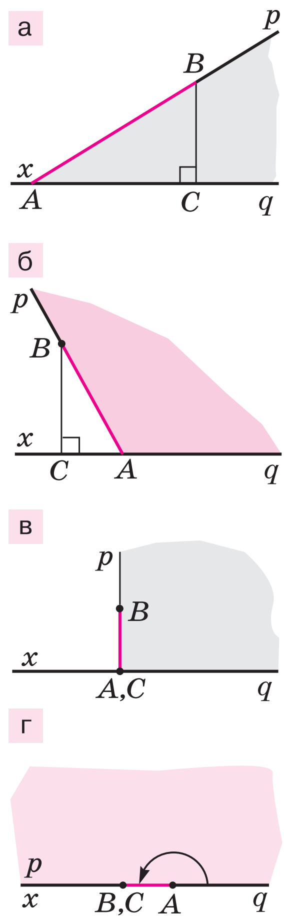
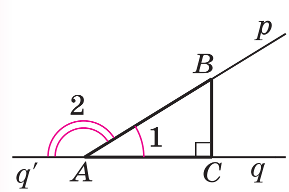


Рис. 168

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить косинус: а) острого угла; б) тупого угла?
2. Чему равен косинус: а) прямого угла; б) развёрнутого угла?
3. Какова связь между косинусами смежных углов?
4. Про угол A известно, что он тупой и модуль его косинуса больше 0,5. Какой это угол?
5. Об углах A и B известно, что они смежные и что они равны. Каков их косинус?



$$\cos(\angle pq) = \frac{AC}{AB},$$

$$\cos(\angle pq') = -\frac{AC}{AB}.$$

Рис. 169

ЗАДАЧИ

Смотрим

7.1. Запишите выражения для косинусов углов, обозначенных цифрами на рисунке 170.

Строим

7.2. Постройте углы, косинусы которых равны: а) 0,5; б) −0,5; в) 0,3; г) 0,7; д) −0,7; е) −1; ж) 0; з) 1. Найдите величины этих углов.

Вычисляем

7.3. Найдите косинусы углов треугольников: а) правильного; б) прямоугольного равнобедренного; в) «египетского»; г) прямоугольного с катетами 5 и 12; д) равнобедренного с основанием 6 и боковой стороной 7; е) со сторонами 13, 14, 15. Для прямоугольных треугольников сравните их с синусами углов этих треугольников.

7.4. Найдите косинусы углов ромба, одна из диагоналей которого равна его стороне.

7.5. Найдите косинусы углов равнобокой трапеции, основания которой равны 10 см и 16 см, а боковая сторона равна 5 см.

7.6. Точка A лежит на прямой p. Найдите угол, который составляет с прямой p единичный отрезок AB, если его проекция на эту прямую равна: а) $\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) 0,9; г) 1.

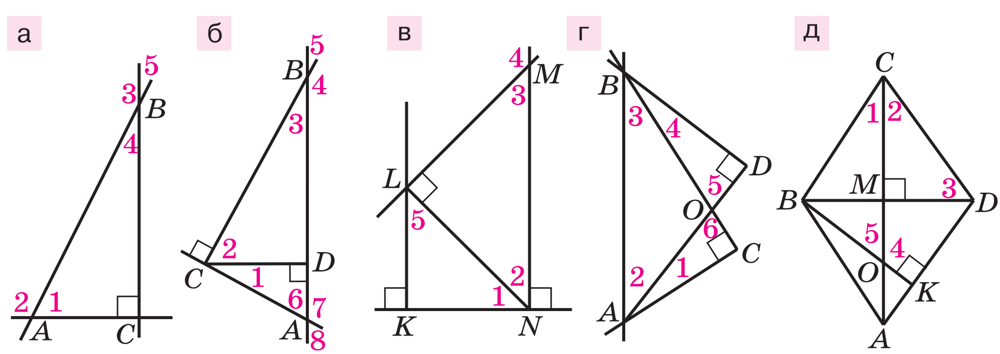


Рис. 170

x Выводим формулу

7.7. Найдите косинусы углов, которые составляет диагональ прямоугольника с его сторонами, если они равны a и b. Сравните их с синусами этих углов. Найдите сумму квадратов этих косинусов.

7.8. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите косинусы углов, которые составляет диагональ этого параллелепипеда с его рёбрами. Найдите сумму квадратов этих косинусов.

7.2. Основное тригонометрическое тождество

Синус и косинус любого угла A связаны важным равенством

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (3)$$

Его называют **основным тригонометрическим тождеством.** Оно вытекает из теоремы Пифагора, а для прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой равенство (3) и есть теорема Пифагора. Докажем равенство (3). Возможны такие случаи.

□ 1) Угол A — острый. Возьмём на его стороне точку B и опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A (рис. 171, *а*). Тогда

$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$ и $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1.$

Равенство (3) доказано для острых углов.

2) Если угол A прямой, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ и равенство (3) также справедливо.

3) Пусть угол A тупой. Снова возьмём на его стороне точку B и опустим перпендикуляр BC на продолжение другой стороны угла A (рис. 171, *б*). Тогда $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, а $\cos A = -\dfrac{AC}{AB}$. Поэтому снова, как и в случае 1, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

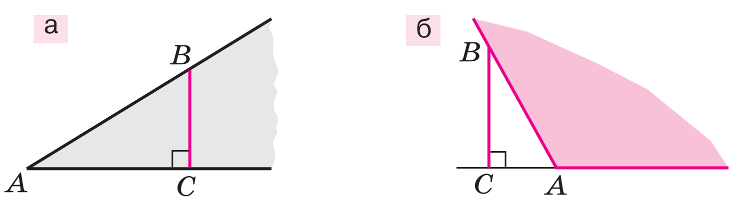


Рис. 171

4) Если угол A развёрнутый, то $\sin A = 0$, $\cos A = -1$ и равенство (3) верно. Равенство (3) доказано для любых углов. ■

Равенство (3) позволяет выразить косинус через синус, если известен вид угла. Из равенства (3) следует, что

$$|\cos A| = \sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Если $\angle A \leqslant 90°$, то $\cos A \geqslant 0$, а потому

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Если $\angle A > 90°$, то $\cos A < 0$, а потому

$$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Поскольку $\sin A$ зависит лишь от величины угла A, то из полученных выражений косинуса через синус следует, что $\cos A$ тоже зависит лишь от величины угла A. Поэтому, как и для синуса, мы пишем, например, $\cos 47°$ или $\cos\alpha$, где α — величина соответствующего угла. Поскольку косинус прямого угла равен нулю, то $\cos 90° = 0$. Кроме того, полагаем, что $\cos 0° = 1$. Это согласуется со всем уже изложенным о косинусе (обдумайте это).

Зависимость между косинусами смежных углов теперь можно записать так:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (4)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое тождество называется основным тригонометрическим тождеством?
2. Какие следствия можно получить из основного тригонометрического тождества?
3. Частным случаем какой теоремы является основное тригонометрическое тождество?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

7.9. Запишите основное тригонометрическое тождество. а) Выразите из него $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$. б) Пусть $\cos\alpha$ растёт. Что происходит с $\sin\alpha$? в) Пусть $\sin\alpha$ убывает. Что происходит с $\cos\alpha$? г) Как из этого тождества получить, что синус и косинус по модулю не превосходят единицы?

Вычисляем

7.10. Найдите косинусы углов: а) 0°; б) 30°; в) 45°; г) 60°; д) 90°; е) 120°; ж) 135°; з) 150°; и) 180°.

7.11. Найдите величины углов, косинусы которых равны: а) 0,5; б) −0,5; в) 0,3; г) −0,7; д) −1; е) 0; ж) 1.

7.12. Вычислите синусы углов, косинусы которых равны: а) 0,3; б) $\frac{1}{4}$; в) −0,5.

7.13. Вычислите косинусы углов, синусы которых равны: а) 0,25; б) 0,1; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Исследуем

7.14. Могут ли синус и косинус одного и того же угла равняться соответственно: а) 0,3 и 0,4; б) 0,6 и −0,6; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$?

7.3. Косинусы острых углов прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 172). Косинусы его острых углов A и B определяются равенствами

$$\cos A = \frac{b}{c} \tag{5}$$

и

$$\cos B = \frac{a}{c}. \tag{6}$$

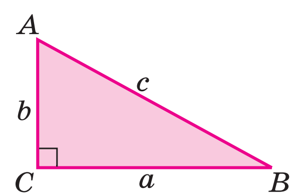


Рис. 172

Итак, *косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, прилежащего к этому углу, и гипотенузы.*

Короче: *косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.*

Теперь вспомним, что

$$\sin A = \frac{a}{c} \tag{7}$$

и

$$\sin B = \frac{b}{c}. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (7) и (6), а также равенства (5) и (8), получаем, что

$$\sin A = \cos B \tag{9}$$

и

$$\cos A = \sin B. \tag{10}$$

Вспомним ещё, что $\angle A + \angle B = 90°$. Острые углы, сумма которых равна 90°, называют *дополнительными* (друг к другу до 90°). Поэтому равенства (9) и (10) выражают такие свойства дополнительных углов: *синус острого угла равен косинусу дополнительного угла, т. е.*

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \tag{11}$$

и косинус острого угла равен синусу дополнительного угла, т. е.

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha). \tag{12}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равен косинус угла прямоугольного треугольника?
2. Как с помощью косинуса найти катет в прямоугольном треугольнике? А гипотенузу?
3. Какова зависимость синусов и косинусов острых углов прямоугольного треугольника?
4. Известна сумма синусов углов прямоугольного треугольника. Как найти сумму косинусов углов этого же треугольника?

ЗАДАЧИ

Планируем

7.15. В треугольнике ABC известны высота AD и углы, которые она образует со сторонами AB и AC. а) Как найти длины сторон треугольника ABC и его площадь? б) Реализуйте свой план для $AD = 2$, $\angle BAD = 30°$ и $\angle CAD = 45°$.

7.16. Известны стороны равнобедренного треугольника. а) Как найти проекции его основания и одной из боковых сторон на другую сторону? б) Реализуйте свой план для треугольников со сторонами 5, 5, 8 и 25, 25, 48.

Вычисляем

7.17. Найдите косинусы острых углов A и B следующих прямоугольных треугольников ABC: а) $a = 7$, $b = 24$; б) $a = 5$, $c = 13$; в) $\angle A = 45°$; г) $\angle B = 30°$; д) $\angle A = 60°$.

7.18. Найдите проекции катетов AC и BC на гипотенузу AB в следующих прямоугольных треугольниках: а) $a = 12$, $c = 13$; б) $a = 7$, $b = 24$; в) $a = 8$, $\angle A = 60°$; г) $c = 6$, $\angle A = 30°$; д) $a = 10$, $\angle B = 60°$; е) $a = 8$, $\angle A = 45°$.

7.19. В треугольнике ABC высота AH образует со сторонами AB и AC углы 45° и 60°. Найдите стороны треугольника и его площадь, если $AH = 8$ см.

7.20. Вычислите косинусы острых углов прямоугольного треугольника, в котором: а) проекции катетов на гипотенузу равны 3 и 1; б) высота равна 1, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 2; в) один из катетов равен 2, а его проекция на гипотенузу равна 1. Найдите также градусные меры этих углов.

Доказываем

7.21. Докажите, что косинус внешнего угла треугольника равен косинусу суммы двух других углов треугольника.

7.4. Свойства косинуса и его график

Косинус, как и синус, является функцией величины угла. Свойства этой функции, зная свойства синуса, можно получить аналитически из формул, выражающих косинус через синус (см. п. 7.3). Но можно их получить и геометрически, опираясь на определение косинуса. Мы так и сделаем.

СВОЙСТВО 1. **Косинус любого угла не меньше −1 и не больше 1, т. е.**

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1. \qquad (13)$$

Это свойство вытекает непосредственно из определения косинуса.

СВОЙСТВО 2. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Это свойство вытекает из определения косинуса. О нём мы уже говорили в п. 7.1.

СВОЙСТВО 3. **При возрастании угла от 0° до 180° косинус убывает от 1 до −1.**

□ Для доказательства этого свойства воспользуемся рисунком 173. Косинус угла BAM равен длине отрезка AC, взятой со знаком «плюс», когда этот угол острый, и со знаком «минус», если угол BAM тупой. Если теперь следить за изменением отрезка AC, то становится ясно, что, когда подвижный радиус AB вращается против часовой стрелки от положения AM до положения AN, косинус угла BAM убывает от 1 до −1 (точка C двигается от точки M до точки N). ■

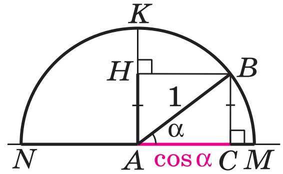


Рис. 173

СВОЙСТВО 4. **Косинус однозначно определяет угол, т. е. из равенства $\cos\alpha = \cos\beta$ следует равенство $\alpha = \beta$.**

□ Действительно, если $\cos\alpha = \cos\beta$, то не может выполняться неравенство $\alpha < \beta$. В этом случае согласно свойству 3 $\cos\alpha > \cos\beta$, что противоречит условию. Аналогично не может выполняться неравенство $\alpha > \beta$, поскольку оно ведёт к неравенству $\cos\alpha < \cos\beta$. Итак, возможно лишь равенство $\alpha = \beta$. ■

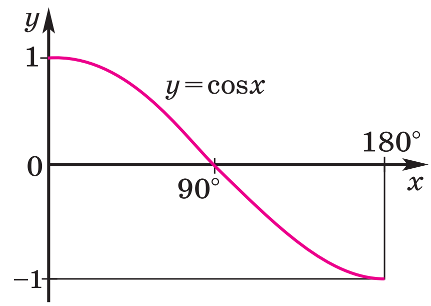


Рис. 174

Косинус, как и синус, находят по таблицам или с помощью калькулятора. В особой таблице для косинуса нет необходимости, если уже составлена таблица значений синуса. Действительно, для острых углов $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, а для тупых углов косинус можно находить из равенства $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$. На рисунке 174 приведён график функции $y = \cos x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как изменяется косинус угла при возрастании угла от 0° до 180°?
2. Что можно сказать об углах, косинусы которых равны?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

7.22. Известно, что косинусы всех углов выпуклого многоугольника положительны. Что вы можете сказать об этом многоугольнике?

7.23. Известно, что косинусы всех углов многоугольника равны нулю. Что это за многоугольник?

7.24. Известно, что косинусы всех углов многоугольника отрицательны. Что вы можете сказать об этом многоугольнике?

7.25. Что вы можете сказать о косинусах углов: а) параллелограмма; б) трапеции?

7.26. Известно, что косинусы всех углов граней некоторой призмы неотрицательны. Что вы можете сказать об этой призме?

7.27. Расположите в порядке убывания косинусы таких углов: а) 71°, 28°, 54°; б) 21°, 121°, 54°; в) 153°, 46°, 94°.

7.28. Какие следствия можно получить из равенств: а) $\cos\alpha = \cos\beta$; б) $\cos\alpha = -\cos\beta$; в) $\cos\alpha = \sin\beta$?

Представляем

7.29. Через середину горизонтального отрезка AB — точку O — проведён вверх луч p, перпендикулярный отрезку AB. По лучу p от точки O двигается вверх точка P. Как изменяются косинусы углов треугольника PAB при движении точки P?

7.30. Через центр O квадрата $ABCD$, лежащего в горизонтальной плоскости, проведён вверх вертикальный луч p. По лучу p от точки O двигается вверх точка P. Как изменяются косинусы углов боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ при движении точки P?

7.31. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 7.30, для правильного треугольника и правильной треугольной пирамиды.

Доказываем

7.32. Докажите, что сумма косинусов двух углов любого треугольника положительна.

7.33. Докажите, что сумма косинусов двух острых углов прямоугольного треугольника больше единицы.

Исследуем

7.34. Точка X движется по стороне AB треугольника ABC от вершины A к вершине B. Как изменяются при этом синус и косинус угла CXB? Рассмотрите отдельно случаи различных видов треугольника ABC.

7.35. Выясните, что больше — синус или косинус угла α, если: а) $0° < \alpha < 45°$; б) $45° < \alpha < 90°$; в) $\alpha > 90°$.

7.5. Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)

Теорема Пифагора позволяет в прямоугольном треугольнике, зная две из трёх его сторон, найти третью сторону. В прямоугольном треугольнике один из его элементов — прямой угол — задан изначально. Поэтому для решения такого треугольника следует задать ещё два элемента: две стороны или сторону и острый угол. Произвольный треугольник однозначно определяется либо тремя сторонами, либо двумя сторонами и углом между ними, либо двумя углами и стороной. Как решить треугольник в последнем случае — по двум углам и стороне, мы уже знаем: с помощью теоремы синусов. В двух других случаях теорема синусов «не работает», и для решения треугольника в этих случаях применяют ещё одну основную теорему «геометрии треугольника» — *теорему косинусов*. Теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а потому её можно называть и *обобщённой теоремой Пифагора*. Сформулируем и докажем эту теорему.

Теорема 9 (*теорема косинусов*). **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Требуется доказать равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (14)$$

(а также аналогичные равенства для a^2 и b^2).

Для угла C есть три возможности.

1) Угол C — прямой. Тогда $\cos C = 0$ и равенство (14) становится теоремой Пифагора, которую мы уже доказали.

2) Угол C — острый. В треугольнике ABC, кроме угла C, есть ещё хотя бы один острый угол. Допустим, что это угол B (рис. 175). Из вершины A проведём высоту AH на сторону BC. Точка H лежит внутри стороны BC и разбивает её на два отрезка $CH = b_1$ и $BH = a - b_1$.

Вычислим по теореме Пифагора квадрат высоты AH из двух прямоугольных треугольников ABH и ACH и приравняем эти выражения. Получим

$$c^2 - (a - b_1)^2 = b^2 - b_1^2. \qquad (15)$$

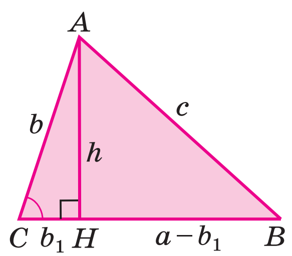


Рис. 175

Выразим из равенства (15) c^2:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab_1. \qquad (16)$$

Чтобы из равенства (16) получить равенство (14), достаточно заметить, что $b_1 = b\cos C$ (из прямоугольного треугольника ACH). Для острого угла C теорема доказана.

3) Угол C — тупой. Снова проведём высоту AH. Теперь её основание H лежит на продолжении стороны BC за точку C (рис. 176). Поэтому отрезок BH равен сумме отрезков $BC = a$ и $CH = b_1$. Снова вычислим по теореме Пифагора квадрат высоты AH из прямоугольных треугольников ABH и ACH и приравняем эти выражения. Получим

$$c^2 - (a + b_1)^2 = b^2 - b_1^2. \qquad (17)$$

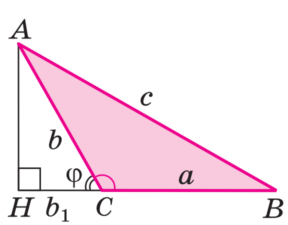


Рис. 176

Выразим теперь c^2 из равенства (17):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab_1. \qquad (18)$$

Отрезок b_1 — катет прямоугольного треугольника ACH, прилежащий к острому углу φ, который будет смежным с углом C треугольника ABC. Поэтому, во-первых, $b_1 = b\cos\varphi$, а во-вторых, $\cos\varphi = -\cos C$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$b_1 = -b\cos C. \qquad (19)$$

Подставим равенство (19) в равенство (18) и получим равенство (14) для тупого угла C. Теорема доказана для всех случаев. ■

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема косинусов?
2. Можно ли сказать, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов? Почему?
3. Какие задачи на решение треугольников позволяет решать теорема косинусов?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.36. Сравнив квадрат большей стороны треугольника с суммой квадратов двух других его сторон, можно установить вид треугольника (по его углам). Как это сделать?

7.37. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Доказав это, получите формулу для вычисления длины медианы треугольника по трём его сторонам.

Работаем с формулой

7.38. Выразите из равенства (14) и аналогичных равенств для других сторон треугольника косинусы углов треугольника.

Планируем

7.39. Как вычислить диагонали ромба, если известны его острый угол и сторона?

7.40. Как вычислить диагональ равнобокой трапеции, если известны её основание, боковая сторона и угол между ними?

7.41. Известны две стороны треугольника и угол, лежащий против одной из них. Как решить такой треугольник?

Вычисляем

7.42. Определите вид треугольников, имеющих такие стороны: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 8; в) 6, 6, 7; г) 6, 6, 9; д) 9, 40, 41.

7.43. Найдите углы треугольников, рассмотренных в задаче 7.42.

7.44. Решите треугольники, у которых известны две стороны и угол между ними в следующих случаях: а) 2, 3, 60°; б) 2, 3, 120°; в) 2, 3, 50°; г) 2, 3, 110°; д) 3, 4, 45°; е) 3, 4, 135°.

Доказываем

7.45. а) Докажите, что в двух треугольниках, имеющих пару соответственно равных сторон, третья сторона больше там, где больше угол между соответственно равными сторонами. б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

7.46. Докажите, что бóльшая медиана треугольника проводится к меньшей его стороне. Проверьте обратное.

7.47. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бóльшая диагональ. Докажите обратное утверждение.

Исследуем

7.48. Сторона BC равностороннего треугольника ABC разделена на три равные части. Какая из них видна из точки A под бóльшим углом?

7.49. Все стороны треугольника умножили на одно и то же положительное число. Будут ли полученные отрезки сторонами некоторого треугольника? Если да, то будут ли у него такие же углы?

Применяем геометрию

7.50. Кусок проволоки длиной 30 см надо согнуть так, чтобы расстояние между её концами стало 16 см, а угол между частями составил 60°. В каком месте надо согнуть проволоку?

7.6. Средние линии треугольника и трапеции

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией треугольника**. У треугольника три средние линии (рис. 177). Теорема косинусов позволяет чисто аналитически доказать важные свойства средней линии треугольника.

Теорема 10 (*о средней линии треугольника*). **Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.**

Дано: $\triangle ABC$, точка K — середина стороны AC, точка M — середина стороны BC (рис. 178).

Доказать: $KM \parallel AB$ и $KM = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство. Стороны треугольника ABC, как обычно, обозначаем a, b, c. Найдём по теореме косинусов квадрат стороны KM из треугольника CKM. Имеем

$$KM^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\frac{ab}{4}\cos C =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = \frac{1}{4}c^2.$$

Следовательно,

$$KM = \frac{c}{2}. \qquad (20)$$

Второе утверждение теоремы мы доказали. Докажем теперь первое утверждение, что KM и AB параллельны. Обозначим через φ угол K в треугольнике CKM и вычислим его косинус. Имеем

$$\cos\varphi = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) : \left(2\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\right) =$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2) : (2bc) = \cos A\,.$$

Поэтому $\varphi = \angle A$. Поскольку углы φ и A — соответственные углы при прямых KM и AB и секущей AC, то из равенства этих углов следует параллельность прямых KM и AB. ■

Из свойств средней линии треугольника легко можно получить аналогичные свойства средней линии трапеции. **Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (рис. 179).

Пусть точка K — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$, а точка M — середина её боковой стороны CD. Проведём луч BM и обозначим через P точку пересечения его с прямой AD (рис. 180). Треугольники BCM и PDM равны (по сторонам CM и DM и прилегающим к ним углам). Поэтому $BM = MP$. Следовательно, отрезок KM — средняя линия треугольника ABP. Поэто-

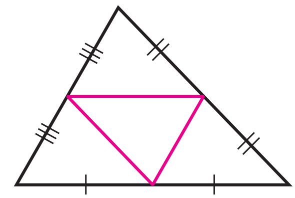


Рис. 177

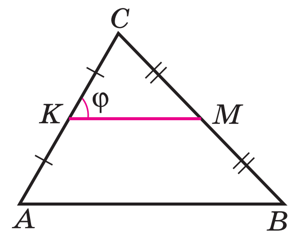


Рис. 178

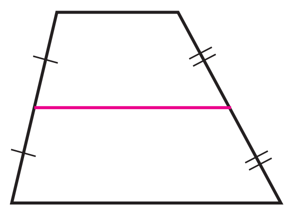


Рис. 179

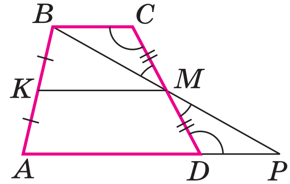


Рис. 180

му KM параллелен AP и KM равен половине AP. Но отрезок AP равен сумме оснований трапеции $ABCD$ (поскольку $BC = DP$). Таким образом, мы доказали следующее предложение: **средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.**

Понятие средней линии позволяет кратко формулировать некоторые уже известные вам теоремы. Например, *площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.*

А для треугольника аналогичное предложение сформулируйте самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства средней линии треугольника вы знаете?
2. Какие свойства средней линии трапеции вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.51. а) Докажите, что хорда треугольника, идущая из середины его стороны и параллельная другой его стороне, является средней линией треугольника.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для трапеции.

Хордой многоугольника будем называть отрезок, соединяющий любые две точки двух сторон многоугольника.

Смотрим

7.52. Нарисуйте треугольник. Проведите все его средние линии. Сколько равных друг другу треугольников получилось? Какую часть от площади исходного треугольника составляет площадь каждого из них? А сколько параллелограммов на этом рисунке?

7.53. Нарисуйте тетраэдр. Проведите все средние линии граней тетраэдра и «отрежьте» ими от исходного тетраэдра четыре получившихся новых тетраэдра. Каковы отношения площадей поверхностей исходного тетраэдра и новых тетраэдров? Нарисуйте многогранник, который получится после отсечения от тетраэдра четырёх новых тетраэдров. Выразите площадь его поверхности через площадь поверхности исходного тетраэдра.

Представляем

7.54. У какого треугольника могут быть две взаимно перпендикулярные средние линии?

7.55. Представьте себе треугольник, в котором проведены все средние линии. Какая из средних линий самая большая? самая маленькая?

7.56. Что больше: средняя линия равностороннего треугольника или его высота?

7.57. Может ли средняя линия трапеции быть: а) перпендикулярна стороне трапеции; б) равняться стороне трапеции; в) больше стороны трапеции?

7.58. Представьте себе, что от правильной четырёхугольной пирамиды средними линиями её боковых граней, соединяющих середины её боковых рёбер, отрезали меньшую пирамиду. Каковы отношения площадей поверхностей исходной и меньшей пирамид?

Работаем с формулой

7.59. Запишите формулу для средней линии трапеции. а) Пусть одно из оснований стало увеличиваться. Как изменяется средняя линия? б) Как изменится средняя линия, если оба основания уменьшились вдвое? в) Докажите, что средняя линия m меньше большего основания b трапеции, но больше меньшего её основания a, причём соответствующие разности этих отрезков равны: $m - a = b - m$.

Планируем

7.60. Как вычислить длину средней линии равнобокой трапеции, если известны: а) периметр и боковая сторона; б) части, на которые делит большее основание высота, проведённая из вершины меньшего основания?

Вычисляем

7.61. В треугольнике провели три средние линии. а) Чему равен периметр треугольника, ограниченного средними линиями, если периметр исходного треугольника равен 1? б) Чему равен периметр исходного треугольника, если он больше периметра треугольника, ограниченного средними линиями, на 1?

7.62. Вычислите периметр равнобокой трапеции, в которой: а) боковая сторона равна 2 и средняя линия равна 1; б) средняя линия равна 1 и из середины боковой стороны другая её боковая сторона видна под прямым углом.

7.63. Средняя линия равнобокой трапеции равна 5, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту трапеции.

7.64. Боковую сторону трапеции разделили на три равные части. Через каждую точку деления провели хорду трапеции, параллельную её основаниям. Пусть основания трапеции равны a и b. Чему равны длины построенных хорд?

Доказываем

7.65. Докажите, что каждая точка средней линии трапеции равноудалена от прямых, содержащих её основания.

7.66. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, делит пополам любую хорду треугольника, идущую из вершины A.

7.67. Докажите, что медиана треугольника делит пополам ту среднюю линию, которую она пересекает.

7.68. Докажите, что четырёхугольник, стороны которого соединяют середины соседних сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$, является параллелограммом. Почему это верно и для замкнутой пространственной ломаной $ABCD$?

7.69. Докажите, что средняя линия трапеции и хорда, соединяющая середины оснований трапеции, точкой их пересечения делятся пополам.

Исследуем

7.70. Можно ли восстановить треугольник, если от него остались: а) одна средняя линия; б) две средние линии?

7.71. Можно ли восстановить трапецию по оставшейся средней линии и: а) одному из оснований; б) диагонали; в) хорде, соединяющей середины оснований?

7.72. В трапеции $ABCD$ провели среднюю линию KM и диагональ AC. а) Объясните, почему часть средней линии трапеции в каждом из треугольников ABC и ACD является средней линией этих треугольников. б) Пусть известны большее основание трапеции и одна из средних линий треугольников ABC и ACD. Можно ли найти другое основание трапеции?

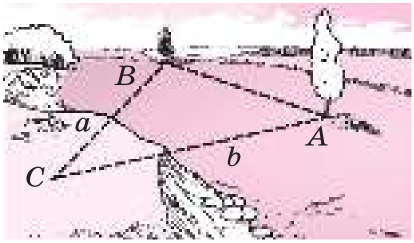


Рис. 181

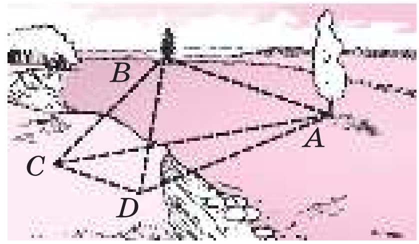


Рис. 182

7.7. Применения косинуса в практике

Рассмотрим две задачи. Пусть имеется прибор, измеряющий углы.

Задача 1. Найти расстояние между двумя недоступными предметами при наблюдении из данной точки, располагая дальномером.

Решение. Пусть предметы расположены в точках A и B, а мы находимся в точке C (рис. 181). Измеряя расстояния дальномером, находим $CA = b$, $CB = a$. Измеряем угол C между CA и CB. Тогда расстояние $AB = c$ можно найти по теореме косинусов.

Задача 2. Найти расстояние между двумя недоступными предметами, когда нет дальномера.

Решение. Пусть предметы расположены в точках A и B и видны из точек C и D (рис. 182). Измеряя расстояние CD и углы ACD и ADC, находим расстояние AC (по теореме синусов из треугольника ACD). Затем, измеряя углы CDB и DCB и уже зная CD, находим BC (из треугольника BCD по теореме синусов). Измеряем, наконец, угол между CA и CB и находим AB (из треугольника ABC по теореме косинусов).

§ 8. Тригонометрические функции

8.1. Тангенс

Мы уже познакомились с основами тригонометрии: с определениями и свойствами первых двух тригонометрических функций — синуса и косинуса. Кроме них, применяют и другие тригонометрические функции. Они, естественно, возникают при решении даже совсем простых задач как в теории, так и на практике. Например, мы хотим по длине тени найти высоту некоторого предмета, скажем, дерева или вышки (рис. 183, *а*). Угол, под которым виден этот предмет, мы измерить можем. Эта практическая задача в теории звучит так: *найти катет а прямоугольного треугольника по кате-*

ту b и прилежащему к нему острому углу A (рис. 183, *б*).

Решение. Пусть c — гипотенуза рассматриваемого треугольника. Тогда его катет

$$a = c\sin A.$$

А гипотенузу c по катету b и углу A находим по формуле

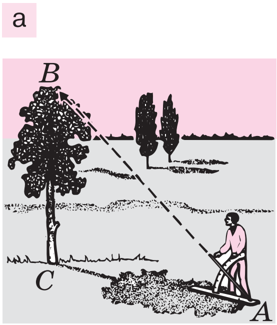
$$c = \frac{b}{\cos A}.$$

Из этих двух формул имеем

$$a = b\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (1)$$

Задача решена.

Отношение синуса и косинуса одного и того же угла появляется и при решении других задач. Поэтому удобно ввести ещё одну тригонометрическую функцию угла, которая равна отношению синуса и косинуса этого угла.



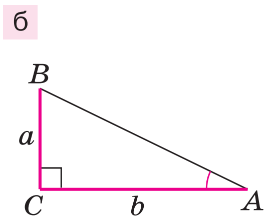


Рис. 183

Определение. **Тангенсом угла** называется отношение синуса угла к его косинусу. Эту функцию обозначают символом tg. Итак, тангенс угла A определяется равенством

$$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (2)$$

Теперь решение рассмотренной задачи вместо равенства (1) может быть записано в таком виде:

$$a = b\,\mathrm{tg}A. \qquad (3)$$

Таким образом, *тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, противолежащего этому углу, к катету, прилежащему к этому углу, т. е.*

$$\mathrm{tg}A = \frac{a}{b}. \qquad (4)$$

Короче говорят так: *тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету*.

Формула (2) показывает, что *тангенс прямого угла не определён* (поскольку знаменатель в правой части равенства (2) для прямого угла A обращается в нуль).

Как синус и косинус, *тангенс является функцией величины угла*. Поэтому пишем tg43°, tg78°

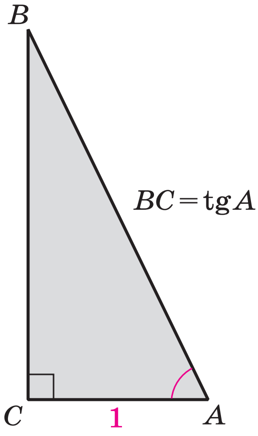


Рис. 184

и т. п. Значения тангенсов конкретных углов находят по таблицам или с помощью калькулятора.

Так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Это равенство связывает тангенсы смежных углов.

Свойства тангенса для острых углов легко увидеть, если построить прямоугольный треугольник ABC с катетом $AC = 1$. Тогда из равенства (4) следует, что $\mathrm{tg}A = BC = a$ (рис. 184). Из этого рисунка ясно, что *при увеличении угла от 0° до 90° тангенс возрастает от нуля до бесконечности*. Поэтому *для острых углов тангенс определяет угол*.

График тангенса приведён на рисунке 185.

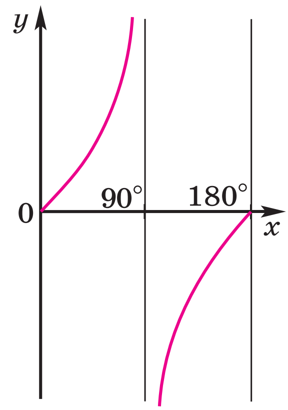


Рис. 185

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое тангенс угла?
2. Чему равен тангенс острого угла прямоугольного треугольника?
3. Какие свойства тангенса вам известны?
4. Какие практические задачи решают с помощью тангенса?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

8.1. Докажите, что тангенс острого угла больше синуса этого угла.

Рассуждаем

8.2. Верны ли такие утверждения: а) если углы не равны, то и их тангенсы не равны; б) если тангенсы углов не равны, то и сами углы не равны?

8.3. Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: а) 30°, 50°, 40°; б) 70°, 80°, 100°; в) 60°, 110°, 120°; г) 130°, 140°, 160°.

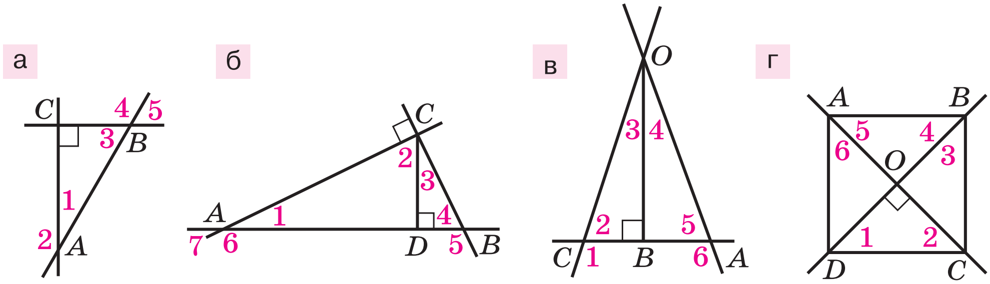


Рис. 186

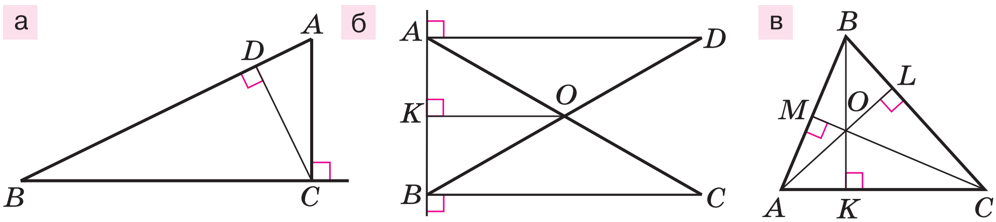


Рис. 187

Смотрим

8.4. Отношениям каких отрезков (возможно со знаком «плюс» или со знаком «минус») равны тангенсы углов, обозначенных цифрами на рисунке 186?

8.5. Выразите с помощью тангенсов углов катеты прямоугольных треугольников, изображённых на рисунке 187.

Планируем

8.6. Как найти высоту равнобедренного треугольника, зная его основание и угол при вершине?

8.7. Как вычислить сторону AC треугольника ABC, если известны высота BD и: а) углы, которые она образует со сторонами треугольника; б) углы треугольника?

8.8. Известны стороны прямоугольника. Как вычислить: а) угол между его диагональю и стороной; б) угол между его диагоналями?

8.9. Как вычислить сторону прямоугольника, если известны другая его сторона и: а) угол между ней и диагональю прямоугольника; б) угол между диагоналями прямоугольника?

8.10. Как вычислить диагональ ромба, если известна другая его диагональ и угол ромба?

8.11. Как, зная сторону правильного n-угольника, найти его апофему? А как по апофеме правильного n-угольника найти его сторону и его периметр?

Вычисляем

8.12. Найдите тангенсы углов: 0°, 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 180°.

8.13. Решите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, если: а) $a = 3{,}2$, $b = 4{,}6$; б) $a = 0{,}12$, $\angle A = 24°$; в) $a = 57$, $\angle B = 66°$; г) $b = 7{,}1$, $\angle B = 33°$; д) $b = 0{,}63$, $\angle A = 10°$.

8.14. Пусть PA — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 2 и 3. Длина $PA = 1$. Вычислите тангенс наибольшего из острых углов граней тетраэдра $PABC$.

Выводим формулу

8.15. Выразите высоту равнобедренного треугольника через его основание a и угол A при вершине.

Доказываем

8.16. Докажите, что произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника равно единице.

8.17. Используя тангенс, докажите, что квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

Исследуем

8.18. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости, а p — прямая на плоскости. Из какой точки прямой p этот перпендикуляр будет виден лучше всего?

Строим

8.19. Постройте угол, тангенс которого равен: а) 0,2; б) 1,5; в) −2; г) −0,4; д) 5.

Применяем геометрию

8.20. Высота столба равна его солнечной тени. Под каким углом падают солнечные лучи?

8.21. Как вычислить: а) угол падения солнечных лучей; б) угол подъёма лестницы; в) угол подъёма эскалатора метро; г) среднюю крутизну склона по карте; д) высоту башни, не подходя к ней?

8.2. Котангенс

Изменим геометрическую задачу, с решения которой мы начали п. 8.1. Пусть теперь требуется найти катет $AC = b$ прямоугольного треугольника ABC, зная его катет $BC = a$ и угол A. Тогда из равенства (1) получим

$$b = a\frac{\cos A}{\sin A}. \qquad (6)$$

Отношение косинуса угла к синусу того же угла рассматривают как ещё одну тригонометрическую функцию — котангенс.

Определение. **Котангенсом угла** называется отношение косинуса угла к его синусу.

Котангенс обозначается символом ctg, так что по определению

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}. \qquad (7)$$

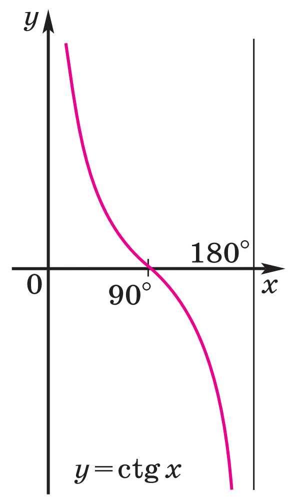


Рис. 188

В прямоугольном треугольнике котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс не существует тогда, когда синус обращается в нуль, т. е. для 0° и 180°. Котангенс, как и остальные тригонометрические функции, зависит лишь от величины угла.

Для тех углов, где тангенс и котангенс отличны от нуля, они связаны простым соотношением

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}. \qquad (8)$$

При возрастании угла от 0° до 180° (сами эти значения не рассматриваются) котангенс убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (объясните почему). График котангенса приведён на рисунке 188.

Справка словесника. Мы познакомились с четырьмя тригонометрическими функциями — синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Приставка *ко* (*co* — первые две буквы латинского слова complimentus — дополнительный) в названиях функций означает, что эта функция связана с соответствующей ей функцией, в названии которой нет такой приставки, простой зависимостью: для *дополнительных* острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC выполняются равенства

$$\cos A = \sin B,\ \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B. \qquad (9)$$

Первое из этих равенств нами доказано в п. 7.3, а второе следует из первого и определений тангенса и котангенса.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое котангенс угла?
2. Чему равен котангенс острого угла прямоугольного треугольника?
3. Какие свойства котангенса вам известны?

ЗАДАЧИ

Смотрим

8.22. Отношениям каких отрезков равны котангенсы углов, обозначенных цифрами на рисунке 186?

8.23. Выразите через котангенсы углов катеты прямоугольных треугольников, изображённых на рисунке 187.

Планируем

8.24. Известны высота BH треугольника ABC и его углы A и C. Как найти его сторону AC? Рассмотрите различные случаи.

Вычисляем

8.25. Найдите котангенсы углов: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°.

Выводим формулу

8.26. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 1$. Выразите катет AC и гипотенузу AB через различные тригонометрические функции углов A и B.

8.27. Выразите основание равнобедренного треугольника через его высоту, опущенную на основание, и угол при основании.

Строим

8.28. Постройте угол, котангенс которого равен: а) 2; б) -1; в) 0,2.

8.3. Из истории тригонометрии

Необходимость в решении треугольников возникла при решении разнообразных практических задач, прежде всего в связи с потребностями астрономии, географии, навигации. Поэтому элементы триго-

Птолемей

Региомонтан

Л. Эйлер

Бируни

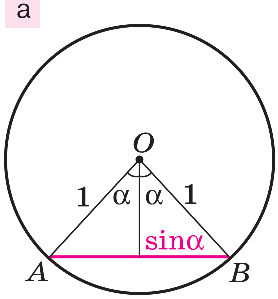
нометрии появились уже в Древнем Вавилоне, где астрономия получила значительное развитие. В знаменитом труде древнегреческого учёного Птолемея «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная система мира, содержатся не только элементы планиметрии на плоскости, но и элементы сферической тригонометрии, позволявшие решать и сферические треугольники.

В Древней Греции вместо синуса угла рассматривали длину хорды, соответствующей удвоенному углу между радиусами единичной окружности (рис. 189). Это, по существу, то же самое, так как синус равен половине такой хорды. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены Гиппархом во II в. н. э.

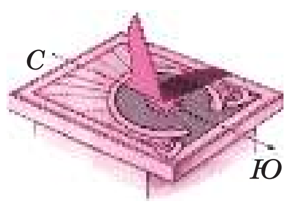
Тангенс появился в трудах арабских учёных в IX–X вв. В частности, его использовали при решении задачи по определению длины тени, необходимой для изготовления солнечных часов (рис. 190, *а*).

Как отдельный раздел математики тригонометрия выделилась в трудах персидского учёного Насирэддина Туси (1201—1274). В Европе первое изложение тригонометрии было дано в XV в. немецким учёным Иоганном Мюллером (1436—1476), известным по его псевдониму — Региомонтан. Современную форму изложения и современную символику тригонометрия получила в работах крупнейшего

а



б



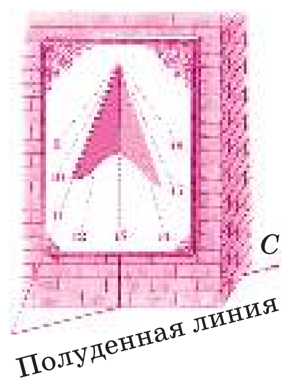


Рис. 189

математика XVIII в. — Леонарда Эйлера (1707—1783). Швейцарец по происхождению, Эйлер в 1726—1741 и 1766—1783 гг. работал в Петербурге.

Одна из двух основных теорем тригонометрии — теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора) имеется в «Началах» Евклида. Но формулируется она там по-другому, без косинуса. Теорема синусов была получена среднеазиатским учёным Бируни в XI в.

Мы познакомили вас с четырьмя из шести тригонометрических функций — синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Иногда ещё рассматривают такие функции: **секанс** — $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ и **косеканс** — $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$.

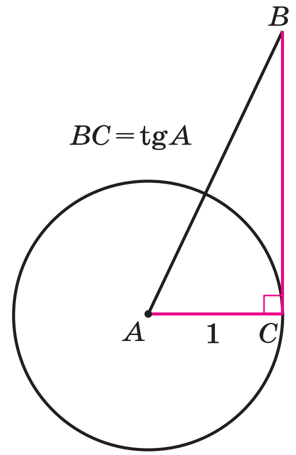


Рис. 190

Справка словесника. Происхождение термина *синус* весьма интересно. Индусы, которые первыми его рассмотрели, употребляли термин *ардхаджива* (*ардха* — половина, *джива* — тетива лука). Слово получилось длинным, и его сократили до слова *джива*. Затем арабы почему-то переделали его в слово *джиба*, которое в арабском языке вообще не имеет смысла. Поскольку произносить бессмысленные слова никому не хотелось, то слово *джиба* переделали в слово *джайб*, одно из значений которого в арабском языке — *выпуклость*. Когда в XII в. это слово с арабского перевели на латынь, то появилось слово *синус*, что по-латыни значит *изгиб*, *выпуклость*. Есть и другие версии происхождения термина *синус*.

Латинское слово tangens означает *касательная*. Можно предположить, что это связано с тем, что тангенс угла A на рисунке 190 равен касательному отрезку BC к окружности единичного радиуса. Латинское слово sekans означает *секущая* (от seko — рассекаю).

§ 9. Подобные треугольники

9.1. Определение подобных треугольников

Вообще о *подобных фигурах* можно сказать, что это фигуры, имеющие одинаковую форму, но различные размеры. Например, подобны две фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями (рис. 191), или архитектурное сооружение и его макет (рис. 192), или животное и его игрушечная фигурка (рис. 193). Подобны любые два круга и любые два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон (рис. 194).

Рис. 191

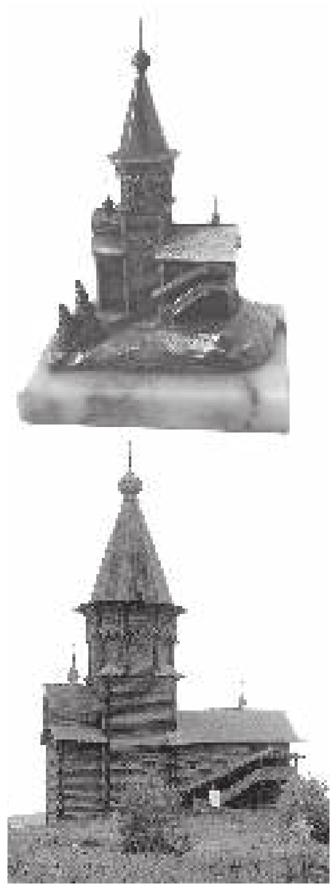


Рис. 192

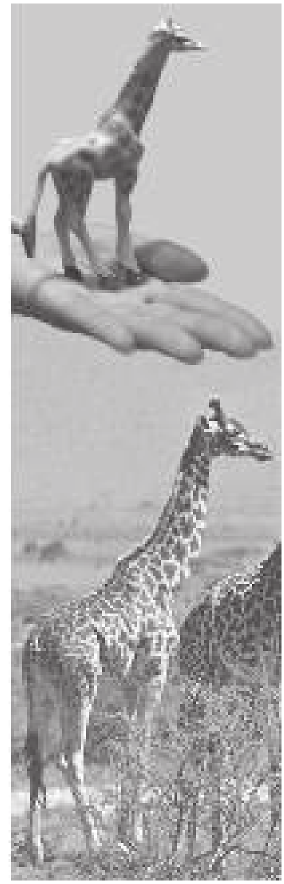


Рис. 193

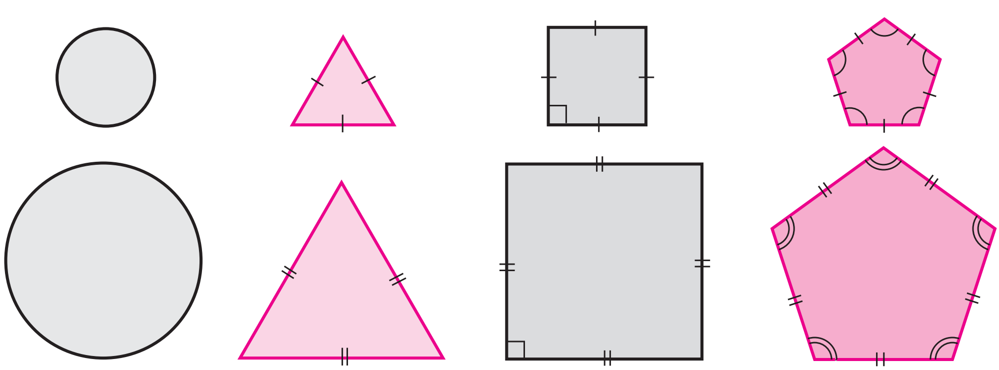
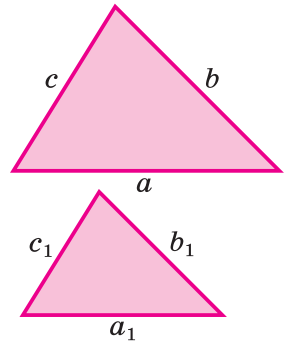


Рис. 194

Из этих примеров можно увидеть, что соответствующие линейные размеры одной фигуры, подобной некоторой другой фигуре, в одно и то же число раз меньше или больше линейных размеров другой фигуры. Так, на коробках игрушечных моделей самолётов указано, во сколько раз их детали меньше соответствующих деталей настоящих самолётов. Поэтому все размеры одной из двух подобных фигур получают, умножая на некоторое число соответствующие размеры другой из них.



$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$$

Рис. 195

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие из подобных многоугольников — подобные треугольники. Подобие произвольных фигур изучается в курсе 9 класса.

Определение. Два треугольника называются **подобными**, если стороны одного из них получаются из сторон другого умножением на некоторый множитель, т. е. стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Подробнее: два треугольника подобны, если можно так сопоставить их стороны, например обозначив стороны одного треугольника через a, b, c, а соответствующие стороны другого треугольника через a_1, b_1, c_1 (рис. 195), что будем иметь равенства отношений соответствующих сторон, т. е. равенства

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}. \qquad (1)$$

Если эти отношения обозначить через k, то из равенств (1) получаем, что

$$a_1=ka, \quad b_1=kb, \; c_1=kc. \qquad (2)$$

Ясно, что верно и обратное утверждение: из равенств (2) следуют равенства (1). Итак, равенства (1) и (2) равносильны. Положительное число k называется **коэффициентом подобия**.

Из подобия двух треугольников вытекают как равенства (1), так и равенства (2). Обратно: два треугольника подобны, если установлено, что их стороны пропорциональны, т. е. выполняются равенства (1) или, что равносильно, равенства (2).

Рассматривая два подобных треугольника, мы считаем выбранными введённые здесь обозначения их сторон, а вершины треугольников, лежащие против этих сторон, обозначаем, как обычно, через A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Итак, говорят, что **треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, если выполняются равенства (2)**. В этом случае пишут: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Это утверждение вытекает из равенств (2).

Если $k = 1$, то треугольники равны. Поэтому *равенство треугольников — это частный случай подобия треугольников (с коэффициентом подобия, равным единице).*

Вопросы для самоконтроля

1. Какие фигуры называются подобными?
2. Какие треугольники называются подобными?
3. Что такое коэффициент подобия?
4. Верно ли, что равные треугольники подобны? Равны ли подобные треугольники?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

9.1. Докажите, что прямоугольные треугольники, имеющие соответственно равные острые углы, подобны.

9.2. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

9.3. Докажите, что подобны равнобедренные треугольники, у которых равны углы при: а) вершинах; б) основаниях.

Рассуждаем

9.4. Объясните, почему подобны друг другу все равносторонние треугольники.

9.5. Объясните, почему два треугольника, подобные третьему треугольнику с коэффициентами k и k_1, подобны друг другу. Как найти коэффициент их подобия?

Смотрим

9.6. На рисунке 196 укажите подобные треугольники.

9.7. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. Назовите в них соответственные стороны. Запишите их пропорциональность.

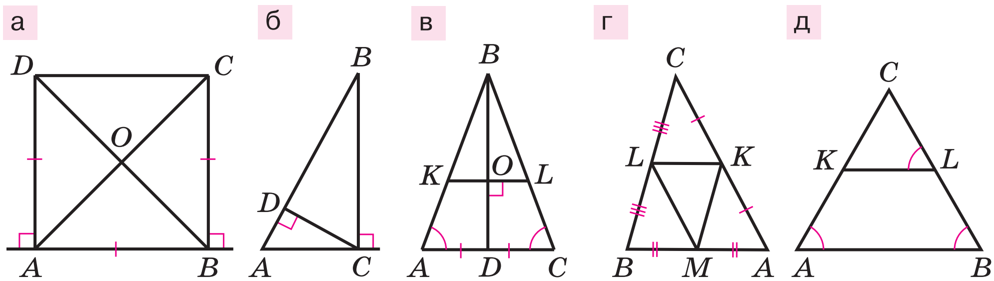


Рис. 196

9.8. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами a и b высота $CH = h$. Докажите ещё раз (см. также задачу 6.7) равенства $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h^2 = a_1b_1$, где $c = AB$, $a_1 = BH$, $b_1 = AH$.

± Вычисляем

9.9. Стороны треугольника равны 3, 4, 6. Чему равны стороны треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) 0,5? В каждом случае найдите периметр подобного треугольника.

Доказываем

9.10. Докажите, что прямоугольные треугольники, катеты которых пропорциональны, подобны.

9.11. Докажите, что два прямоугольных треугольника, у которых катет и гипотенуза одного пропорциональны катету и гипотенузе другого, подобны.

9.2. Признаки подобия треугольников

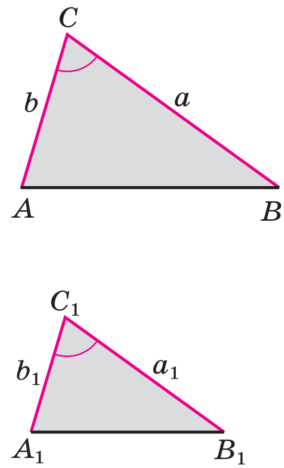
Мы докажем два признака подобия треугольников. Доказанные ранее признаки равенства треугольников являются частными случаями признаков подобия треугольников.

Теорема 11 (*первый признак подобия треугольников*). **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

Доказательство. Допустим, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы C и C_1 и пропорциональны заключающие эти углы стороны рассматриваемых треугольников (рис. 197). Тогда, используя введённые обозначения, имеем равенства

$$a_1 = ka,\ b_1 = kb, \qquad (3)$$

т. е. выполняются два из трёх равенств (2). Докажем, что выполняется и третье равенство, т. е. что $c_1 = kc$.



$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$

Рис. 197

Найдём, применяя теорему косинусов (см. формулу (14) из п. 7.5), квадрат стороны c_1:

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos C_1 =$$
$$= (ka)^2 + (kb)^2 - 2(ka)(kb)\cos C =$$
$$= k^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = k^2c^2 = (kc)^2.$$

Следовательно, и $c_1 = kc$, т. е. все три пары сторон рассматриваемых треугольников пропорциональны и эти треугольники подобны. ■

Теорема 12 (*второй признак подобия треугольников*). **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны два угла: $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 198). Тогда равны и их третьи углы: $\angle C = \angle C_1$. Итак,

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1. \qquad (4)$$

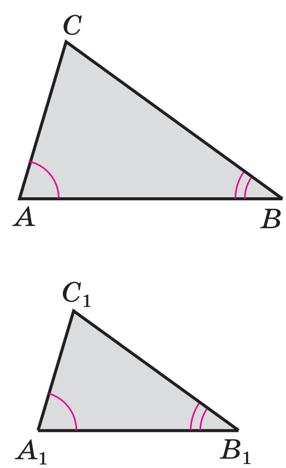


Рис. 198

Докажем пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Из равенств (4) следует, что

$$\sin A = \sin A_1,\ \sin B = \sin B_1,\ \sin C = \sin C_1. \qquad (5)$$

Согласно теореме синусов стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов треугольника. Поэтому

$$a = p\sin A,\ b = p\sin B,\ c = p\sin C \qquad (6)$$

и

$$a_1 = q\sin A_1,\ b_1 = q\sin B_1,\ c_1 = q\sin C_1. \qquad (7)$$

Из равенств (5), (6) и (7) следует, что

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{q}{p},$$

т. е. стороны рассматриваемых треугольников пропорциональны и эти треугольники подобны. ■

Замечание. Отметим, что первый признак подобия треугольников вытекает из теоремы косинусов, а второй — из теоремы синусов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие признаки подобия треугольников вам известны? Сравните их с признаками равенства треугольников.
2. Какие признаки подобия прямоугольных треугольников вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

9.12. Хорда треугольника, параллельная его стороне, отсекает от него треугольник, подобный данному. Докажите. Проверьте обратное. Какие следствия вы можете получить из доказанного утверждения?

9.13. Пусть две параллельные прямые пересекаются тремя (или более) прямыми, проходящими через одну и ту же точку, не лежащую на данных параллельных прямых. Докажите, что на параллельных прямых получились пропорциональные отрезки.

Рассуждаем

9.14. Два угла одного треугольника равны $70°$ и $80°$, а два угла другого треугольника равны $30°$ и $80°$. Подобны ли эти треугольники?

9.15. Какие признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников можно получить как непосредственные следствия двух признаков подобия треугольников? А какие уже известные вам признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников не являются следствиями общих признаков подобия треугольников?

Смотрим

9.16. Найдите подобные треугольники на рисунке 199 на с. 144. Напишите пропорциональность их соответствующих сторон.

9.17. Проведите две медианы треугольника и среднюю линию этого треугольника, соединяющую концы медиан. Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. Запишите пропорциональность их соответствующих сторон.

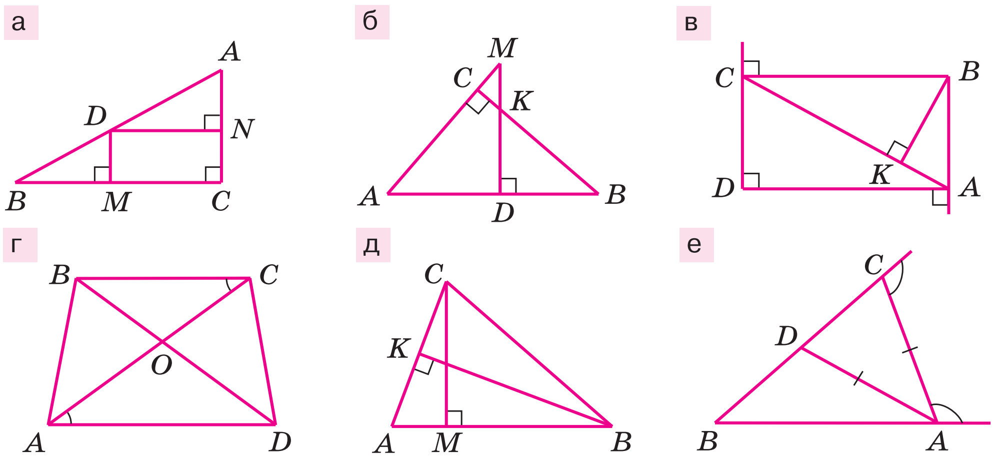


Рис. 199

Планируем

9.18. Нарисуйте треугольник, а затем какой-нибудь отрезок. Как построить треугольник, подобный данному, у которого одна из сторон является нарисованным отрезком?

Вычисляем

9.19. Хорда KM треугольника ABC идёт из точки K стороны AB параллельно его стороне BC. Найдите: а) BK, если $AK = 4$, $AM = 6$, $MC = 10$; б) MC, если $AM = 2$, $AB = 6$, $AK = 4$; в) AC, если $KB = 3$, $MC = 4$, $AB = 10$; г) KM, если $AK = 4$, $BK = 6$, $BC = 20$; д) BC, если $KM = 5$, $AM = 2$, $MC = 6$.

9.20. Хорда PO треугольника ABC идёт от точки P стороны AB до точки O стороны AC. Пусть $\angle AOP = \angle ABC$. Найдите: а) AO, если $AB = 6$, $AP = 4$, $AC = 12$; б) BP, если $AP = 4$, $AO = 3$, $AC = 8$; в) PO, если $AB = 12$, $BC = 8$, $AO = 6$.

Разбираемся в решении

9.21. Биссектриса BK равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник BCK (рис. 200). Найдите углы треугольников ABC и BCK. Найдите их стороны, считая, что $BC = a$. Постройте циркулем и линейкой эти треугольники по отрезку $BC = a$.

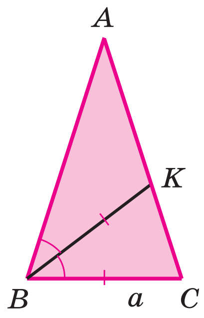


Рис. 200

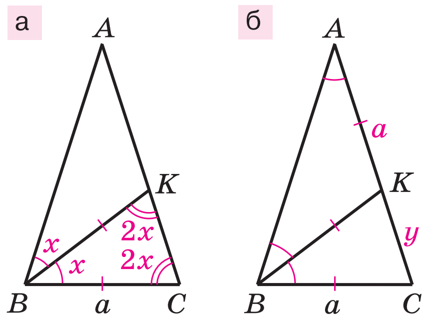


Рис. 201

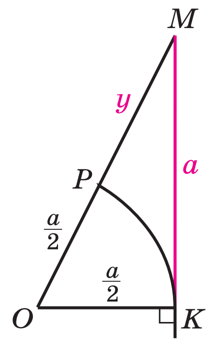


Рис. 202

Решение. Сначала найдём углы треугольников ABC и BCK. Если угол при вершине B равнобедренного треугольника BCK обозначить через x (рис. 201, *а*), то углы при его основании равны $2x$. Следовательно,

$$2x + 2x + x = 180°,$$

а потому $x = 36°$. Итак, углы треугольника BCK равны 36°, 72° и 72°. Такие же углы имеет и треугольник ABC, а потому треугольники ABC и BCK подобны. Вычислим их стороны.

Так как $BC = BK$, то $BK = a$. Треугольник ABK — равнобедренный, так как его углы равны 36°, 36° и 108°. Поэтому $BK = AK$ и $AK = a$. Пусть $KC = y$ (рис. 201, *б*). Тогда из подобия треугольников ABC и BCK имеем

$$(y + a) : a = a : y.$$

Это равенство приводит к такому квадратному уравнению:

$$y^2 + ay - a^2 = 0.$$

Нас интересует лишь его положительное решение (почему?). Оно выражается формулой

$$y = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Как строится циркулем и линейкой по отрезку a отрезок y, показано на рисунке 202. Теперь мы знаем все стороны треугольников ABC и BCK, если задан отрезок a. Об отношении отрезков a и y мы ещё будем говорить в следующем параграфе.

Доказываем

9.22. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ADO и BCO подобны.

9.23. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная стороне, противоположной этой вершине. Докажите, что эти прямые ограничивают треугольник, подобный данному. Сравните его площадь с площадью данного треугольника.

9.24. В треугольнике проведена медиана к одной из сторон. Докажите, что каждая хорда треугольника, параллельная этой стороне, делится данной медианой пополам. Попробуйте обобщить этот результат.

Исследуем

9.25. Биссектриса рассекает равнобедренный треугольник на два подобных ему треугольника. Какие углы у этих треугольников?

Применяем геометрию

9.26. По преданию, Фалес Милетский измерил высоту пирамиды по длине её тени в тот момент, когда длина тени предмета была равна его высоте. На что опирался Фалес в своих рассуждениях?

9.27. Как проверить, подобны ли два чертёжных треугольника?

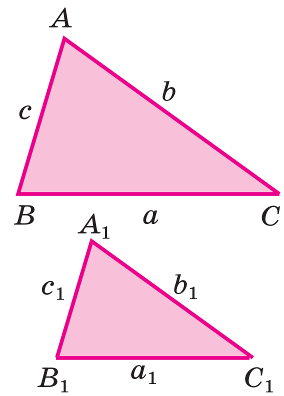
9.3. Свойства подобных треугольников

Примеры подобных фигур, рассмотренные ранее, подсказывают нам, что у подобных фигур углы между соответствующими элементами этих фигур равны. Докажем это для подобных треугольников.

СВОЙСТВО 1. Соответственные углы подобных треугольников равны.

Доказательство. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k (рис. 203). Тогда $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$. Вычисляя косинус угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ по теореме косинусов, получаем

$$\cos C_1 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 : (2a_1b_1) =$$
$$= k^2 (a^2 + b^2 - c^2) : (2k^2ab) =$$
$$= (a^2 + b^2 - c^2) : (2ab) = \cos C.$$



$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

Рис. 203

Из равенства косинусов углов C_1 и C следует равенство этих углов. Аналогично доказываются и равенства других соответствующих углов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. ■

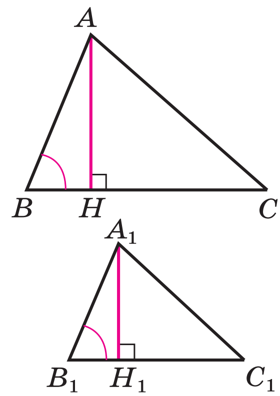


Рис. 204

Замечание. Опираясь на это свойство, нетрудно доказать, что и другие соответствующие друг другу углы (например, двугранные) в подобных фигурах равны. Кратко об этом говорят так: *при подобии углы сохраняются.*

Об отношении соответственных друг другу отрезков в подобных треугольниках говорится в следующем свойстве.

СВОЙСТВО 2. **Соответственные отрезки в подобных треугольниках относятся как соответственные стороны, т. е. их отношение равно коэффициенту подобия.**

Говоря о соответственных отрезках, мы имеем в виду соответственные высоты, медианы, биссектрисы и т. п. в подобных треугольниках. Докажем это утверждение для соответственных высот. Для медиан и биссектрис докажите его самостоятельно.

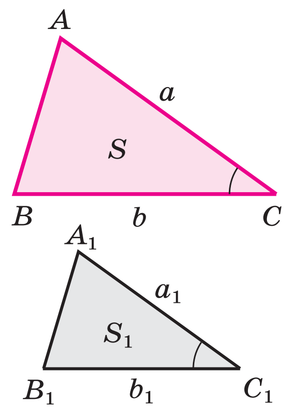


Рис. 205

□ Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k. Проведём в этих треугольниках высоты A_1H_1 и AH (рис. 204). Они будут катетами прямоугольных треугольников $A_1B_1H_1$ и ABH. Поэтому

$$A_1H_1 = A_1B_1 \sin B_1 \text{ и } AH = AB \sin B.$$

Согласно свойству 1 углы B и B_1 равны. Поэтому равны и их синусы. Следовательно,

$$A_1H_1 : AH = A_1B_1 : AB = k. \blacksquare$$

Выясним теперь, чему равно отношение площадей подобных фигур.

СВОЙСТВО 3. **Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия этих фигур.**

□ Докажем это свойство для площадей S_1 и S подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC (рис. 205). Имеем $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $\angle C_1 = \angle C$. Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1\sin C_1 = \frac{1}{2}kakb\sin C = k^2S, \text{ т. е. } S_1 : S = k^2. \blacksquare$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства подобных треугольников вам известны?
2. Какое свойство подобных треугольников совпадает со свойством равных треугольников?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

9.28. Два угла треугольника равны 40° и 50°. Чему равны углы треугольника, подобного данному?

9.29. Каким по виду будет треугольник, подобный данному, если данный треугольник: а) прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный; г) равнобедренный?

Смотрим

9.30. Найдите отрезок x на рисунке 206 (когда это возможно).

9.31. Сравните данную площадь S и неизвестную площадь x на рисунке 207.

Вычисляем

9.32. Один конец отрезка лежит на данной прямой, а другой удалён от неё на расстояние d. Чему равно расстояние до прямой: а) от середины этого отрезка; б) от точки отрезка, делящей его в отношении 2 : 3?

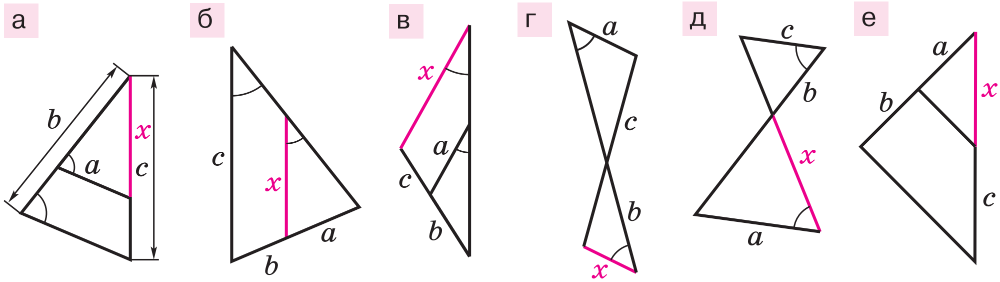


Рис. 206

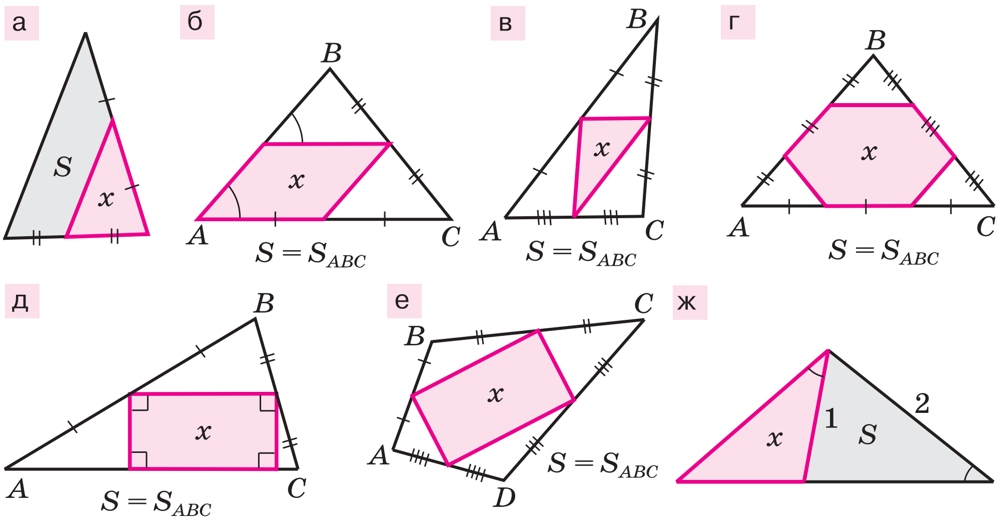


Рис. 207

9.33. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Продолжения её боковых сторон AB и DC за точки B и C пересеклись в точке O. Найдите площади треугольников OBC и OAD, если: а) $AB : BO = 1 : 1$; б) $AB : BO = 1 : 2$; в) $AO : AB = 4 : 1$; г) $BC : AD = 1 : 3$.

9.34. Площадь треугольника ABC равна S. Чему равны площади треугольника AKM и трапеции $KMCB$, на которые разобьёт треугольник ABC хорда KM, идущая от точки K на стороне AB параллельно стороне BC, если: а) $AK : KB = 1 : 2$; б) $AK : AB = 2 : 3$; в) $KM : BC = 1 : 3$? В каком отношении следует разделить точкой K отрезок AB, чтобы треугольник AKM и трапеция $KMCD$ оказались равновеликими?

9.35. Площадь трапеции равна S, а основания её относятся как $1 : 3$. Найдите площади треугольников, на которые разбивают трапецию её диагонали.

Доказываем

9.36. Нарисуйте угол ab с вершиной O. На стороне a отложите равные отрезки: $OA = AB = BC = CD$. На стороне b также отложите равные отрезки: $OK = KL = LM = MN$. Докажите, что прямые AK, BL, CM, DN параллельны друг другу. Как связаны длины отрезков AK, BL, CM, DN?

9.37. В четырёхугольнике $ABCD$ точка O пересечения диагоналей делит эти диагонали на пропорциональные (но не равные друг другу) отрезки: $AO : OC = BO : OD$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

9.38. На сторонах угла ab с вершиной O отложены отрезки OA, OB на стороне a и отрезки OC, OD на стороне b. Известно, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODA$.

9.39. Внутри острого угла AOB провели луч с началом в точке O. По нему от вершины движется точка X. Докажите, что отношение расстояний от точки X до сторон угла постоянно. Проверьте обратное. Будет ли верно это утверждение для тупого угла?

Исследуем

9.40. Прямая, проведённая через вершину B треугольника ABC, разбила его на два подобных треугольника ABK и BCK. Какие углы в этих треугольниках равны?

9.41. Прямая, проведённая через вершину B треугольника ABC, отсекла от него треугольник ABK, подобный данному. Какие углы в этих треугольниках равны?

Применяем геометрию

9.42. Используя подобие, предложите способ вычисления: а) расстояния до недоступного, но наблюдаемого объекта; б) расстояния между двумя недоступными, но наблюдаемыми объектами.

§ 10. Применения теорем о подобии треугольников

10.1. Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса

Напомним, что **хордой многоугольника** мы называем отрезок, соединяющий точки двух сторон многоугольника. Решив задачу 9.12 в п. 9.2, вы доказали, что *хорда, параллельная стороне треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник* (рис. 208).

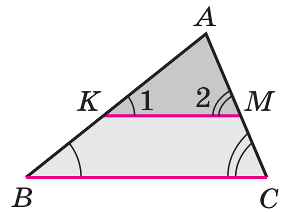


Рис. 208

□ Действительно, если хорда KM параллельна стороне BC треугольника ABC, то $\angle 1 = \angle B$ (как соответственные при параллельных BC и KM и секущей AB) и $\angle 2 = \angle C$ (как соответственные при тех же параллельных и секущей AC). Поэтому треугольник AKM подобен треугольнику ABC (по второму признаку подобия треугольников). ■

Это утверждение часто будет применяться при доказательстве теорем и решении задач. Такие вспомогательные утверждения называют **леммами.** Снова сформулируем лемму, дополнив её ещё одним полезным утверждением.

Лемма **Хорда треугольника, параллельная его стороне, во-первых, отсекает от него подобный ему треугольник и, во-вторых, разбивает две другие стороны треугольника на пропорциональные отрезки.**

Доказательство. Первое утверждение леммы уже доказано. Докажем второе её утверждение, т. е. докажем равенство

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MC}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников ABC и AKM следует, что

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM}.$$

Так как $AB = AK + KB$ и $AC = AM + MC$, то

$$\frac{AK + KB}{AK} = \frac{AM + MC}{AM}. \qquad (2)$$

Поделив почленно числитель в обеих частях равенства (2) на знаменатель, получим

$$1 + \frac{KB}{AK} = 1 + \frac{MC}{AM}.$$

Поэтому $\frac{KB}{AK} = \frac{MC}{AM}$. А это и означает, что выполняется равенство (1). ■

Справка словесника. Из нескольких значений греческого слова *лемма* выделим значение *доход*. Мы увидим сейчас, что доказанная нами лемма даст неплохой «доход» в виде теорем.

Теорема 13 (*о параллельных прямых, пересекающих сторону угла*). **Параллельные прямые, пересекающие сторону угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.**

Доказательство. Пусть стороны угла O — лучи p и q — пересекают параллельные прямые a, b, c соответственно в точках A, A', B, B', C, C' (рис. 209). Требуется доказать, что

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad (3)$$

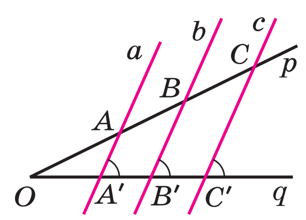


Рис. 209

Согласно лемме имеет место следующее равенство:

$$OA : AB = OA' : A'B', \text{ или } \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

т. е. выполняется первое из равенств (3). Докажем теперь, что

$$BC : B'C' = OA : OA'. \qquad (4)$$

Применим лемму к треугольнику OCC' и его хорде BB'. Получим

$$OB : BC = OB' : B'C'. \qquad (5)$$

Поэтому

$$BC : B'C' = OB : OB'. \qquad (6)$$

Из подобия треугольников OAA' и OBB' следует, что

$$OB : OB' = OA' : OA'. \qquad (7)$$

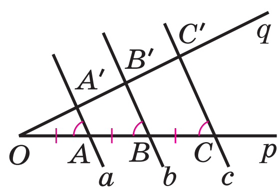
Из равенств (6) и (7) следует равенство (4). Итак, все три отношения в формуле (3) равны. Равенства (3) доказаны. ■

Частным случаем только что доказанной теоремы является

Теорема Фалеса **Если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной из сторон угла отсекают равные отрезки, то и на другой его стороне они отсекают равные отрезки** (рис. 210).

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема Фалеса?
2. Частным случаем какой теоремы является теорема Фалеса?



Если $OA = AB = BC$ и $a \parallel b \parallel c$, то $OA' = A'B' = B'C'$.

Рис. 210

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

10.1. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, и $AK : KB = AM : MC$. Докажите, что хорда KM параллельна BC.

10.2. Точки K и M лежат соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, и $AK : KB = DM : MC$. Докажите, что хорда KM параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

10.3. Ещё раз докажите, глядя на рисунок 211 и используя теоремы о пропорциональных отрезках, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Смотрим

10.4. Найдите на рисунке 212 подобные треугольники и пропорциональные отрезки.

10.5. Найдите длины неизвестных отрезков x, y и z на рисунке 213.

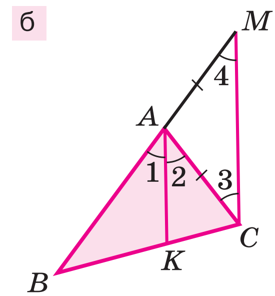


Рис. 211

Вычисляем

10.6. Пусть продолжения боковых сторон AB и DC трапеции $ABCD$ за точки B и C пересекаются в точке P, а хорда KM соединяет точку K стороны AB с точкой M стороны DC и параллельна основаниям трапеции. Найдите:

а) AD и KM, если $\angle A + \angle D = 90°$, $AB = BC = 6$, $CD = 8$, $AK = KB$;
б) BC и CM, если $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 13$, $KP = 8$, $AK = KB = BP$;
в) BP и AD, если $AK = 4$, $KB = 2$, $BC = 4$, $PM = 10$, $PC = 2$;
г) BC, AD, MD, если $PA = 10$, $AK = 5$, $AB = 7$, $KM = 8$, $CM = 6$;
д) PC, BC, AD, если $PB = 2$, $BK = 3$, $AK = 4$, $KM = 5$, $MD = 6$.

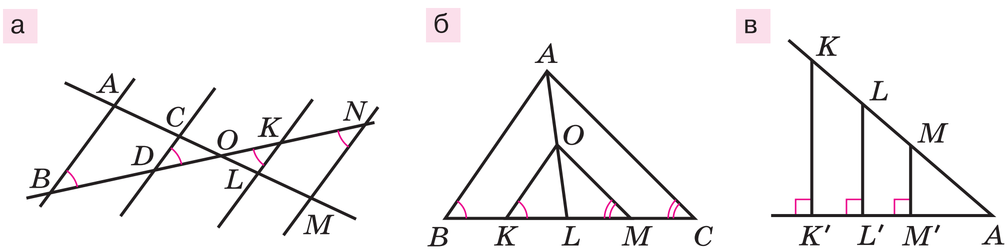


Рис. 212

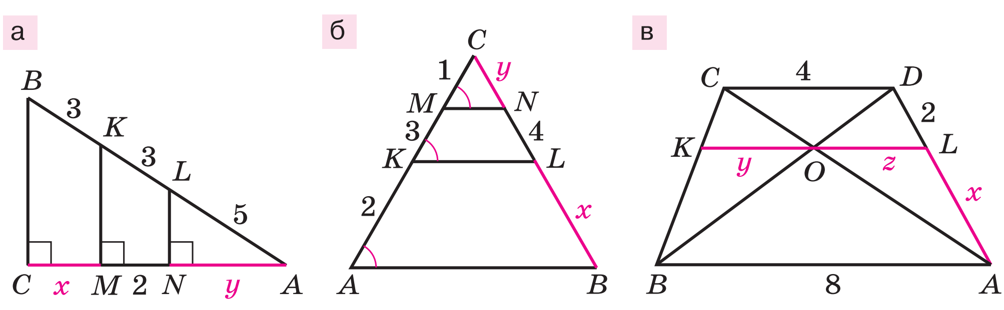


Рис. 213

10.2. Фалес

Изучая подобие треугольников, мы уже дважды упомянули имя знаменитого древнегреческого математика и астронома Фалеса Милетского (ок. 625—547 гг. до н. э.). Расскажем о нём подробнее. Фалес — один из семи мудрецов Древней Греции (правда, сейчас широко известны из них лишь математик Фалес и законодатель Солон Афинский). В молодости Фалес побывал в Египте и изучал там разные науки. Затем он возвратился на родину и основал в городе Милете (Малая Азия) знаменитую философскую школу. Фалес познакомил греков с достижениями египетской геометрии и астрономии. По преданию, Фалес смог предсказать солнечное затмение, происшедшее 28 мая 585 г. до н. э. Он дал первые представления об электричестве и магнетизме: открыл свойство натёртого янтаря притягивать предметы и наблюдал притяжение некоторыми видами железной руды отдельных кусков железа.

Фалес

С именем Фалеса связывают превращение геометрии из чисто прикладной науки в теоретическую. К вопросу «как?», на который давала ответы наука Древнего Египта и Вавилона, добавился вопрос «почему?», который потребовал *доказательств* выдвигаемых утверждений. Кроме той теоремы Фалеса, о которой сказано в п. 10.1, с его именем связывают *доказательство* следующих утверждений: вертикальные углы равны; в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; второй признак равенства треугольников (по стороне и двум углам); угол между хордами круга, опирающийся на диаметр круга, — прямой. Новым для вас является лишь утверждение про угол, опирающийся на диаметр (рис. 214, *а*). Докажем его.

□ Рассмотрим треугольник ABC, сторона AB которого является диаметром окружности F, а вершина C лежит на окружности F. Проведём радиус OC окружности F (рис. 214, *б*). Он разобьёт треуголь-

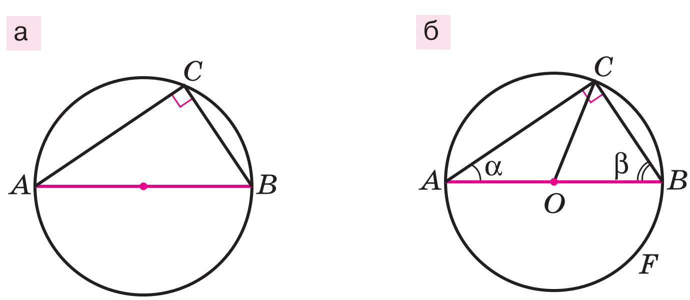


Рис. 214

ник ABC на два равнобедренных треугольника OAC и OBC. Их углы при основаниях AC и BC обозначим через α и β соответственно. Тогда угол C треугольника ABC равен $\alpha + \beta$, а потому сумма всех углов треугольника ABC равна $2\alpha + 2\beta$, т. е. $2\alpha + 2\beta = 180°$. Следовательно, угол C треугольника ABC равен $90°$ — это прямой угол. ■

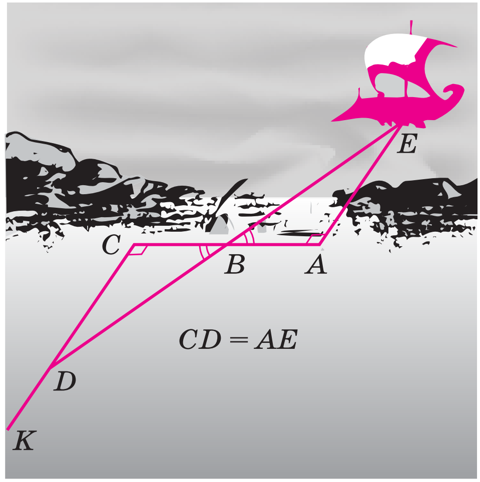


Рис. 215

Свои теоретические знания Фалес использовал для практических приложений. Об одном из них — об определении высоты египетской пирамиды — мы уже говорили. Другим практическим применением было построение дальномера для определения расстояния от корабля до берега (рис. 215). Использование такого дальномера опиралось на то, что треугольник полностью определяется своей стороной и прилежащими к ней углами.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы узнали о Фалесе? Что вам известно из истории о других философах Древней Греции?
2. Как вы думаете, как пользовались дальномером Фалеса?
3. Какую новую для вас теорему вы узнали в этом пункте?
4. Как вы думаете, где лежат в пространстве вершины прямых углов прямоугольных треугольников с общей гипотенузой?

10.3. Применения подобия при решении задач на построение

Теоремы о подобии дают возможность с помощью циркуля и линейки решить несколько важных задач на построение. Начнём с задачи о делении отрезка на равные части.

Задача 1 (*о делении отрезка на равные части*). Разделить циркулем и линейкой данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Решим задачу, например, для $n = 3$. Для любых других n решение точно такое же. Проведём из точки A любой луч p, не лежащий на прямой AB (рис. 216, *а*). От точки A на луче p отложим последовательно три каких-нибудь равных друг другу отрезка AA_1, A_1A_2, A_2A_3 (рис. 216, *б*). Проведём прямую BA_3 и через

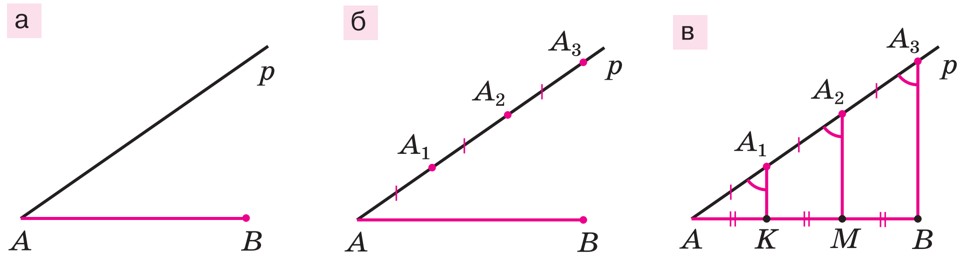


Рис. 216

точки A_1 и A_2 две прямые, параллельные прямой BA_3 (рис. 216, *в*). Их точки пересечения с отрезком AB — точки K и M — и разобьют отрезок AB на три равные части (согласно теореме Фалеса).

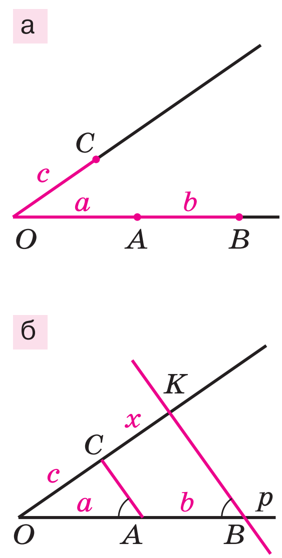


Рис. 217

Задача 2 (*о построении четвёртого пропорционального*). По трём отрезкам a, b, c циркулем и линейкой построить такой отрезок x, что

$$a : b = c : x. \tag{8}$$

Решение. Построим любой неразвёрнутый угол O. На одной его стороне сначала отложим отрезок $OA = a$, а затем отрезок $AB = b$ (рис. 217, *а*). На другой стороне угла O отложим отрезок $OC = c$ и проведём отрезок AC. Через точку B проведём прямую p, параллельную прямой AC. Прямая p пересечёт луч OC в некоторой точке K (рис. 217, *б*). Отрезок CK и будет искомым отрезком x. Действительно, по лемме из п. 10.1

$$OA : AB = OC : CK,$$

т. е. для отрезка $x = CK$ выполняется равенство (8).

Построение четвёртого пропорционального отрезка всегда происходит, когда задачу на построение решают *методом подобия*. Покажем, в чём состоит этот метод, решив, например, такую задачу:

Задача 3. Построить треугольник ABC по заданным углам B и C и высоте h, опущенной на сторону BC.

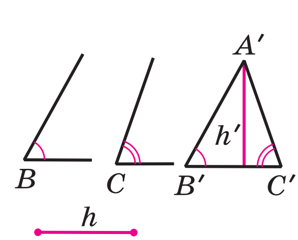
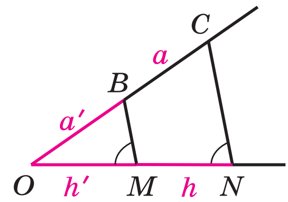


Рис. 218

Решение. Построим любой треугольник $A'B'C'$, в котором $\angle B' = \angle B$ и $\angle C' = \angle C$ (рис. 218). Проведём его высоту h' из вершины A'. Поскольку искомый треугольник ABC подобен построенному треугольнику, то согласно свойству 2 подобных треугольников (см. п. 9.3) $BC : h = B'C' : h'$. Три члена этой пропорции нам известны. Поэтому мы можем построить и неизвестный четвёртый отрезок — отрезок BC (рис. 219). А затем построить треугольник ABC по стороне BC и прилежащим к ней углам B и C.



$OB = B'C'$,
$OM = h'$,
$MN = h$

Рис. 219

В решении этой задачи хорошо видна суть метода подобия: 1) сначала строим фигуру, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме одного линейного условия, и подобную искомой фигуре (в задаче 3 это был треугольник с двумя заданными углами); 2) затем находим, строя четвёртый пропорциональный отрезок, такой элемент искомой фигуры, который позволяет легко её построить (в задаче 3 это была сторона BC).

Построение моделей архитектурных сооружений, автомобилей, самолётов и т. п. и проведение исследований на этих моделях — это тоже метод подобия, его практическое применение.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит метод подобия?
2. Какие задачи мы решили методом подобия?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

10.7. Можно ли считать задачу о делении отрезка на равные части частным случаем задачи о построении четвёртого пропорционального отрезка?

Планируем

10.8. Известны две стороны параллелограмма и одна из его высот. Как построить другую высоту параллелограмма, не строя сам параллелограмм?

10.9. Известны две стороны треугольника и высота, опущенная на одну из них. Как построить высоту на другую заданную сторону, не строя сам треугольник?

10.10. Как построить квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику?

10.11. Как построить квадрат, площадь которого в 25 раз меньше площади заданного квадрата?

Строим

10.12. Пусть даны единичный отрезок e, а также отрезки a и b. Постройте отрезок: а) ab; б) a^2; в) $\frac{a}{b}$; г) $\frac{a^2}{b}$; д) $\frac{a^2}{b^2}$; е) a^3.

★ 10.4. Построение среднего геометрического

Подобные треугольники появляются и при построении отрезка, который является **средним пропорциональным двух данных отрезков** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$, т. е. такого отрезка x, что $a : x = x : b$. Среднее пропорциональное двух данных отрезков называют также их **средним геометрическим**.

Строят среднее геометрическое двух данных отрезков a и b так. Сначала строят отрезок AB, являющийся суммой отрезков $AK = a$ и $BK = b$ (рис. 220, *а*). Затем строят полуокружность P с центром в середине отрезка AB — точке O — и радиусом OA (рис. 220, *б*). Через точку K проводят прямую, перпендикулярную прямой AB (рис. 220, *в*). Эта прямая пересечёт полуокружность P в некоторой точке C. Отрезок KC и является средним геометрическим отрезков $AK = a$ и $BK = b$. Докажем это.

□ Треугольник ABC — прямоугольный (хорды CA и CB полуокружности P опираются на её диаметр AB, а потому угол ACB прямой). Прямоугольные треугольники ACK и BCK имеют общие острые углы с прямоугольным треугольником ABC. Поэтому у них равные острые углы. Следовательно, треугольники ACK и BCK подобны, а их катеты пропорциональны. Значит, $AK : KC = KC : BK$. ■★

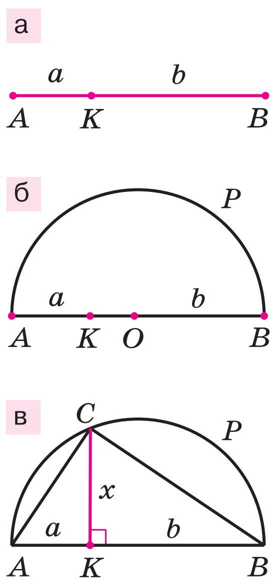


Рис. 220

★ 10.5. Пентаграмма и золотое сечение

Пентаграммой называют пятиконечную звезду, образованную диагоналями правильного пятиугольника (рис. 221). Греческое слово *пентаграмма* имеет два корня: *пента* — пять и *грамма* — черта, линия. В древности пентаграмма считалась символом совершенства. У пифагорейцев она

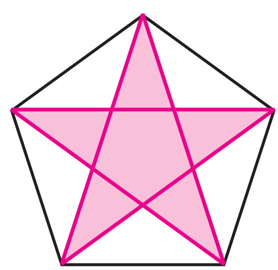


Рис. 221

была их опознавательным знаком. А в Средние века пентаграмме придавали мистический смысл. Пятиконечная звезда, пожалуй, самая распространённая геометрическая фигура на флагах и гербах различных государств. Больше всего пятиконечных звёзд на флаге США — пятьдесят: по числу штатов. Пятиконечные звёзды установлены и на пяти башнях Московского Кремля (рис. 222). Красная пятиконечная звезда была символом Советской армии. Чем же на протяжении многих тысячелетий привлекает людей эта геометрическая фигура? В чём её красота? Оказывается, в том, что она наполнена золотыми пропорциями, или золотыми сечениями отрезков. Это наименование дал Леона́рдо да Винчи (1452—1519) такому делению отрезка a на два отрезка x и $a - x$, при котором *отношение всего отрезка a к его большей части x равно отношению большей части x к меньшей части $a - x$*. В Древней Греции (например, в «Началах» Евклида) о таком делении отрезка говорили как о *делении отрезка в крайнем и среднем отношении*. Алгебра сводит задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении к решению уравнения

$$a : x = x : (a - x). \qquad (9)$$

Это уравнение мы решим чуть позже (и алгебраически, и геометрически), а сейчас вернёмся к изучению пентаграммы и найдём в ней золотые сечения.

Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 223, *а*). Его углы равны 108°. Проведём диагонали AC и AD (рис. 223, *б*). Они разобьют пятиугольник на равнобедренный треугольник ACD и два равных друг другу равнобед-

Рис. 222

Леонардо да Винчи

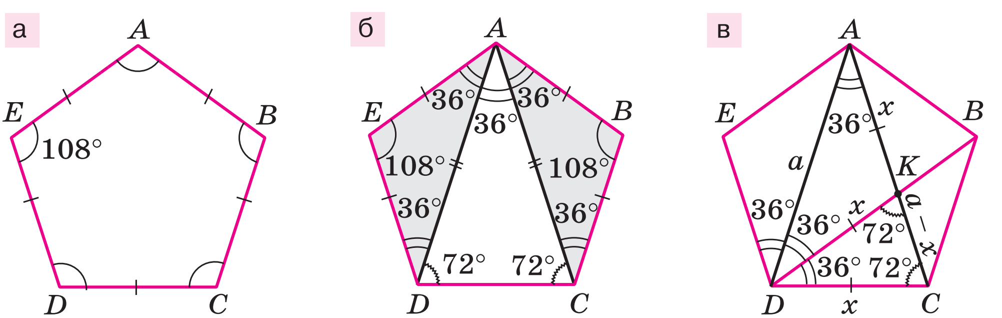


Рис. 223

ренных треугольника ABC и AED с углами при вершинах B и E, равными по $108°$. Поэтому углы при их основаниях равны по $36°$. Значит, треугольник ACD имеет угол $36°$ при вершине A и углы по $72°$ при основании CD. (Вспомните, что такие равнобедренные треугольники мы уже рассматривали, решая задачу 9.21 в п. 9.2.)

Проведём теперь диагональ BD (рис. 223, *в*) и обозначим через K точку её пересечения с диагональю AC. Так как $\angle BDC = 36°$, то отрезок DK — биссектриса треугольника CDA. Поскольку два угла треугольника DKC равны $36°$ и $72°$, то он подобен треугольнику ACD, у которого также углы равны $36°$ и $72°$. Положим $AC = a$ и $CD = x$. Тогда $CD = DK = KA = x$ и $KC = a - x$. Из подобия треугольников ACD и DCK следует, что $AC : CD = CD : CK$, т. е. $a : x = x : (a - x)$. Мы пришли к уравнению (9) и доказали, что *точки пересечения диагоналей правильного пятиугольника делят эти диагонали в среднем и крайнем отношении.*

Приведя уравнение (9) к уравнению $x^2 + ax - a^2 = 0$ и найдя его положительное решение, получим, что

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \text{ т. е. } x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \qquad (10)$$

Следовательно, числа $x : a$ и $a : x$ таковы:

$$\varphi = x : a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ и } \Phi = \frac{1}{\varphi} = a : x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1). \qquad (11) \blacksquare$$

Буквой Ф обозначают золотую пропорцию в честь знаменитого греческого скульптора Фидия — одного из строителей Парфенона. Золотое сечение Ф, а также его степени присутствуют (с некоторой степенью точности) в соотношении размеров самых знаменитых архитектурных строений. Значение $\Phi \approx 1{,}618$.

Если отрезок a задан, то как построить циркулем и линейкой отрезок x, показано на рисунке 224. Следовательно, умея делить отрезок в среднем и крайнем отношении, мы умеем строить равнобедренные треугольники с углами $36°$ (при вершине или при основании). Поэтому мы умеем строить циркулем и линейкой и правильные пятиугольники, а значит, и пентаграммы из их диагоналей.

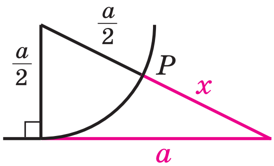


Рис. 224

Знаменитый математик и астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) говорил: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень». О роли теоремы Пифагора вам уже хорошо известно: на её «золото» мы уже смогли приобрести много геометри-

И. Кеплер

ческих результатов. Золотое сечение нам встретилось впервые (а могли бы пройти и мимо него). Ведь драгоценный камень — это украшение, предмет роскоши, без него можно было бы и обойтись. Но золотое сечение постоянно появляется в искусстве: в архитектуре, в живописи, в музыке. О нём написаны целые книги. О золотом сечении рассказано и в книгах А. В. Волошинова «Математика и искусство» и «Пифагор».

ЗАДАЧИ

Вычисляем

10.13. На рисунке 225 изображены правильный пятиугольник $ABCDF$ и пентаграмма из его диагоналей. Считая, что $AB = 1$, выразите через Φ и φ (см. формулу (11)) длины различных отрезков, изображённых на рисунке 225.

10.14. От рисунка 225 перейдите к рисунку 226 и вычислите длины отрезков, изображённых на рисунке 226. Какие закономерности для степеней числа φ вы заметили?

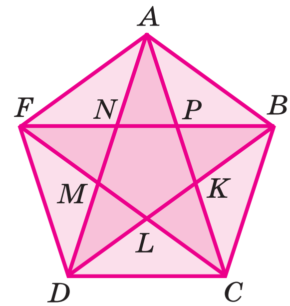


Рис. 225

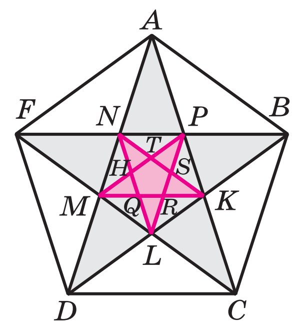


Рис. 226

Планируем

10.15. Как построить правильный пятиугольник по его стороне?

10.16. Как построить правильный десятиугольник по его стороне?

Вычисляем

10.17. Выразите через φ (см. формулу (11)) синусы углов: 18°, 36°, 54°, 72°, 108°. Найдите их приближённые значения.

10.18. Найдите площадь правильного пятиугольника со стороной 1.

10.19. Найдите площадь пятиконечной звезды, у которой длина звена ограничивающей её ломаной равна 1.

Доказываем

10.20. Докажите, что $\Phi^2 = 1 + \Phi$, ..., $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$.

10.21. Докажите (алгебраически и геометрически), что

$$1 = \varphi + \varphi^2,\ \varphi^{n-1} = \varphi^n + \varphi^{n+1}.$$

Как эти равенства связаны с равенствами из задачи 10.20? ★

10.6. Точка пересечения медиан треугольника

Строя медианы треугольника, вы, наверное, уже заметили, что они проходят через одну точку. Докажем это.

Теорема 14 (*о точке пересечения медиан треугольника*). **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая медиана треугольника делится этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины треугольника).**

Доказательство. Пусть медианы AM и BK треугольника ABC пересекаются в точке T (рис. 227, *а*). Проведём среднюю линию KM (рис. 227, *б*). Напомним, что $KM \parallel AB$ и $KM = \frac{1}{2}AB$. Поэтому треугольник ABT подобен треугольнику KMT с коэффициентом 2. Следовательно, $AT : TM = BT : TK = 2 : 1$.

Покажем, что и медиана CN также проходит через точку T (рис. 228). Повторим проведённые рассуждения для медиан AM и CN. Снова получим, что они пересекаются в такой точке на медиане AM, которая делит AM в отношении 2 : 1. Этой точкой является точка T. Поэтому CN проходит через точку T. ■

▲ Точка пересечения медиан треугольника называется **центром масс треугольника, центром тяжести треугольника или центроидом треугольника.** Если изготовить треугольник из картона, проколоть его в точке пересечения медиан и продёрнуть в прокол нитку с узелком, то треугольник, висящий на этой нитке, будет находиться в равновесии. Понятие центра масс (центра тяжести) относится к механике и было введено в науку величайшим учёным древности Архимедом (ок. 287—212 гг. до н. э.). Начиная с работ Архимеда, в трудах учёных методы геометрии и механики плодотворно сочетаются. Ньютон даже назвал геометрию первой главой механики. Архимед так определял понятие центра тяжести: *центром тяжести каждого тела является некоторая расположенная внутри его точка, обладающая тем свойством, что если за неё мысленно подвесить тяжёлое тело, то оно остаётся в покое и сохраняет первоначальное положение.*

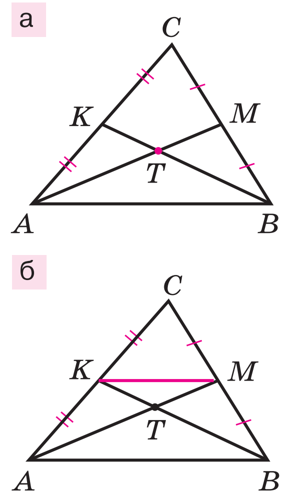


Рис. 227

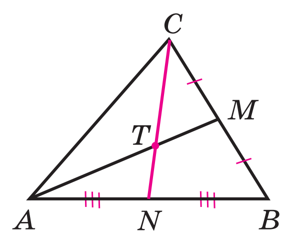


Рис. 228


Архимед

Механика позволяет нахождение центра масс тела свести к нахождению центра масс некоторой системы материальных точек. *Материальной точкой* называют пару (A, m), где A — точка пространства, а m — положительное число (*масса* материальной точки).

Нахождение центра масс треугольника ABC можно свести к нахождению центра масс системы трёх материальных точек $(A, 1)$, $(B, 1)$ и $(C, 1)$ (рис. 229, *а*). Его находят так. Сначала находят по правилу рычага Архимеда центр масс системы из двух точек $(B, 1)$ и $(C, 1)$. Им будет точка M — середина отрезка BC. Теперь две материальные точки $(B, 1)$ и $(C, 1)$ можно заменить материальной точкой $(M, 2)$ и вместо трёх рассмотреть две материальные точки $(A, 1)$ и $(M, 2)$ (рис. 229, *б*). Ещё раз применяя правило рычага Архимеда, получаем, что центром масс системы двух этих материальных точек $(A, 1)$ и $(M, 2)$ будет точка T, делящая отрезок AM в отношении 2 : 1. Таково *механическое* доказательство теоремы о точке пересечения медиан треугольника. ▼

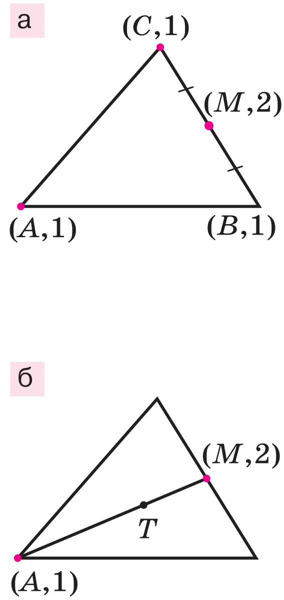


Рис. 229

Вопросы для самоконтроля

1. В чём суть теоремы о точке пересечения медиан треугольника?
2. В чём состоит механический смысл точки пересечения медиан треугольника?

ЗАДАЧИ

Вычисляем

10.22. Найдите медианы равнобедренного треугольника, у которого основание равно 16 см, а боковая сторона — 10 см.

10.23. Найдите медианы прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Планируем

10.24. Как вычислить углы между медианами треугольника, зная его стороны?

10.25. Как построить треугольник по его медианам?

Доказываем

10.26. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

10.27. Даны два треугольника, стороны одного из которых являются средними линиями другого. Докажите, что центр масс первого треугольника совпадает с центром масс второго треугольника.

Исследуем

10.28. К какой из сторон треугольника центр масс расположен ближе, а от какой он удалён дальше?

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

Планируем

II.1. Пусть известны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти биссектрису этого угла?

II.2. В круге радиусом R проведены через одну точку окружности две хорды длиной d. Как найти угол между ними?

II.3. Как вычислить площадь ромба, если известны: а) сторона и угол; б) сторона и диагональ; в) высота и угол; г) диагональ и угол?

II.4. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Через точки A, B и C проведите перпендикулярно соответственно сторонам AB, BC и CA три прямые. Каждые две из проведённых прямых пересекаются. а) Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. б) Пусть сторона данного треугольника известна. Как найти площадь подобного треугольника? в) Решите аналогичные задачи для прямоугольного треугольника ABC.

II.5. Как вычислить площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если известны: а) все его стороны и одна диагональ; б) все стороны и один из углов; в) диагональ и углы между нею и сторонами?

Вычисляем

II.6. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Вычислите его наибольшую медиану, наименьшую высоту и среднюю биссектрису.

II.7. Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой a найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

Доказываем

II.8. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

II.9. Через внутреннюю точку отрезка AB проходит переменная прямая x. Докажите, что отношение расстояний до этой прямой от точек A и B остаётся постоянным.

II.10. Из точки O выходят три луча: a, b, c. На луче a находятся точки A и A_1, на луче b находятся точки B и B_1, на луче c находятся точки C и C_1. При этом $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$. а) Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. б) Докажите утверждение, аналогичное «а», если точки A_1, B_1 и C_1 взяты на продолжениях лучей a, b, c. в) Будет ли верно это утверждение в пространстве?

Исследуем

II.11. Из вершины B треугольника ABC проведена хорда BK треугольника. Со сторонами BA и BC она образует углы α и β. Докажите, что $KA : KC = (BA \sin\alpha) : (BC \sin\beta)$. Какие следствия можно получить из этого результата?

II.12. В трапеции с основаниями a и b ($a > b$) провели среднюю линию и диагональ. При их пересечении средняя линия поделилась на части. а) Могут ли полученные части средней линии быть равными? б) В каком отношении делится средняя линия диагональю? Теперь проведите вторую диагональ. в) Чему равен отрезок средней линии между двумя диагоналями? г) Могут ли полученные при пересечении диагоналей и средней линии три части средней линии быть равными? д) Если ответ в пункте «г» отрицательный, то какая из частей самая большая?

II.13. Может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения диагоналей?

II.14. В тетраэдре $PABC$ рёбра PA, PB, PC попарно взаимно перпендикулярны. Каким по виду треугольником является треугольник ABC?

II.15. Нарисуйте отрезок AB. Возьмите точку O, не лежащую на прямой AB. На отрезке AB возьмите любую точку X и на луче OX постройте точку Y, такую, что $OY = 2OX$. Пусть точка X пробегает весь отрезок AB. По какой линии будет двигаться точка Y? Обобщите полученный результат.

Применяем геометрию

II.16. От причала в двух направлениях одновременно отошли в море два катера, каждый со своей постоянной скоростью. Спустя 1 мин после начала движения расстояние между ними было 1 км. Какое расстояние между ними будет через: а) 2 мин; б) 3 мин; в) 10 мин?

II.17. а) Вы приближаетесь к уличному фонарю по прямой. Что будет происходить с вашей тенью? б) А что будет происходить с вашей тенью, если вы пойдёте по прямой мимо фонаря?

Участвуем в олимпиаде

II.18. В квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится ровно одна вершина прямоугольника, причём стороны его параллельны диагоналям квадрата. Чему равен периметр этого прямоугольника?

II.19. Два равных прямоугольных равнобедренных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что точка C лежит внутри гипотенузы A_1B_1, а точка C_1 лежит внутри гипотенузы AB. Докажите, что отрезок CC_1 делит пополам площадь четырёхугольника AA_1B_1B.

II.20. Хорда KL параллелограмма $ABCD$ (точка K лежит на стороне AB, точка L лежит на стороне AD) параллельна диагонали BD. Докажите, что площади треугольников CBK и CDL равны.

Применяем компьютер

II.21. Постройте треугольник ABC. Используя команду «Середина отрезка», постройте точки K, M, P – середины отрезков AB, AC и BC соответственно. Сравните длины сторон треугольников ABC и KMP. Найдите отношение площадей этих треугольников. Перемещайте вершины треугольника ABC. Сохранятся ли полученные вами закономерности? Можете ли вы это объяснить?

II.22. Постройте треугольник ABC и проведите его медианы AK и BM. Постройте их точку пересечения O. При построении медиан используйте команду «Середина отрезка». Проверьте, что верны отношения $AO : OK = 2 : 1$ и $BO : OM = 2 : 1$. Перемещайте вершины треугольника ABC и проверьте, что эта закономерность сохранится. Можете ли вы это объяснить?

II.23. Постройте треугольник ABC и проведите его медианы AK, BM и CP. При построении медиан используйте команду «Середина отрезка». Проверьте, что все медианы пересекаются в одной точке. Перемещайте вершины треугольника ABC и проверьте, что эта закономерность сохранится. Можете ли вы это объяснить?

Тесты

Итоговую проверку можно провести с помощью тестов. В каждом тесте содержится пять утверждений, на каждое из которых можно дать один из трёх видов ответов: «да» (оно кодируется знаком +), «нет» (оно кодируется знаком −), «не знаю» (оно кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ знаками + (плюс) или − (минус) ставится +1, за каждый неправильный ответ этими знаками ставится −1, а за ответ «не знаю» ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до −5 баллов.

Тест 1. Свойства треугольника

Следующие утверждения верны:

Если в треугольнике ABC $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle B = 120°$, то в этом треугольнике:

1) $AC > 4$;
2) $\angle A > \angle C$;
3) площадь больше 3;
4) наименьшая высота выходит из вершины B;
5) медиана из вершины C равна $\sqrt{13}$.

Тест 2. Правильный многоугольник

Следующие утверждения верны:

1) Существует правильный многоугольник, все диагонали которого равны друг другу.
2) В каждом правильном многоугольнике с четным числом сторон существуют взаимно перпендикулярные диагонали.
3) Каждый правильный многоугольник имеет центр симметрии.
4) Существуют правильные многоугольники, которые можно разбить на равные друг другу правильные многоугольники.
5) Существуют призмы, каждая грань которых является правильным многоугольником.

Тест 3. Сравнение площадей

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Тогда имеют место такие отношения площадей треугольников:

1) $S(\triangle AMK) : S(\triangle ABC) = 1 : 4$;
2) $S(\triangle PMK) : S(\triangle APC) = 1 : 4$;
3) $S(\triangle APC) : S(\triangle ABC) = 1 : 3$;
4) $S(\triangle APK) : S(\triangle APC) = 1 : 3$;
5) $S(\triangle APK) : S(\triangle ABC) = 1 : 6$.

Тест 4. Сравнение отрезков

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Прямая, проходящая через точку P параллельно стороне AC, пересекает сторону BA в точке H, а сторону BC в точке T. Тогда имеют место такие отношения отрезков:

1) $AH : HK = 2 : 1$;
2) $PH : AC = 1 : 3$;
3) $HP : KM = 1 : 2$;
4) $AH : HB = 1 : 2$;
5) $BH : BK = 4 : 3$.

Тест 5. Трапеция

Следующие утверждения верны:

Пусть в трапеции $ABCD$ её большее основание AD равно 6, а три другие её стороны равны друг другу и угол при большем основании не меньше, чем 60°. Тогда у такой трапеции:

1) $AD < 3BC$;
2) периметр больше, чем 12;
3) площадь больше, чем 14;
4) диагональ больше, чем 6;
5) существует точка, равноудаленная от всех вершин трапеции.

Тест 6. Равнобедренная трапеция

Следующие утверждения верны:

Пусть основания BC и AD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 1 и 3. Тогда в этой трапеции:

1) если её высота равна 1, то диагональ больше, чем 3;
2) если $AC > 3$, то $\angle A > 45°$;
3) если $AB > 2$, то площадь больше 4;
4) если её площадь равна 1, то $\angle A > 60°$;
5) если её диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии.

Тест 7. Свойства параллелограмма

Следующие утверждения верны:

Если в параллелограмме одна сторона равна 1, а другая сторона равна a, то

1) при $a = 1$ параллелограмм имеет ось симметрии;
2) при $a > 1$ одна из его диагоналей меньше 2;
3) если площадь параллелограмма равна 1, то $a \geqslant 1$;
4) если тупой угол параллелограмма увеличивается, то площадь параллелограмма уменьшается;
5) при $a < 1$ каждая из его диагоналей меньше 2.

Тест 8. Признаки параллелограмма

Следующие утверждения верны:

Четырёхугольник является параллелограммом, если:

1) две его стороны равны, а другие две — параллельны;
2) два его противоположных угла равны;
3) его диагонали равны и перпендикулярны;
4) у него есть центр симметрии;
5) его диагональ делит его на два равных треугольника.

Тест 9. Подобные треугольники

Следующие утверждения верны:

Два треугольника подобны, если:

1) оба они равнобедренные и прямоугольные;

2) внешние углы двух углов одного треугольника равны внешним углам двух углов другого треугольника;

3) две стороны и высота к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и высоте к третьей стороне другого треугольника;

4) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и один из углов первого треугольника равен углу второго треугольника;

5) они являются треугольниками, которые имеют вершину в точке пересечения диагоналей трапеции, а противолежащими этой вершине сторонами имеют основания трапеции.

Итоги

Ведущей линией в курсе геометрии 8 класса была *геометрия вычислений* (*геометрия формул*).

В курсе 8 класса была продолжена и линия геометрии построений. Были построены ломаные, многоугольники, правильные многоугольники, параллелограммы и трапеции, многогранники, пирамиды, призмы, правильные пирамиды и правильные призмы.

Формулы

Площади

$S = ab$ — площадь прямоугольника со сторонами a и b.

$S = \frac{1}{2}ah$ — площадь треугольника со стороной a и высотой h на эту сторону.

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ — площадь треугольника со сторонами a и b и углом C между ними.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника со сторонами a, b, c; p — полупериметр.

$S = ah$ — площадь параллелограмма со стороной a и высотой h на эту сторону.

$S = \frac{1}{2}(a + b)h$ — площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h.

$S_1 = k^2S$ — площади подобных фигур с коэффициентом подобия k.

Геометрия треугольника

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ — сумма углов треугольника ABC.

$a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c.

$\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$ для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ — теорема синусов для треугольника ABC.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ — теорема косинусов для треугольника ABC.

Содержание курса геометрии 8 класса весьма богато. Его многое связывает с курсом алгебры. Результаты этого курса получены великими учёными: Фалесом и Пифагором, Бируни и Региомонтаном, Кеплером и Эйлером, а также многими другими.

Предметный указатель

Ответы

1.15. а) 108°; б) 120°; в) 135°; г) 144°; д) $\frac{n-2}{n}180°$. **1.17.** Три. **1.18.** а) $\frac{n(n-3)}{2}$; б) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **1.33.** а) 30° и 60°; б) 60° и 90°. **1.34.** а) 36°; б) 72°.

2.9. а) 17,5; б) 20; в) 12; г) 6. **2.12.** Периметр увеличится в 4 раза, а площадь – в 16 раз. **2.14.** а) 5040 мм^2; б) 1,95 м^2; в) 190 га. **2.15.** а) $\frac{8}{9}$ м^2; б) $\frac{15}{16}$ м^2; в) $(-x^2+2x)$ м^2. **2.16.** а) 18 м; б) 18 м; в) $\frac{2(x^2+20)}{x}$ м. **2.17.** а) x^2; б) $\frac{x^2}{16}$; в) x^2+x; г) $2x^2$; д) $-x^2+0{,}5x$; е) $2x^2-1$. **2.18.** а) 94; б) 594 см^2; в) 132 дм^2; г) $2+4x$; д) $2(ab+bc+ca)$. **2.19.** в) $6x^2$. **2.20.** а) $10x^2$; б) $-6x^2+12$. **2.21.** а) (121 мм^2; 144 мм^2); б) (180; 208). **2.32.** 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

3.12. а) 10; б) 0,5; в) $\sqrt{5}$; г) $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **3.13.** а) 0,5; б) 2. **3.14.** а) 5; б) $\sqrt{13}$; в) 5. **3.15.** а) $6\sqrt{2}$; б) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **3.16.** а) 12; б) $2\sqrt{a^2-h^2}$. **3.17.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **3.19.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8}$; в) 7. **3.20.** а) $2+\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}+1$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; д) $1+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.21.** а) $\sqrt{3}a$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.22.** $\sqrt{\frac{1}{3}}$. **3.23.** а) $\sqrt{5x^2}$; б) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $2\sqrt{\frac{1}{5}}$. **3.24.** а) $\sqrt{2+2x^2}$; б) $\sqrt{2x^2-x+0{,}25}$; в) $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}$. **3.25.** а) $\sqrt{3x^2+2}$; б) $\sqrt{x^2-5}$. **3.31.** а) $3\frac{1}{3}$ км; б) 5 км/ч. **3.34.** 12 чи и 13 чи. **3.35.** 0,3. **4.3.** а) 0,25; б) 0,75; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,25; ж) 0,25; з) 0,25. **4.12.** а) 77,5 см^2; б) 18 560 см^2. **4.13.** а) 960 см^2; б) 138 000 м^2. **4.14.** а) 60; б) 48. **4.15.** а) $9\sqrt{3}$; б) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$. **4.16.** а) $6+2\sqrt{3}$; б) $4+\sqrt{3}+\sqrt{15}$; в) $4+\sqrt{3}+\sqrt{7}$. **4.17.** а) $0{,}5x^2$; б) $\frac{\sqrt{3}x^2}{8}$; в) $0{,}5x\sqrt{2x+1}$;

г) $\frac{x^2}{2\sqrt{8}}$. **4.18.** а) $0{,}5x^2$; б) $0{,}25x^2$; в) x^2. **4.19.** а) $0{,}25\sqrt{3}x^2$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.

4.20. а) (0; 0,5]; б) (0; 3]; в) $\left(0; \frac{ab}{2}\right]$. **4.34.** а) $6\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{21}$; в) $4\sqrt{21}$.

4.42. а) 10; б) $0{,}5|a^2 - b^2|$. **4.43.** б) $0{,}5(a+b)\sqrt{c^2-(a-b)^2}$.

4.44. б) $0{,}5(a+b)\sqrt{c^2-0{,}25(a-b)^2}$. **4.45.** в) $0{,}25\sqrt{3}\,|a^2 - b^2|$. **4.46.** а) 2 см^2; б) 7200 см^2. **4.47.** а) $1{,}5\sqrt{x^2 - 0{,}25}$; б) $0{,}5(x+1)\sqrt{1-0{,}25(x-1)^2}$; в) $\frac{3x^2\sqrt{15}}{16}$ или $\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$. **4.48.** 72° и 108°.

5.8. а) 50,5 см и 49,5 см; б) $\frac{200}{3}$ см и $\frac{100}{3}$ см; в) 40 см и 60 см или 50 см и 50 см. **5.9.** а) 20° и 160°; б) 100° и 80°; в) 60° и 120°; г) 45° и 135°. **5.48.** а) 0,5; б) 0,25; в) 0,5; г) $\frac{1}{9}$; д) 0,5. **5.52.** а) 4,48 см^2; б) 245,12 см^2. **5.53.** б) $0{,}5\sqrt{3}ab$; $0{,}5\sqrt{2}ab$. **5.54.** б) $0{,}5ab$. **5.55.** ab.

I.7. а) $x\sqrt{1-x^2}$; б) $2\sqrt{x^2-1}$; в) $x^3\sqrt{1-x^2}$. **I.8.** а) 84; б) $a^2(\sqrt{3}+1)$. **I.9.** В 7 раз. **I.10.** а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{1}{4}$. **I.11.** а) $\frac{1}{8}$; б) $0{,}5x(1 - x)$; в) $\left(0; \frac{1}{8}\right]$.

I.12. а) $S_1 = S_2$;б) уменьшается от $\frac{1}{2}$ до 2; в) сначала убывает от S (S — площадь грани тетраэдра) до $\sqrt{\frac{2}{3}}\,S$, а затем снова возрастает до S; г) нет.

6.6. 8 м, 16 м, 24 м, 32 м, 40 м, 48 м. **6.10.** 0; 0,5; $0{,}5\sqrt{2}$; $0{,}5\sqrt{3}$; 1, $0{,}5\sqrt{3}$; $0{,}5\sqrt{2}$; 0,5; 0. **6.11.** а) 1 и $0{,}5\sqrt{2}$; б) $0{,}5\sqrt{3}$; в) 1, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$; г) 1, $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$; д) $\frac{3}{5}$, $\frac{24}{25}$; е) $\frac{12}{13}, \frac{56}{65}, \frac{4}{5}$. **6.12.** 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$. **6.13.** б) $\frac{\sqrt{3a^2+2ab-b^2}}{2a}$.

6.14. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **6.15.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ и т. п. **6.21.** а) $(0; 0{,}5\sqrt{3})$; б) $(0{,}5\sqrt{3}; 1)$; в) $(0{,}5; 0{,}5\sqrt{3}]$. **6.32.** а) $c = \sqrt{5}$, $\angle A \approx 27°$; б) $b = 2\sqrt{2}$, $\angle A \approx 19°$; в) $c \approx 3{,}48$, $b \approx 2{,}86$; г) $b \approx 5{,}49$; д) $a \approx 8{,}34$. **6.33.** а) $\angle B = \angle C \approx 67°$; б) $AB = AC \approx 11{,}4$; в) $AB = AC \approx 8{,}96$; г) $BC \approx 7{,}01$; д) $BC \approx 12{,}9$.

6.34. $S \approx 47{,}6$. **6.35.** $S \approx 58{,}8$. **6.36.** $\approx 41°$. **6.37.** $R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$, $2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

6.42. Приблизительно на 420 м. **6.43.** До 7-го этажа. **6.47.** а) 0,5; б) 0,6; в) 0,6; г) 0,375; д) 1 : 7. **6.50.** $0{,}5d^2 \sin\varphi$. **6.52.** $[0{,}25ab; 0{,}5ab]$.

6.53. $(0;\ 0{,}5R^2]$, где R — радиус круга. **6.63.** а) $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$ в) $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}$ $= \sin 1^\circ : \sin 2^\circ \approx 0{,}5$. **6.64.** а) $b \approx 11{,}6$ см, $c \approx 5{,}12$ см. **6.65.** ≈ 105 см^2. **6.66.** $S \approx 58{,}9$. **6.67.** а) Такого треугольника не существует; б) углы 60° и 90°; в) углы $\approx 53^\circ$ и $\approx 97^\circ$ или $\approx 23^\circ$ и $\approx 127^\circ$.

7.3. е) $\frac{5}{13}$; $\frac{3}{5}$ и $\frac{33}{65}$. **7.4.** 0,5 и $-0{,}5$. **7.5.** 0,6 и $-0{,}6$. **7.6.** а) $\approx 71^\circ$; б) 60°; в) $\approx 26^\circ$; г) 0°. **7.18.** а) $\frac{144}{13}$, $\frac{25}{13}$; в) $4\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. **7.19.** $S = 32(\sqrt{3} \pm 1)$. **7.20.** а) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$. **7.42.** а), в) Остроугольный; б), г) тупоугольный; д) прямоугольный. **7.43.** а) $\approx 78^\circ$, $\approx 43^\circ$, $\approx 57^\circ$. **7.44.** а) $\sqrt{7}$, 41°, 79°. **7.61.** а) 0,5; б) 2. **7.62.** а) 6; б) 6. **7.63.** 5. **7.64.** $\frac{(a+2b)}{3}$, $\frac{(b+2a)}{3}$.

8.13. а) $\angle A \approx 35^\circ$; б) $b \approx 0{,}270$; в) $b \approx 128$. **8.14.** $\sqrt{13}$.

9.19. а) $\frac{20}{3}$; б) 1; в) $\frac{40}{3}$; г) 8; д) 20. **9.20.** а) 2; б) 2; в) 4. **9.32.** а) $\frac{d}{2}$; б) $\frac{2d}{5}$ или $\frac{3d}{5}$. **9.33.** а) $\frac{S}{3}$ и $\frac{4S}{3}$; б) $\frac{4S}{5}$ и $\frac{9S}{5}$. **9.34.** а) $\frac{S}{9}$; б) $\frac{4S}{9}$; в) $\frac{S}{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, считая от A. **9.35.** $\frac{S}{16}$, $\frac{9S}{16}$, $\frac{3S}{16}$.

10.6. а) 16, 11; б) $\frac{13}{3}$, $\frac{5}{3}$; в) $\frac{1}{2}$, 52; г) $\frac{24}{5}$, 16, 15; д) 2, 3, 9. **10.18.** $\approx 1{,}72$. **10.19.** $\approx 2{,}12$.

II.6. $\sqrt{\frac{53}{2}}; \frac{5}{4}\sqrt{7}; 3\sqrt{2}$. **II.7.** Равнобедренный прямоугольный треугольник. **II.12.** а) Нет; б) $a : b$; в) $0{,}5(a - b)$; г) да, при $a = 2b$; д) зависит от сравнения a и $2b$. **II.16.** 2 км; 3 км; 10 км.

Таблица тригонометрических функций

α° ↓	sinα ↓	tgα ↓	ctgα ↓	cosα ↓	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87
4	0,0698	0,0699	14,3	0,998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,28	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cosα ↑	ctgα ↑	tgα ↑	sinα ↑	α° ↑

Список рекомендуемой литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Планиметрия. Ч. 1/ Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957. Смотрите также в Интернете по адресу: http://ilib.mirror1.mccme.ru/.
2. *Александров А. Д.* Геометрия: учеб. для 8 кл. с углуб. изучением математики/ А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2008.
3. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение/ И. И. Александров. — М.: МЦНМО, 2010.
4. *Вернер А. Л.* Стереометрия: учеб. пособие для учащихся 7—9 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Л. Вернер, Т. Г. Ходот. — М.: Просвещение, 2006.
5. *Венниндер М.* Модели многогранников/ М. Венниндер. — М.: Мир, 1974.
6. *Волошинов А. В.* Математика и искусство/ А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.
7. *Волошинов А. В.* Пифагор/ А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 1993.
8. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии/ Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л., ГИТТЛ, 1950.
9. Журнал «Квант». Раздел «Задачи для младших школьников». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/.
10. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия/ К. Левитин. — М.: Знание, 1984.
11. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия/ Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.
12. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии/ В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Учебник
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Е. В. Эргле*
Редакторы *Т. Ю. Акимова, П. А. Бессарабова, И. В. Рекман*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художник *О. Г. Иванова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *К. В. Кергелен, И. В. Губиной, С. А. Крутикова*
Техническое редактирование и
компьютерная вёрстка *И. Ю. Соколовой, О. А. Карповой*
Корректоры *О. В. Крупенко, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 22.10.18. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 10,68 + 0,52 форз. Тираж 650 экз. Заказ №   .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.