1 курс

ПЛАН – КОНСПЕКТ
проведения лекционного занятия по дисциплине
«Математика»

Раздел 4. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции.

Тема № 4.4: «Функции, их свойства. Способы задания функции»

Лекционное занятие № 23

Подготовил: преподаватель
В.Н. Борисов

Рязань 2024

Лекционное занятие № 23
по Теме № 4.4 «Функции, их свойства. Способы задания функции»

Цель занятия: изучить со студентами функции, их свойства, способы задания функции.

Вид занятия: классно-групповое, комбинированное (по проверке знаний, умений по пройденному материалу, по изучению и первичному закреплению нового материала).

Метод проведения занятия: доведение теоретических сведений, выполнение практических заданий.

Время проведения: 2 ч

Основные вопросы:

1. Понятие функции. Область определения и множество значений функций.
2. Основные свойства функций. Чётность, нечётность, периодичность функций.
3. Способы задания функций.
4. Алгоритм исследования функции.

Литература:

1. [1 учебник раздела «Основные печатные и электронные издания» рабочей программы изучения дисциплины]: Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровень./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – Москва: Просвещение, 2024.-463 с., ISBN 978-5-09-112136-0. —Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: https://e.lanbook.com/book/408656, **§ 6,7, 38** с. 39-49 (части 1 и 2), с. 48-49 (часть 2), с. 201-204 (часть 5) **(2012-2017 годы издания**, главы II, VII, **2024 год издания**, главы II,VII).

Примерный расчет времени:

1. Вступительная часть – 20 мин.
2. Основная часть – 60 мин.
3. Заключительная часть – 10 мин.

Вступительная часть:

Занятие начать с объявления темы занятия, основных рассматриваемых вопросов, времени изучения темы (нового материала), закрепления на практике полученных знаний, перечисления литературы, опроса по пройденному материалу.

Основная часть (теоретическая):

Первый вопрос: <u>Понятие функции. Область определения и множество значений функций.</u>

Функция – это закон соответствия между переменными величинами, в силу которого каждому рассматриваемому значению некоторой величины x (аргумента или независимой переменной) соответствует только одно определенное значение другой величины y (функции или зависимой переменной). В указанном определении необходимо сразу обратить внимание на именно однозначное соответствие значений функции значениям аргумента.

Функция – одно из важнейших математических понятий. ***Функцией*** *называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.*

Переменную *x* называют *независимой переменной* или *аргументом.* Переменную *y* называют *зависимой переменной.* Говорят также, что *переменная y является функцией от переменной x.* Значения зависимой переменной называют *значениями функции.*

Если зависимость переменной y от переменной x является функцией, то коротко это записывают так: y=f(x). (Читают: y равно f от x.) Символом f(x) обозначают значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Все значения независимой переменной образуют **область определения функции**. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют **область значений функции**.

Если функция задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Область определения функции – это множество всех значений аргумента (переменной x). Геометрически – это проекция графика функции на ось Ox. Чтобы обозначить область определения некоторой функции y, используют запись D (y). Множество значений функции – множество всех значений, которые функция принимает на области определения.

Область определения функции – все значения независимой переменной x.

Обозначение: $D(f)$

Область значений функции – все значения зависимой переменной y.

Обозначение: $E(f)$

Если функция $y = f(x)$ задана формулой и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции состоит из всех значений х, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент (x)

$y = 4x - 3$ Все действительные числа

$y = 2x^2 - 3x + 5$ Все действительные числа

$y = \dfrac{2}{x+1}$ $X+1 \neq 0 \Rightarrow X \neq -1$

$y = \sqrt{2x-6}$ $2x-6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$

Второй вопрос: <u>Основные свойства функций. Чётность, нечётность, периодичность функций.</u>

Сведения по данному вопросу представлены во 1-ом учебнике раздела «Основной учебной литературы» рабочей программы изучения дисциплины на с.39-49, **§ 6-7** (части 1 и 2) (**2012-2016, 2024** год издания, **глава II).**
на с.201-204, **§ 38** (часть 5) (**2012-2016, 2024** год издания, **глава VII).**

1. *Нули функции*

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю $f(x_0)=0$.

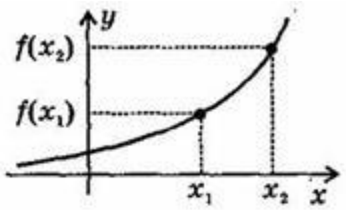
2. *Промежутки знакопостоянства функции*

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

3. *Возрастание (убывание) функции.*

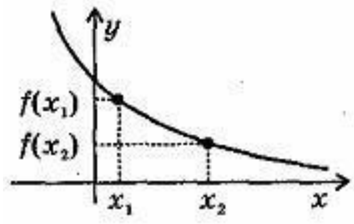
Возрастающая в некотором промежутке функция - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.



Убывающая в некотором промежутке функция - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Функция $y =f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.



4. *Четность (нечетность) функции*

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Например, $y = x^2$ - четная функция.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = - f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например: $y = x^3$ - нечетная функция.

Функция общего вида не является четной или нечетной ($y = x^2+x$).

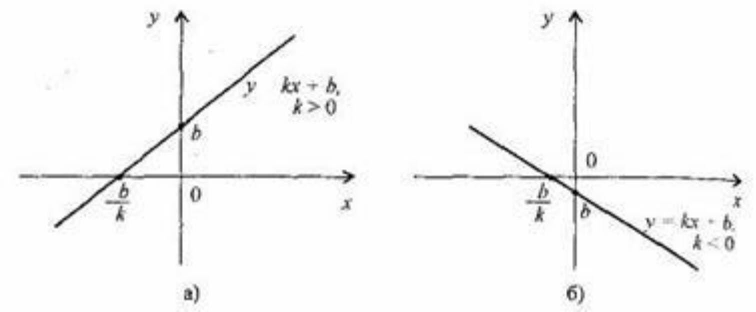
Свойства некоторых функций и их графики

1. **Линейной функцией** называется функция вида $y=kx+b$**,** где k и b – числа.

Область определения линейной функции – множество R действительных чисел.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ является прямая проходящая через точку (0; b) и параллельная прямой $y = kx$.

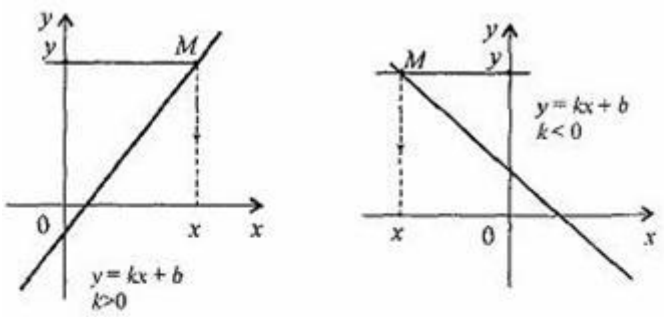
Прямая, не параллельная оси Oy, является графиком линейной функции.



Свойства линейной функции.

1. При $k > 0$ функция $y = kx + b$ возрастающая в области определения.
2. При $k < 0$ функция $y = kx + b$ убывающая в области определения.
3. Множеством значений функции $y = kx + b(k \neq 0)$ является вся числовая прямая, т.е. множество R действительных чисел.

При $k = 0$ множество значений функции $y = kx + b$ состоит из одного числа b.

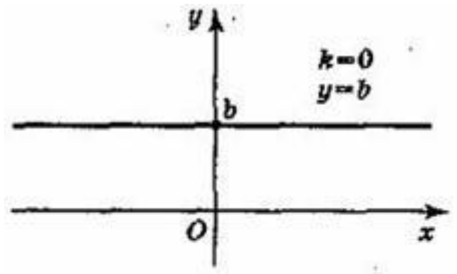


3. При $b = 0$ и $k = 0$ функция не является ни четной, ни нечетной.

При $k = 0$ линейная функция имеет вид $y = b$ и при $b \neq 0$ она является четной.

При $k = 0$ и $b = 0$ линейная функция имеет вид $y = 0$ и являете одновременно четной и нечетной.

Графиком линейной функции $y = b$ является прямая, проходящая через точку (0; b) и параллельная оси Ox. Заметим, что при $b = 0$ график функции $y = b$ совпадаете осью Ox.



5. При $k > 0$ имеем, что $y > 0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$ и $y < 0$, если $x \in \left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$.

При $k < 0$ имеем, что $y > 0$, если $x \in \left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$ и $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$.

2. Функция y = x²

Область определения этой функции - множество R действительных чисел.

Придавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = x^2$, изображаем график функции.

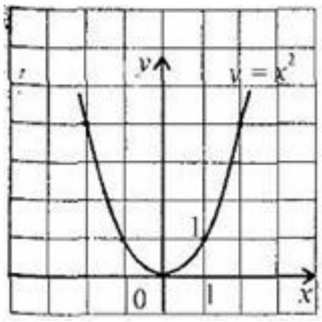


График функции $y = x^2$ называется *параболой.*

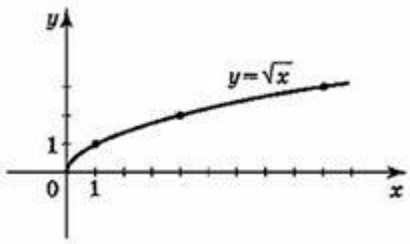
Свойства функции $y = x^2$.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. парабола имеет с осями координат общую точку (0; 0) - начало координат.
2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$, т.е. все точки параболы, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс.
3. Множеством значений функции $y = x^2$ является промежуток $[0; +\infty)$.
4. Если значения аргумента отличаются только знаком, то значения функции равны, т.е. парабола симметрична относительно оси ординат (функция $y = x^2$ - четная).
5. На промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^2$ возрастает.
6. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $y = x^2$ убывает.
7. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$, оно равно 0. Наибольшего значения не существует.

3.Фунуция $y = \sqrt{x}$

Область определения этой функции - промежуток $[0;+\infty)$, т. е. все неотрицательные числа.

Придавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = \sqrt{x}$, изображаем график функции.



Свойства функции.

1. Если $x = 0,$ то $y = 0$, т.е. график функции имеет с осями координат общую точку (0; 0) - начало координат.
2. Если $x > 0$, то $y > 0$, т.е. все точки графика функции, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс.
3. Множеством значений функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0;+\infty)$.
4. Функция $y = \sqrt{x}$ не является ни четной, ни нечетной.
5. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая в области определения.
6. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$, оно равно 0. Наибольшего значения не существует.

4. Функция y = x³

Область определения этой функции - множество R действительных чисел,

Придавая переменной x несколько значений из области определения функции и вычисляя соответствующие значения y по формуле $y = x^3$, изображаем график функции.

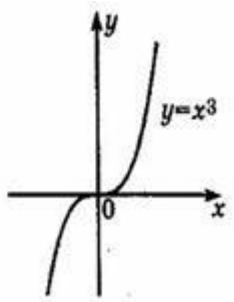


График функции $y= x^3$ называется кубической параболой.

Свойства функции $y = x^3$.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. кубическая парабола пересекает оси координат в точке (0; 0) - начале координат.
2. Если $x > 0$, то $y > 0$, а если $x < 0$, то $y < 0$, т.е. кубическая парабола лежит в первом и третьем координатном углах.
3. Множеством значений функции $y = x^3$ является вся числовая прямая.
4. Если значения аргумента отличаются только знаком, то и значения функции отличаются только знаком, т.е. кубическая парабола симметрична относительно начала координат (функция $y = x^3$ - нечетная).
4. Функция $y = x^3$ возрастающая в области определения.

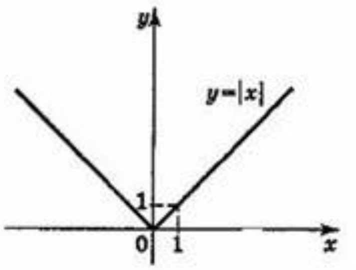
5. Функция y = |x|

Область определения этой функции - множество R действительных чисел.

Пользуясь определением модуля числа x при $x >$ О получим $y = x,$ а при x <0 получим $y = - x$. Таким образом, имеем:

$$y = \begin{cases} x, & при\ x \geq 0, \\ -x, & при\ x \langle 0. \end{cases}$$

График функции состоит из двух частей: части прямой $y = x$ при $x \geq 0$ и из части прямой $y =- x$ при $x < 0$.



Свойства функции

1. Если $x = 0$, то $y = 0$, т.е. график пересекает оси координат в точке (0; 0) - начале координат.
2. Если $x \neq 0$, то $y > 0$, т.е. все точки графика функции $y = |x|$, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс.
3. Множеством значений функции $y = |x|$ является промежуток $[0;+\infty)$.
4. Если значения аргумента отличаются только знаком, то значения функции равны, т.е. график функции симметричен относительно ординат (функция $y = |x|$ - четная).
5. На промежутке $[0;+\infty)$ функция $y = |x|$ возрастает.
6. На промежутке $(-\infty;0]$ функция $y = |x|$ убывает.
7. Наименьшее значение функция принимает в точке *x,* оно равно 0. Наибольшего значения не существует.

6. Функция $y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$

Область определения функции: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Область значений функции: $y \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

График — гипербола.

1. Нули функции.

$y \neq 0$, нулей нет.

2. Промежутки знакопостоянства,

Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x <$ O.

Если $k < 0$, то $y < 0$ при $x > 0$; $y > 0$ при $x < 0$.

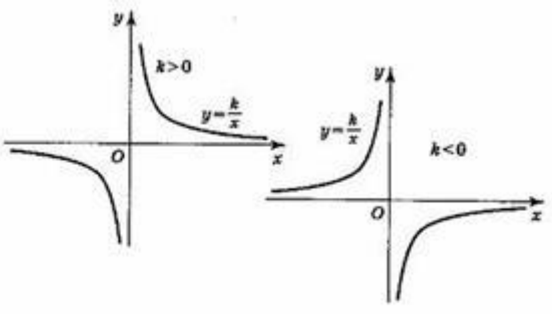
3. Промежутки возрастания и убывания.

Если $k > 0$, то функция убывает при $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Если $k < 0$, то функция возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

4. Четность (нечетность) функции.

Функция нечетная.



Известно, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол x рад. Для этого угла определены $\sin x$ и $\cos x$. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \cos x.$$

Областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Чтобы найти множество значений функции $y = \sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений y существуют такие значения x, при которых $\sin x = y$. Известно, что уравнение $\sin x = a$ имеет корни, если $|a| \leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.

Множеством значений функции $y = \sin x$ является отрезок $[-1; 1]$.
Множеством значений функции $y = \cos x$ также является отрезок $[-1; 1]$.

Каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$, и для любого значения x верны равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$. Следовательно, $y = \sin x$ — *нечётная* функция, а $y = \cos x$ — *чётная* функция. Так как для любого значения x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ верно равенство $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, то $y = \operatorname{tg} x$ — *нечётная* функция.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.
Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Третий вопрос: <u>Способы задания функций.</u>

Способы задания функции:

1. аналитический способ (функция задается с помощью математической формулы;
2. табличный способ (функция задается с помощью таблицы)
3. описательный способ (функция задается словесным описанием)
4. графический способ (функция задается с помощью графика).

***Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты − соответствующим значениям функции.*

Четвёртый вопрос: <u>Алгоритм исследования функции.</u>

1. Область определения и область значений функции
2. Периодичность функции. Четность функции
3. Точки пересечения графика с осями координат
4. *Промежутки знакопостоянства.*
5. Критические точки
6. Промежутки возрастания (убывания) функции
7. Экстремумы функции
8. *Асимптоты*
9. Дополнительные точки
10. *Построение графика*

Обычно точки из области определения функции, в которых производная равна нулю, называются стационарными, а **точки из области определения функции, в которых функция непрерывна, а производная равна нулю или не существует**, называются критическими.

Асимптота – это прямая, к которой неограниченно близко приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность.

Практическая часть.

Решить задания, указанные преподавателем.

Заключительная часть.

1. Закончить изложение материала.
2. Ответить на возникшие вопросы.
3. Подвести итоги занятия.
4. Выдать задание на самоподготовку (домашнее задание).

Задание на самоподготовке:

1. Детально проработать материал занятия, размещенный в учебнике, указанном на с.2 текущего План-конспекта.
2. Подготовиться к опросу по пройденному материалу.