mathprofi.ru

Преобразования графиков функций – все случаи

Александр Емелин

23–33 минуты

Как построить график функции с помощью геометрических преобразований графиков?

Долгое время мне не хватало решимости подойти к детальной разработке раздела о полном исследовании функции, поскольку тема весьма обширна и предполагает построение большого количества графиков. Но после аналитической геометрии не страшны уже и чертежи ядерной электростанции, поэтому без колебаний возьмём в свои руки острозаточенные карандаши и длинные линейки. Не беспокойтесь по поводу значительного размера веб страницы – здесь очень много чертежей и важнейшей прикладной информации, которая потребуется в будущем.

Чайникам и вновь прибывшим посетителям рекомендую, прежде всего, ознакомительную статью Графики и свойства элементарных функций, где мы рассмотрели основные методы и правила построения графиков. И следующая ступень посвящения – **геометрические преобразования графиков функций**.

Что это такое? Рассмотрим какую-нибудь элементарную функцию, например, $y = x^3$. Подавляющему большинству читателей не составит труда построить кубическую параболу, но что делать, если требуется начертить график функции $y = (x+2)^3$ или $y = \frac{(x-5)^3}{3}$? Интуиция подсказывает, что совершенно не нужно тратить уйму времени и проводить полное исследование функции, достаточно выполнить некоторые **геометрические преобразования** кубической параболы $y = x^3$. График функции можно сжимать/растягивать, сдвигать вдоль осей, симметрично отображать. То есть, несколько волшебных пассов, и кривые $y = (x+2)^3, \quad y = \frac{(x-5)^3}{3}$ готовы!

Зачем это нужно? Вы скажете, что можно применить метод поточечного построения, о котором я так много говорил в методичке о графиках функций. Вот взять ту же функцию $y = \frac{(x-5)^3}{3}$ и построить её по точкам! Да, способ рабочий. Однако знания геометрических преобразований позволят вам быстро понять, как расположен график, а в несложных случаях вроде $y = (x+2)^3$ практически мгновенно его нарисовать! Навыки грамотно разбираться с чертежами потребуются в различных задачах высшей математики, например, при исследовании функции на непрерывность, нахождении площади фигуры, объема тела вращения, в ходе вычисления двойных интегралов и т.д.

Кроме того, поточечное построение бывает не всегда удобным, так, значения периодической функции

$y = \sin 2x$

можно находить до нервного смеха. Конечно, существуют специальные программы для построения графиков, онлайн сервисы, но они далеко не всегда бывают под рукой.

Иногда на практике задание встречается отдельно, примерная формулировка такова: «построить график функции, используя преобразования графиков элементарных функций». Дана, скажем, функция $y = 3 - \ln(1 - 2x)$. Задача состоит в том, чтобы с помощью геометрических преобразований ветки логарифма $y = \ln x$ получить график функции $y = 3 - \ln(1 - 2x)$.

Среди прочего материала мы рассмотрим **функции с модулем**, незаслуженно обойдённые вниманием на первом уроке. По существу, модуль тоже влечёт вполне определённое преобразование графика функции.

Перед тем как перейти непосредственно к примерам напомню некоторые теоретические моменты. В начале статьи о дифференцировании неявной функции я сформулировал определение функции одной переменной $y = f(x)$. Актуализирую два особо нужных сейчас термина: «икс» – независимая переменная или АРГУМЕНТ, «игрек» – зависимая переменная или ФУНКЦИЯ. При этом функцию можно обозначать как через «игрек», так равноценно и через «эф от икс», например:

$y = \sin 2x$

$f(x) = \sin 2x$

Данный технический момент уже упоминался на уроке Типовые задачи с производной. Разницы особой нет, но есть традиции, и в теме «Функции и графики» значительно чаще используется обозначение $f(x)$.

Арсенал преобразований графиков разнообразен как набор пыток святой инквизиции, и опытные читатели могут сразу выбрать свою участь:)

– сжатие графика функции к оси ординат (OY);
– растяжение графика функции от оси ординат;
– симметричное отображение графика функции относительно оси ординат;
– сдвиг графика влево и вправо вдоль оси абсцисс (OX);
– растяжение и сжатие графика вдоль оси ординат;
– симметричное отображение графика относительно оси абсцисс;
– сдвиг графика вверх и вниз вдоль оси ординат;

– общая схема построения графика функции;

– графики функций с модулем.

ну а начинающим лучше изучить всё по порядку:

Сжатие (растяжение) графика к (от) оси ординат.
Симметричное отображение графика относительно оси OY

Первая группа действий связана с умножением АРГУМЕНТА функции на число. Для удобства я разобью правило на несколько пунктов:

Сжатие графика функции к оси ординат

Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, бОльшее единицы.

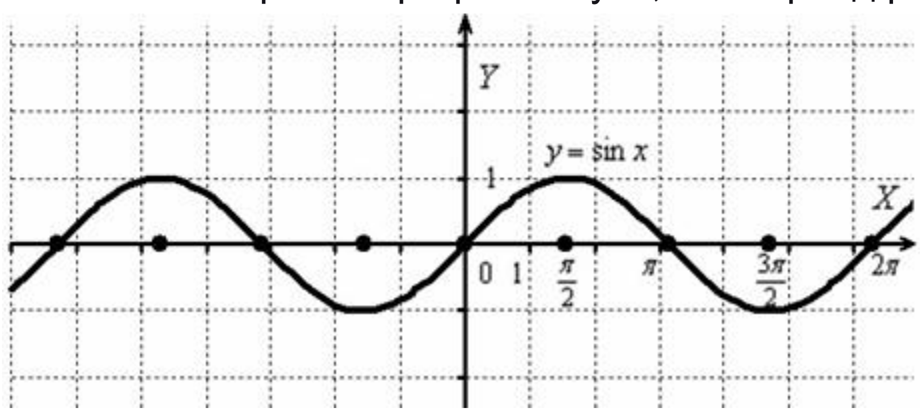
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k>1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать к оси** OY в k раз.

И первой на эшафот взойдёт функция, которой я недавно грозился:

<u>Пример 1</u>

Построить график функции
$y=\sin 2x$
.

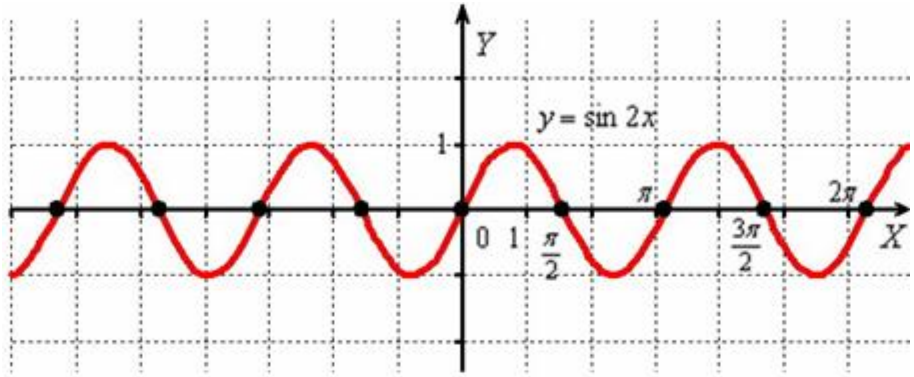
Сначала изобразим график синуса, его период равен $T=2\pi$:



К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку

$\pi\approx 3{,}14,\quad \frac{\pi}{2}\approx 1{,}57,\quad 2\pi\approx 6{,}28$ и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin 2x$ получается путём сжатия графика $y = \sin x$ к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: $T = \pi$

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0$$

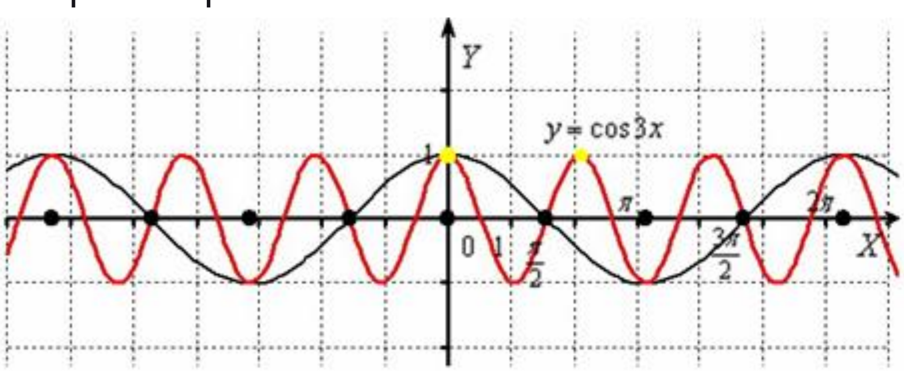
Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

Аналогичную блиц-проверку полезно осуществлять в любом другом примере! Более того, она лучше поможет усвоить суть того или иного преобразования.

Пример 2

Построить график функции
$y = \cos 3x$

«Чёрная гармошка» $y = \cos x$ сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y=\cos 3x$ проведён красным цветом.
Исходный период $T=2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза: $T=\frac{2\pi}{3}$ (отграничен жёлтыми точками).

Растяжение графика функции от оси ординат

Это противоположное действие, теперь баян не сжимается, а растягивается.
Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число $0<k<1$.

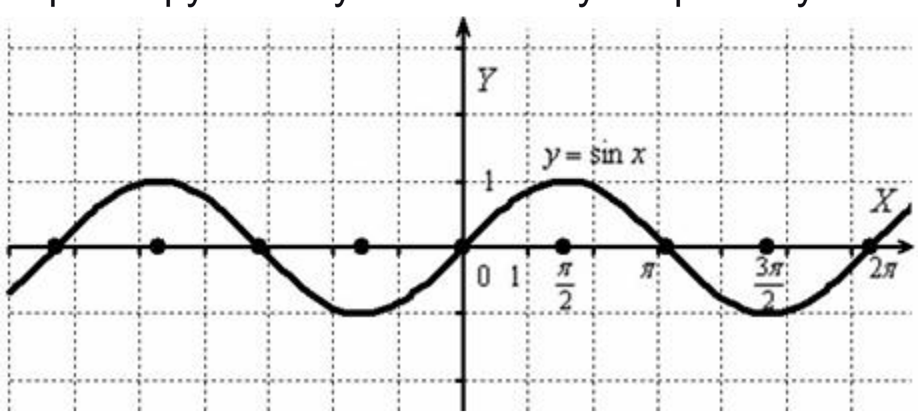
Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0<k<1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\frac{1}{k}$ раз.

Продолжим мучить синус:

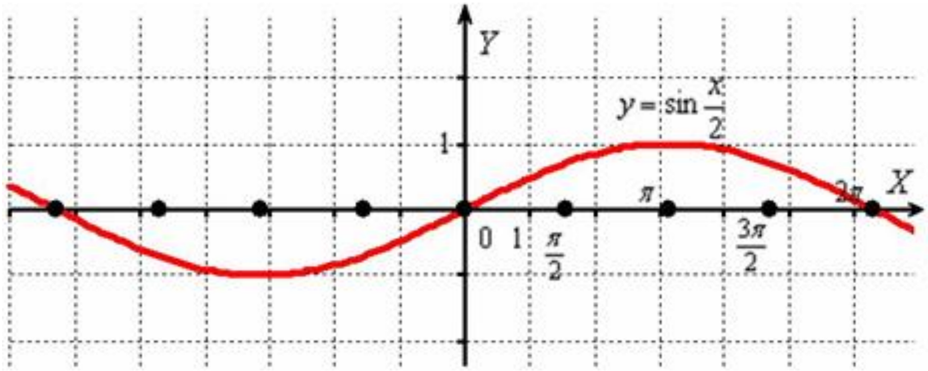
Пример 3

Построить график функции
$y=\sin\frac{x}{2}$

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»:



И растягиваем её **от оси** OY в 2 раза:



То есть, график функции $y=\sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y=\sin x$ **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: $T=2\pi\cdot 2=4\pi$, он толком даже не вместился на данный чертёж.

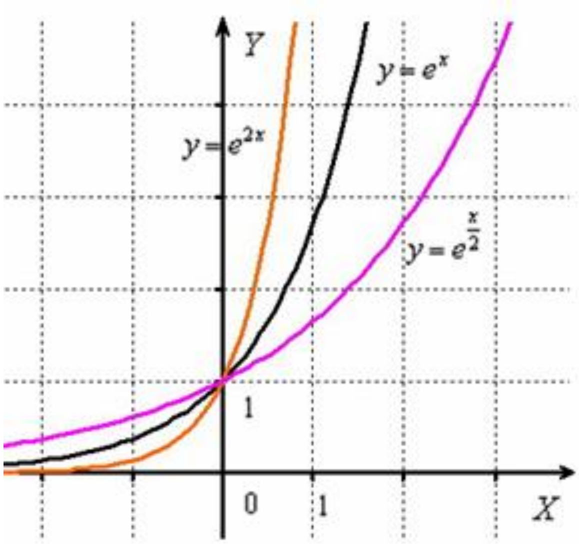
Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций:

<u>Пример 4</u>

Построить графики функций

$y=e^{2x},\quad y=e^{\frac{x}{2}}$

График функции $y=e^{2x}$ получается путём сжатия графика экспоненты $y=e^{x}$ **к оси** OY в два раза. А график $y=e^{\frac{x}{2}}$ – путём растяжения графика экспоненты $y=e^{x}$ **от оси** OY в два раза:



В качестве ассоциации можете опять поиграть на «баяне»
$y = e^x$
.

Продолжаем систематизировать умножение аргумента функции на число: $f(kx)$
Мы рассмотрели два случая – сжатие ($k > 1$) и растяжение ($0 < k < 1$).

Очевидно, что нет практического смысла рассматривать значения $k = 0, k = 1$. Есть более интересный вопрос: что происходит, когда аргумент умножается на отрицательное число? Ответ будет получен чуть позже, а пока рассмотрим распространённый частный случай, когда $k = -1$:

Симметричное отображение графика функции относительно оси ординат

АРГУМЕНТ функции меняет знак.

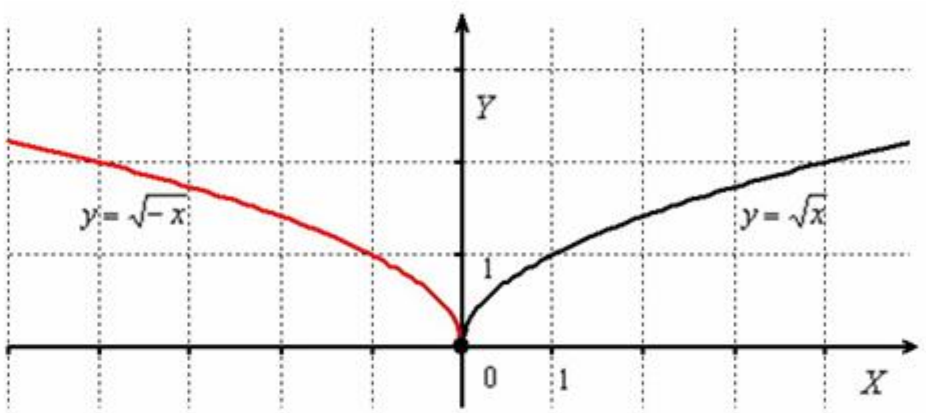
Правило: чтобы построить график функции $f(-x)$, нужно график $f(x)$ отобразить симметрично относительно оси OY.

Наглядный пример уже встречался на уроке Графики и свойства элементарных функций (вспоминаем $y = e^x, y = e^{-x}$). Распечатаем ещё один комплект:

Пример 5

Построить график функции
$y = \sqrt{-x}$

График функции $y = \sqrt{-x}$ получается путём симметричного отображения графика $y = \sqrt{x}$ относительно оси ординат:



Как видите, всё просто.

Если при умножении аргумента на число $f(kx)$ значение параметра k отрицательно и не равно минус единице, то построение выполняется в два шага. Например: $f(-2x)$. На первом шаге выполняем сжатие графика $f(x)$ к оси ординат в 2 раза: $f(2x)$. На втором шаге график $f(2x)$ отображаем симметрично относительно оси ординат: $f(-2x)$. Конкретный пример обязательно рассмотрим ниже.

А следующий параграф посвящается одному интересному человеку из дворовой компании моего далёкого детства. Он вытягивал руки в стороны, открывал рот и прыгал влево/вправо по проезжей части. Водители крутили виском у пальца, сигналили, но догнать его так никто и не смог.

Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс

Если к АРГУМЕНТУ функции добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси OX. Рассмотрим функцию $f(x)$ и положительное число b:

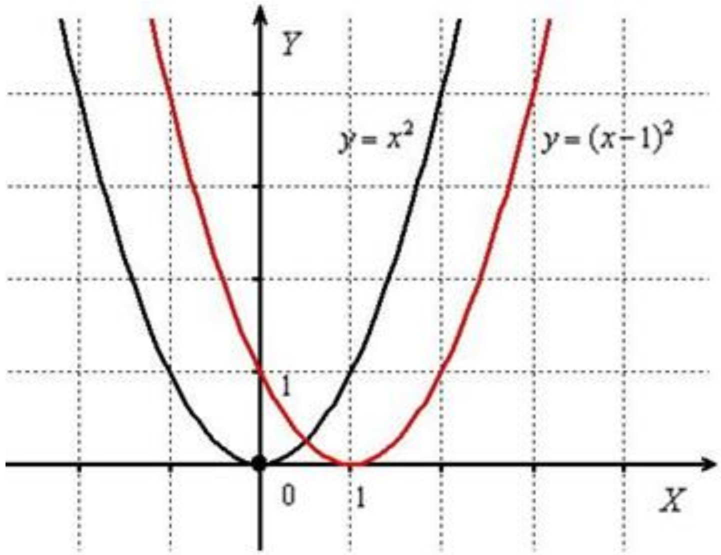
Правила:

1) чтобы построить график функции $f(x+b)$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OX на b единиц **влево**;
2) чтобы построить график функции $f(x-b)$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OX на b единиц **вправо**.

Пример 6

Построить график функции
$y=(x-1)^2$

Берём параболу $y=x^2$ и сдвигаем её вдоль оси абсцисс на 1 единицу **вправо**:



«Опознавательным маячком» служит значение $x=1$, именно здесь находится вершина параболы $y=(x-1)^2$.

Теперь, думаю, ни у кого не возникнет трудностей с построением графика $y=(x+2)^3$ (демонстрационный пример начала урока) – кубическую параболу $y=x^3$ нужно сдвинуть на 2 единицы влево.

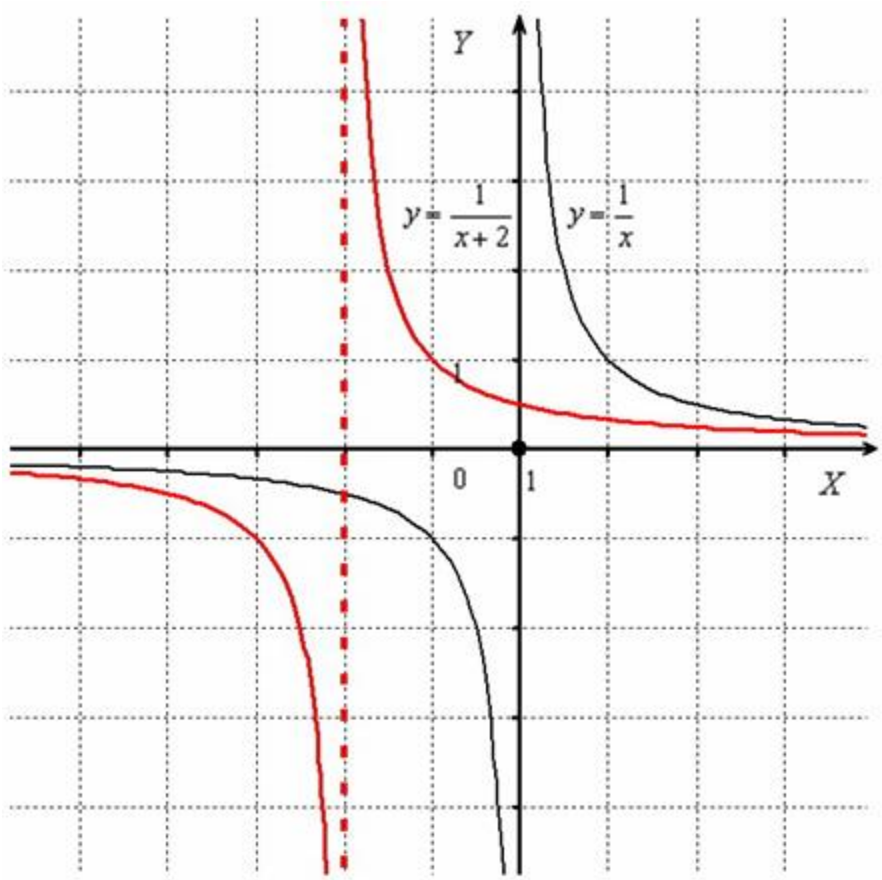
Вот ещё один характерный случай:

Пример 7

Построить график функции
$y=\frac{1}{\ldots}$

$x+2$

Гиперболу $y=\frac{1}{x}$ (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси OX на 2 единицы **влево**:



Перемещение гиперболы «выдаёт» значение, которое не входит в области определения функции. В данном примере $x\neq -2$, и уравнение прямой $x=-2$ задаёт вертикальную асимптоту (красный пунктир) графика функции $y=\frac{1}{x+2}$ (красная сплошная линия). Таким образом, при параллельном переносе асимптота графика тоже сдвигается (что очевидно).

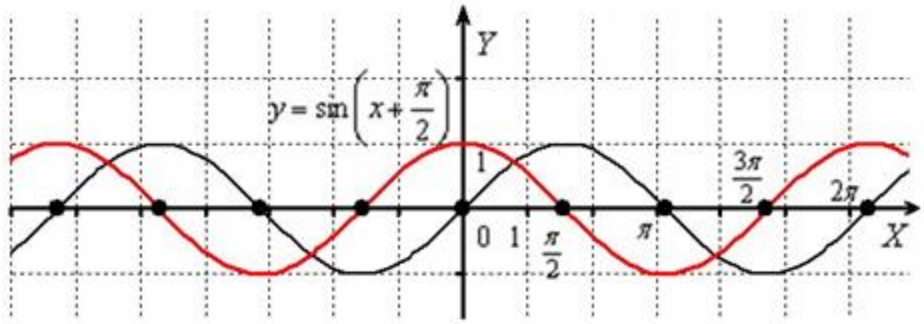
Вернёмся к тригонометрическим функциям:

Пример 8

Построить график функции

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

График синуса $y = \sin x$ (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ **влево**:



Внимательно присмотримся к полученному красному графику $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$…. Это в точности график косинуса $y = \cos x$! По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию формулы приведения $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, и перед вами, пожалуй, самая «знаменитая» формула, связывающая данные тригонометрические функции. График функции $y = \cos x$ получается путём сдвига синусоиды $y = \sin x$ вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево (о чём уже говорилось на уроке Графики и свойства элементарных функций). Аналогично можно убедиться в справедливости любой другой формулы приведения.

Рассмотрим композиционное правило, когда аргумент представляет собой линейную функцию: $f(kx + b)$, при этом параметр «ка» **не равен** нулю или единице, параметр «бэ» – **не равен** нулю. Как построить график такой функции? Из школьного курса мы знаем, что умножение имеет приоритет перед сложением, поэтому, казалось бы, сначала график сжимаем/растягиваем/отображаем в зависимости от значения k, а потом сдвигаем на b единиц. Но здесь есть подводный камень, и корректный алгоритм таков:

Аргумент функции необходимо представить в виде

$f(kx+b)=f\left(k\left(x+\frac{b}{k}\right)\right)$

и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции $f(x)$ сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат: $f(kx)$ (если $k<0$, то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси OY).

2) График полученной функции $f(kx)$ сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси абсцисс **на** $\frac{b}{k}$ **(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график $f(kx+b)$.

Пример 9

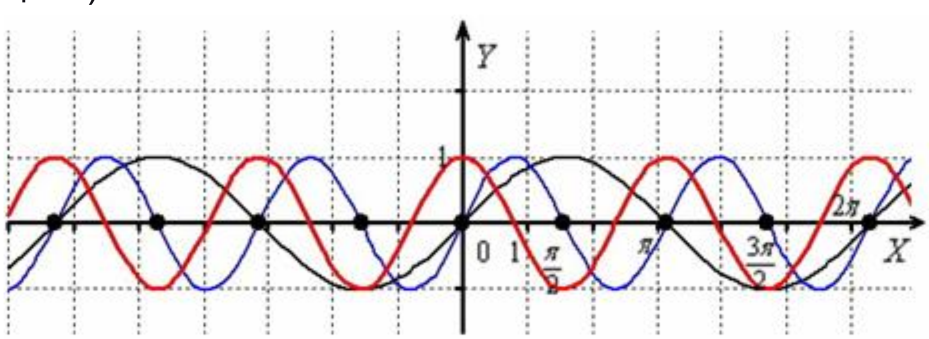
Построить график функции

$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

Представим функцию в виде $y=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ и выполним следующие преобразования: синусоиду $y=\sin x$ (чёрный цвет):

1) сожмём **к оси** OY в два раза: $y=\sin 2x$ (синий цвет);

2) сдвинем вдоль оси OX **на** $\frac{\pi}{4}$ **(!!!) влево**: $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ (красный цвет):



Пример вроде бы несложный, а пролететь с параллельным переносом легче лёгкого. График сдвигается на $\frac{\pi}{4}$, а вовсе не на $\frac{\pi}{2}$.

Продолжаем расправляться с функциями начала урока:

Пример 10

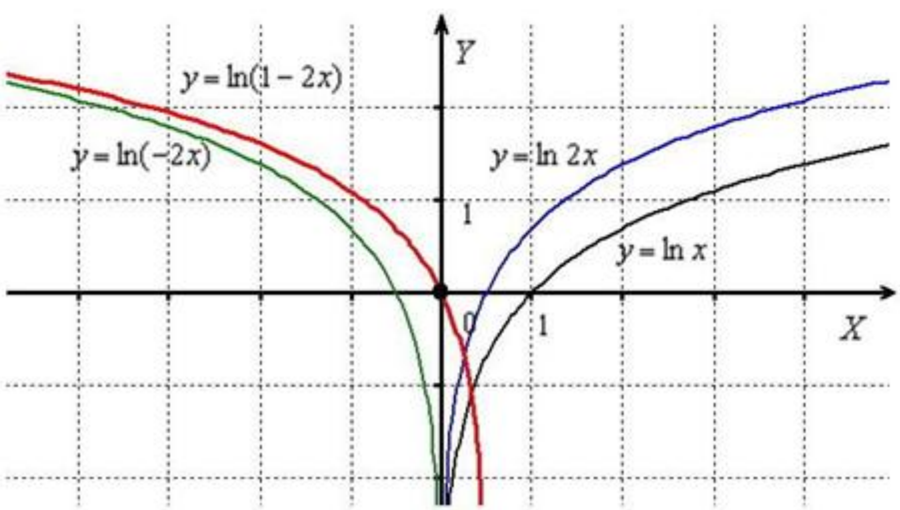
Построить график функции
$y = \ln(1 - 2x)$

Представим функцию в виде $f\left(k\left(x + \frac{b}{k}\right)\right)$. В данном случае:
$y = \ln(1 - 2x) = \ln\left(-2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ Построение проведём в три шага. График натурального логарифма $y = \ln x$:

1) сожмём **к оси** OY в 2 раза: $y = \ln 2x$;

2) **отобразим симметрично** относительно оси OY: $y = \ln(-2x)$;

3) сдвинем вдоль оси OX **на** $\frac{1}{2}$ **(!!!) вправо**:
$y = \ln\left(-2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \ln(1 - 2x)$:



Для самоконтроля в итоговую функцию $y = \ln(1 - 2x)$ можно подставить пару значений «икс», например, $x=0,\ x=\frac{1}{2}$ и свериться с полученным графиком.

В рассмотренных параграфах события происходили «горизонтально» – гармонь играет, ноги пляшут влево/вправо. Но похожие преобразования происходят и в «вертикальном» направлении – вдоль оси OY. Принципиальное отличие состоит в том, что связаны они не с АРГУМЕНТОМ, а с САМОЙ ФУНКЦИЕЙ.

Растяжение (сжатие) графика ВДОЛЬ оси ординат. Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс

Структура второй части статьи будет очень похожа.

1) Если ФУНКЦИЯ $f(x)$ умножается на число $m>1$, то происходит **растяжение её графика вдоль оси ординат**.

Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $m>1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть вдоль оси** OY в m раз.

2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число $0<m<1$, то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $0<m<1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать вдоль оси** OY в $\frac{1}{m}$ раз.

Догадайтесь, какую функцию я буду снова пытать =)

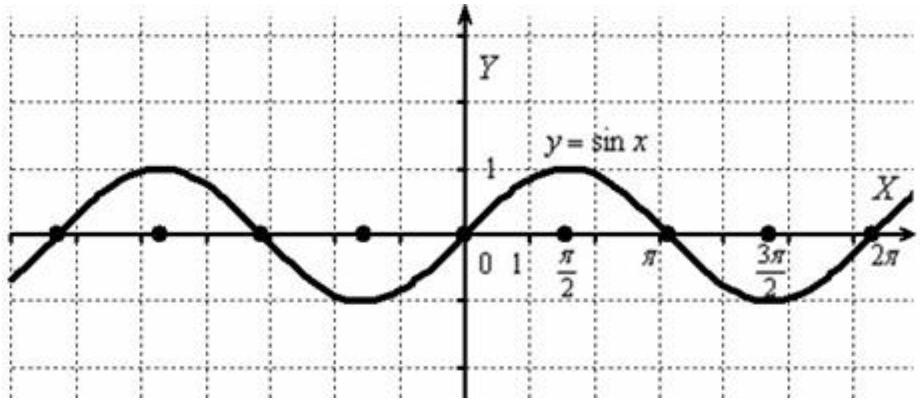
<u>Пример 11</u>

Построить графики функций

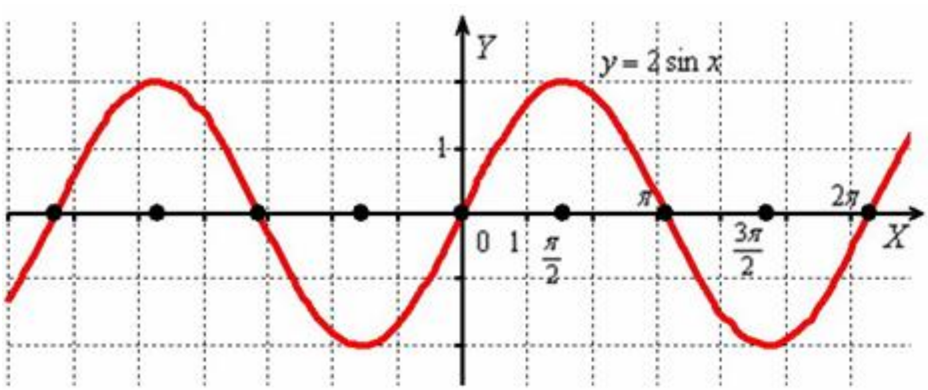
$y = 2\sin x, \quad y = \frac{1}{2}\sin x$

.

Берём синусоиду за макушку/пятки:

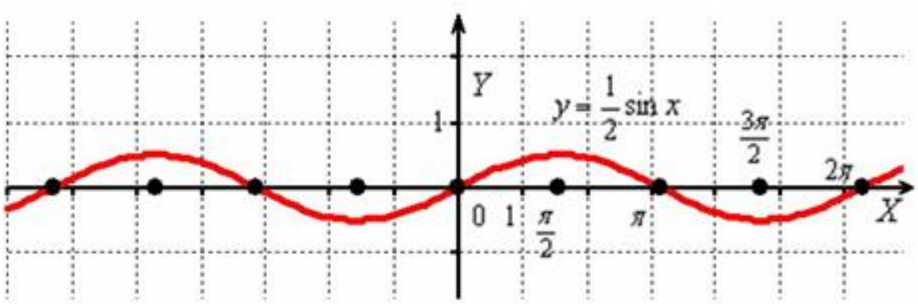


И **вытягиваем** её **вдоль оси** OY в 2 раза:



Период функции $y = 2\sin x$ не изменился и составляет $T = 2\pi$, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: $E(y) = [-2;2]$.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** OY в 2 раза:



Аналогично, период $T = 2\pi$ не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза: $E(y)=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Нет, у меня нет какого-то пристрастного отношения к синусоиде, просто я хотел продемонстрировать, чем отличаются графики функций $y=\sin 2x,\quad y=\sin\frac{x}{2}$ (Примеры № 1, 3) от только что построенных собратьев $y=2\sin x,\quad y=\frac{1}{2}\sin x$. Постарайтесь ещё раз проанализировать и качественнее понять эти элементарные случаи. Даже минимальные знания о преобразованиях графиков окажут вам неоценимую помощь в ходе решения других задач высшей математики!

И, конечно же, классический пример растяжения/сжатия параболы:

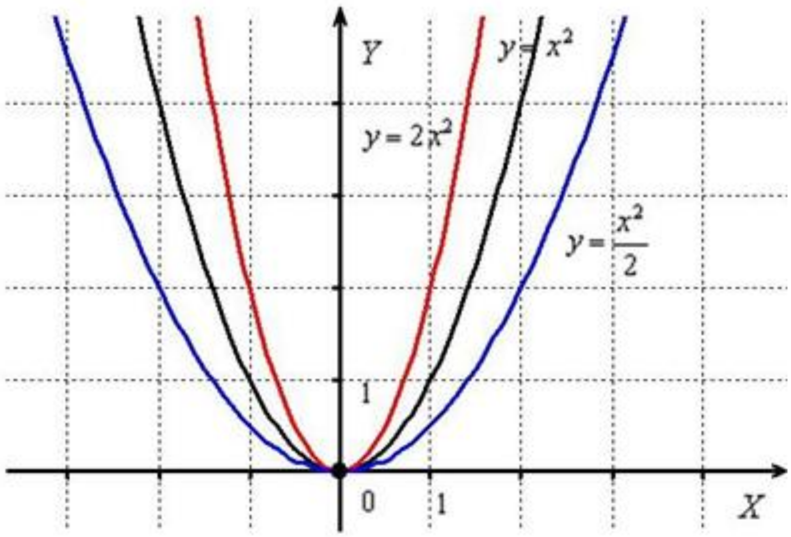
Пример 12

Построить графики функций

$y=2x^2,\quad y=\frac{x^2}{2}$

.

Возьмём рога молодого оленя $y=x^2$ и **вытянем** их вверх **вдоль оси** OY в два раза: $y=2x^2$. Затем **сожмём** $y=x^2$ **вдоль оси ординат** в 2 раза: $y=\frac{x^2}{2}$



И снова заметьте, что значения функции $y=2x^2$ увеличиваются в 2 раза, а значения $y=\frac{x^2}{2}$ уменьшаются во столько же раз (исключение составляет точка $x=0$).

Отпустим в тундру удивлённое животное и продолжим изучать умножение функции на число: $mf(x)$. Случаи $m=0, m=1$ не представляют интереса, поэтому рассмотрим отрицательные коэффициенты. Сначала распространённый частный случай $m=-1$:

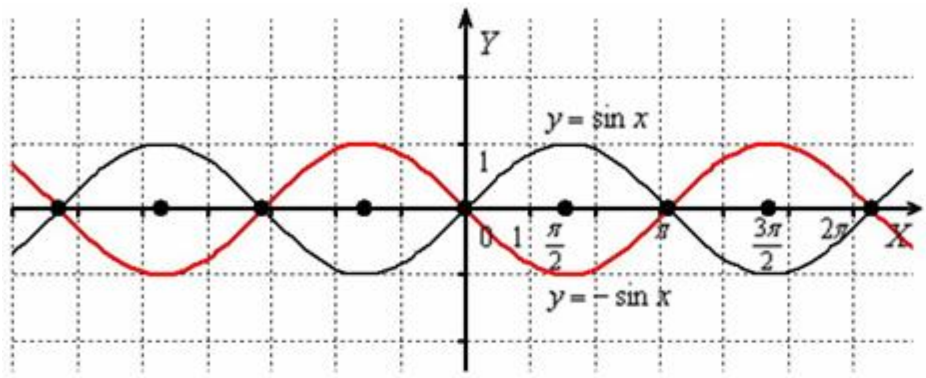
Если ФУНКЦИЯ меняет знак на противоположный, то её **график отображается симметрично относительно оси абсцисс**.

Правило: чтобы построить график функции $-f(x)$, нужно график $f(x)$ отобразить симметрично относительно оси OX.

Пример 13

Построить график функции
$y=-\sin x$

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX:

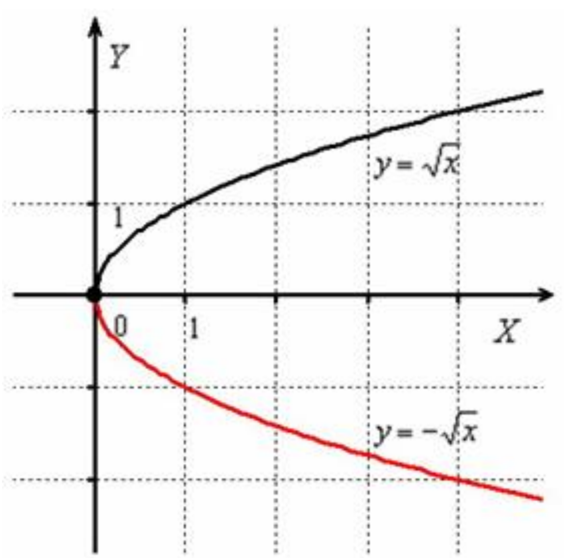


Ещё более наглядно симметрия просматривается у следующей типовой функции:

Пример 14

Построить график функции
$y = -\sqrt{x}$

График функции $y = -\sqrt{x}$ получается путём **симметричного отображения** графика $y = \sqrt{x}$ **относительно оси абсцисс**:



Функции $y = \sqrt{x}, y = -\sqrt{x}$ задают две ветви параболы, которая «лежит на боку». Обратная функция $x = y^2$ задаёт параболу целиком. С подобными графиками часто приходится иметь дело при нахождении площадей фигур, построении областей интегрирования двойных интегралов и в некоторых других задачах.