При умножении функции на отрицательное число $mf(x)$, $m \neq -1$, построение графика следует выполнить в два этапа: сжатие (или растяжение) вдоль оси ординат, а потом – симметричное отображение относительно оси абсцисс. Конкретные примеры увидим в следующем топике.

Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат

Настала пора дать передышку ногам и сесть в лифт.

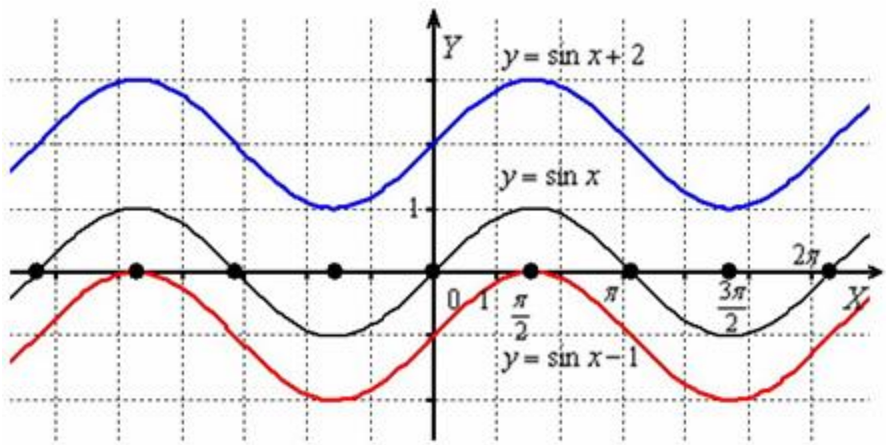
Если к ФУНКЦИИ добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси OY.
Рассмотрим функцию $f(x)$ и положительное число h:

Правила:
1) чтобы построить график функции $f(x)+h$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OY на h единиц **вверх**;
2) чтобы построить график функции $f(x)-h$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OY на h единиц **вниз**.

<u>Пример 15</u>

Построить графики функций
$y = \sin x + 2, \quad y = \sin x - 1$
.

В комментариях, думаю, нет особой необходимости:



Комбинационное построение графика
$mf(x)+h$
в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции $f(x)$ растягиваем (сжимаем) вдоль оси OY. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси OX.

2) Полученный на первом шаге график $mf(x)$ сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы h.

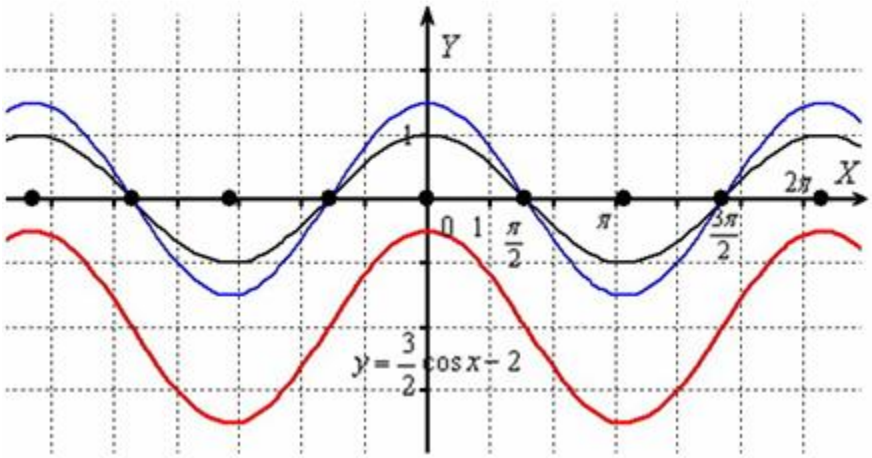
Пример 16

Построить график функции
$y=\frac{3}{2}\cos x-2$

График косинуса
$y=\cos x$
(чёрный цвет):

1) Растягиваем вдоль оси OY в 1,5 раза: $y=\frac{3}{2}\cos x$ (синий цвет);

2) Сдвигаем вдоль оси OY на 2 единицы вниз: $y=\frac{3}{2}\cos x-2$:



Простой, но весьма распространённый кадр:

Пример 17

Построить график функции

$y = 4 - x^2$

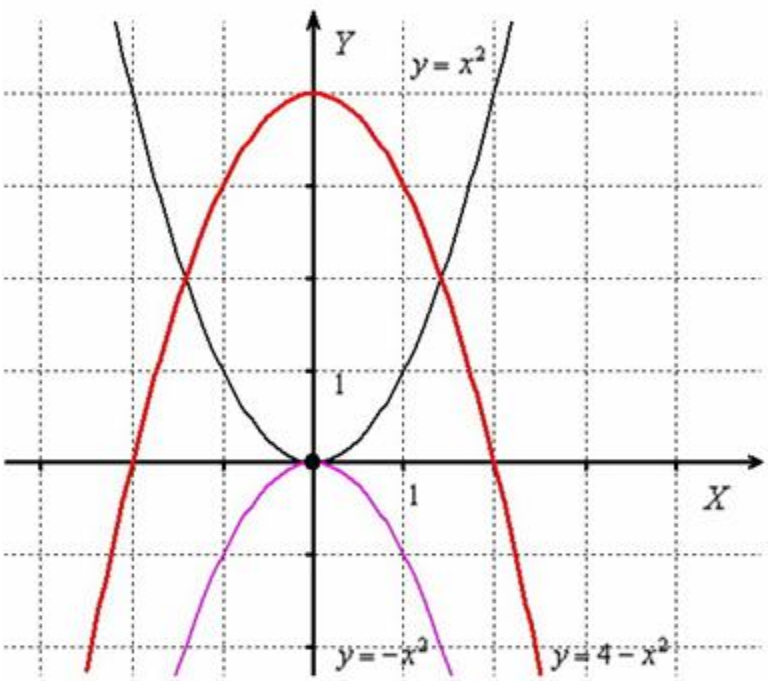
Параболу

$y = x^2$

:

1) отобразим симметрично относительно оси абсцисс: $y = -x^2$;

2) сдвинем вдоль оси OY на 4 единицы вверх: $y = 4 - x^2$:



Да, конечно, данную кривую легко построить и поточечно, но такие параболы очень часто встречаются в практических заданиях, поэтому весьма полезно сразу представлять, как они расположены.

Аналогичный трехходовой пример с растяжением и симметричным отображением графика относительно оси OX:

Пример 18

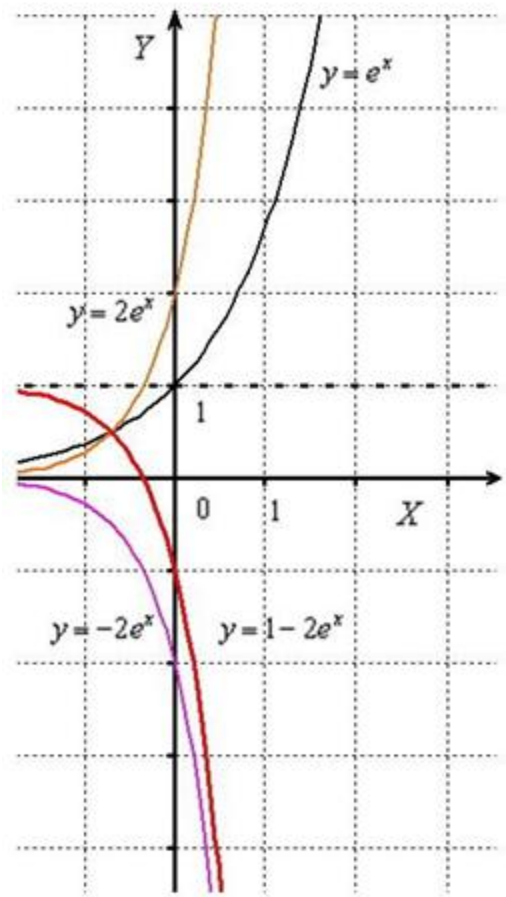
Построить график функции $y = 1 - 2e^x$

График экспоненциальной функции $y = e^x$:

1) растянем вдоль оси OY в 2 раза: $y = 2e^x$;

2) отобразим симметрично относительно оси абсцисс: $y = -2e^x$;

3) сдвинем вдоль оси OY на 1 единицу вверх: $y = 1 - 2e^x$:



Заметьте, что в результате последнего преобразования горизонтальная асимптота графика тоже «уехала» вверх на 1 единицу. Аналогичный факт мы уже наблюдали при сдвиге гиперболы (см. Пример № 7).

Систематизируем всю информацию:

Общая схема построения графика функции с помощью геометрических преобразований

Рассмотрим функцию $y = mf(kx + b) + h$, которая «базируется» на некоторой функции $y = f(x)$. Для многих читателей алгоритм построения графика уже понятен:

– на первом шаге выполняем преобразования, связанные с АРГУМЕНТОМ функции (см. первые два параграфа), в результате чего получаем график функции
$y = f(kx+b)$
;

– на втором шаге выполняем только что рассмотренные преобразования, связанные с самой ФУНКЦИЕЙ, и получаем график
$y = mf(kx+b)+h$
.

Завершим самое длинное построение данного урока:

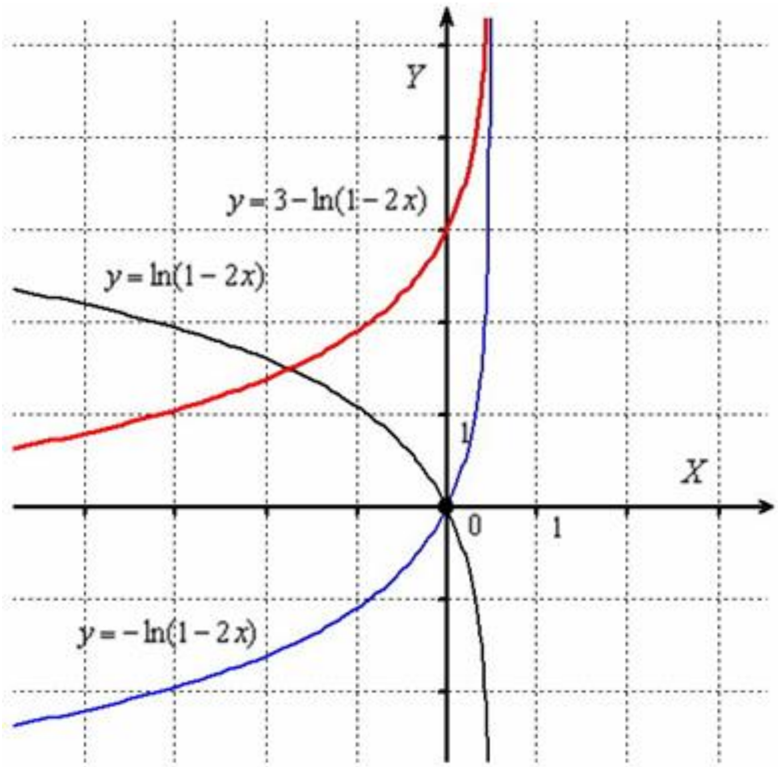
<u>Пример 19 (концовка Примера 10)</u>

Построить график функции
$y = 3-\ln(1-2x)$

В примере № 10 мы выполнили построение графика
$y = \ln(1-2x)$
, то есть полностью разобрались с аргументом функции. И сейчас осталось выполнить завершающие шаги.

График функции
$y = \ln(1-2x)$
:

4) отобразим симметрично относительно оси OX : $y = -\ln(1-2x)$;
5) сдвинем вдоль оси OY на 3 единицы вверх: $y = 3-\ln(1-2x)$:



На практике, к счастью, построения почти всегда более коротки, например:

$y = \frac{(x-5)^3}{3}$ – кубическую параболу $y = x^3$ сдвигаем вдоль оси OX на 5 единиц вправо и сжимаем вдоль оси OY в 3 раза.

$y = -e^{-x}$

– график экспоненты отображаем симметрично относительно оси ординат, затем – симметрично относительно оси абсцисс.

$y = 1 + \sqrt{x+5}$ – график функции $y = \sqrt{x}$ смещаем влево на 5 единиц, затем – вверх на 1 единицу.

И т.д. Некоторые геометрические преобразования можно поменять местами, но это возможно далеко не всегда! Поэтому «чайникам» лучше придерживаться алгоритма, изложенного в начале параграфа.

Весь материал статьи, который носит в бОльшей степени всё-таки справочный характер, потребуется для выполнения чертежей в других задачах, но время от времени на практике рассматриваемое задание встречается отдельно, причём, бывает, в «сыром» виде:

Пример 20

Построить график функции
$y = 2x^2 + 3x + 2$
с помощью преобразований графиков элементарных функций

Методику быстрого построения параболы я разобрал на первом уроке о графиках функций, однако здесь по условию необходимо применить вполне определённый способ.

На первом шаге представим функцию в виде $y = mf(kx+b)+h$. Для этого используем так называемый *метод выделения полного квадрата*. Советую не пренебрегать задачей, поскольку типовой приём потребуется и в будущем, например, при нахождении интегралов от некоторых дробей.

Идея состоит в том, чтобы искусственно преобразовать функцию ТАК, чтобы воспользоваться одной из формул сокращенного умножения $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ либо
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Начнём преобразования. Коэффициент при x^2 выносим за скобку:
$$y = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 2$$

Очевидно, что выражение сведётся к формуле $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. В скобках конструируем $a^2 + 2ab$:
$$y = 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x\right) + 2$$

Таким образом, $b = \frac{3}{4}$. Теперь организуем $a^2 + 2ab + b^2$, для этого в скобках прибавим и вычтем $b^2=\frac{9}{16}$:

$$y=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\right)+2$$

Последнее слагаемое выносим из скобок:

$$y=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)+2\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)+2$$

Используем формулу $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ и суммируем два последних слагаемых:

$$y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

В целях проверки целесообразно раскрыть скобки и убедиться, что получится исходная функция:

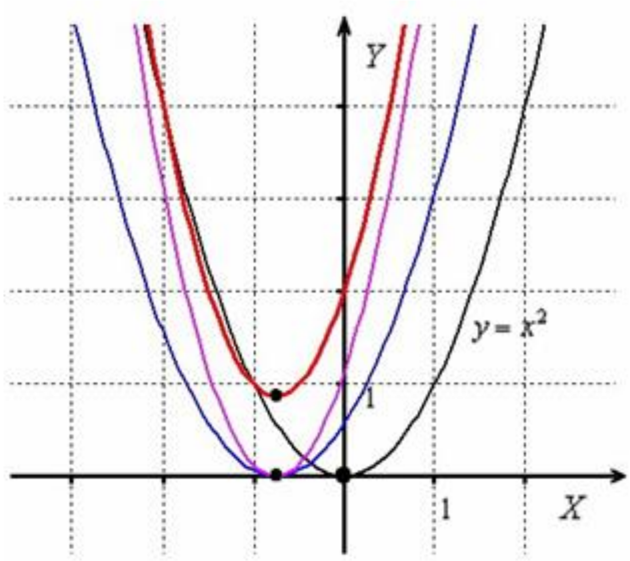
$$y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}=2\left(x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)+\frac{7}{8}=2x^2+3x+\frac{9}{8}+\frac{7}{8}=2x^2+3x+2$$

Построим график $y=2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$. Параболу $y=x^2$:

1) Сдвинем вдоль оси OX на $\frac{3}{4}$ влево: $y=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ (синий цвет);

2) Вытянем вдоль оси OY в 2 раза: $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ (малиновый цвет);

3) Сдвинем вдоль оси OY на $\frac{7}{8}$ вверх: $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$ (красный цвет):



Рассмотрим ещё один типовой трюк:

Пример 21

Построить график функции

$y = \frac{x}{1-x}$

 с помощью преобразований графиков элементарных функций.

Сначала сведём функцию к виду $y = mf(kx+b)+h$. Все действия я закомментирую:

$$y = \frac{x}{1-x} \overset{(1)}{=} \frac{x}{-(x-1)} \overset{(2)}{=} -\frac{(x-1+1)}{x-1} \overset{(3)}{=} -\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \overset{(4)}{=} -1-\frac{1}{x-1}$$

(1) В знаменателе выносим –1 за скобки. Это необходимо, чтобы аргумент функции представить «в привычном» порядке $kx+b$.

(2) Минус знаменателя поставим перед дробью. В числителе проведём искусственное преобразование – прибавим и вычтем единицу. Это необходимо для почленного деления на следующем шаге.

(3) Почленно делим числитель на знаменатель. Возьмите на заметку рассмотренный приём, он используется при

интегрировании дробей.

(4) Раскрываем скобки.

Проведём построение. График гиперболы

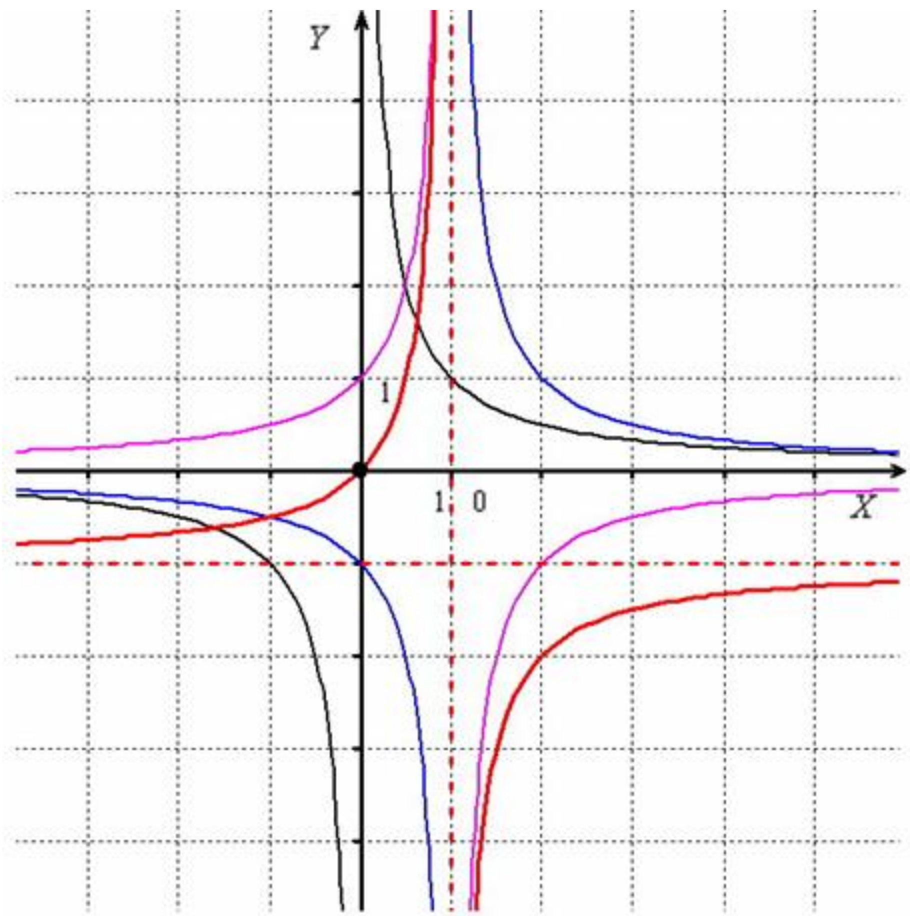
$y = \frac{1}{x}$

(чёрный цвет):

1) Сдвинем вправо на 1 единицу: $y = \frac{1}{x-1}$ (синий цвет);

2) Отобразим симметрично относительно оси абсцисс: $y = -\frac{1}{x-1}$ (малиновый цвет);

3) Сдвинем вдоль оси OY на единицу вниз: $y = -1 - \frac{1}{x-1}$ (красный цвет):



Перейдём к заключительной части урока, в которой речь пойдёт о модуле. Хотел её сделать отдельной небольшой страничкой или pdf-кой, да потом передумал, чего уж тут мелочиться. Хотя эта статья далеко не рекордная по количеству букв, солидную часть объема занимают чертежи.

Графики функций с модулем

Для качественного усвоения материала необходимо понимать, что такое модуль. Краткую информацию о нём можно найти на странице Математические формулы и таблицы в справочном материале *Горячие формулы школьного курса математики*.

Применение модуля тоже представляет собой геометрическое преобразование графика. Не буду создавать сверхподробный мануал, отмечу только те моменты, которые, с моей точки зрения, реально пригодятся для решения других задач по вышке.

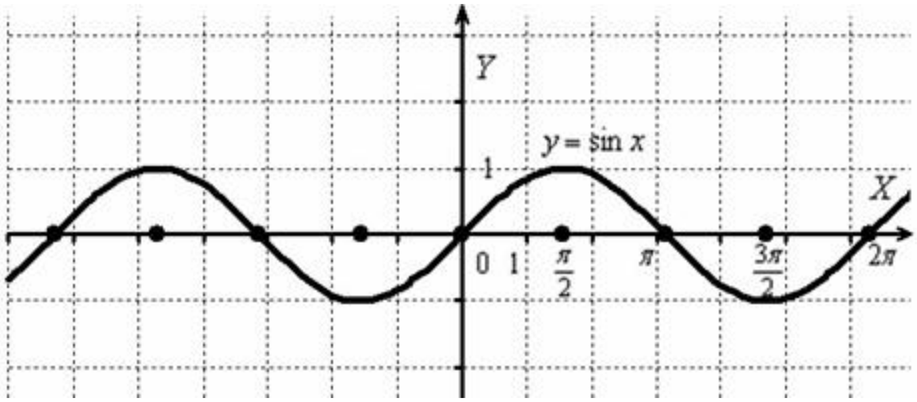
Сначала посмотрим, что происходит, когда модуль применяется к АРГУМЕНТУ функции.

Правило: график функции $f(|x|)$ получается из графика функции $f(x)$ следующим образом: при $x \geq 0$ график функции $f(x)$ **сохраняется**, а при $x < 0$ «сохранённая часть» **отображается симметрично** относительно оси OY.

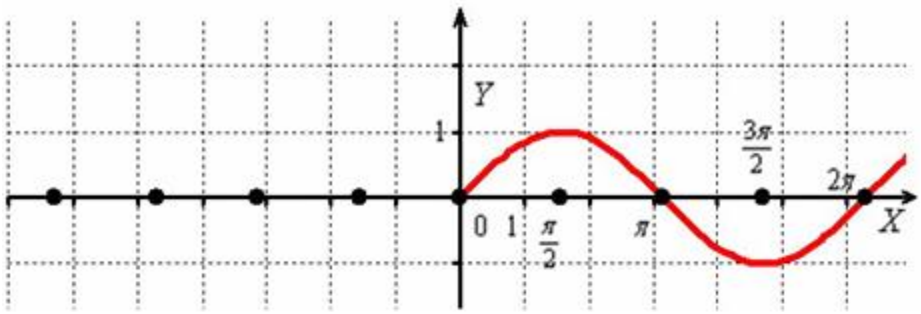
Пример 22

Построить график функции
$y = \sin|x|$

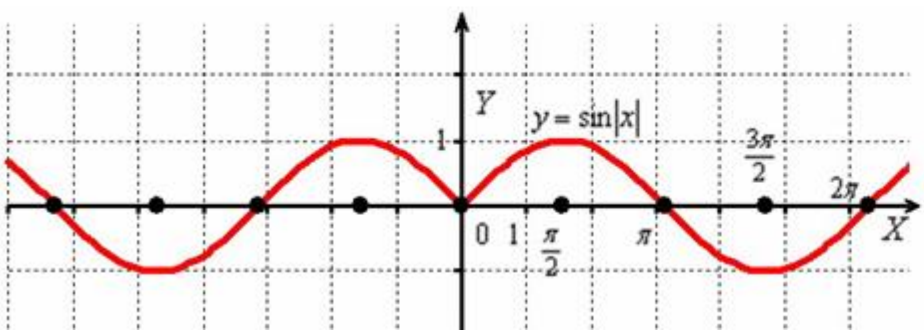
И снова вечная картина:



Согласно правилу, при $x \geq 0$ график сохраняется:



И сохранившаяся часть отображается симметрично относительно оси OY в левую полуплоскость:



Действительно, функция $y = \sin|x|$ – чётная, и её график симметричен относительно оси ординат. Поясню детальнее смысл симметрии. Посмотрим на два противоположных значения аргумента, например, на $x = 1$ и $x = -1$. А какая разница? Модуль всё равно уничтожит знак «минус»: $\sin|-1| = \sin 1 \approx 0{,}84$, то есть значения функции будут располагаться на одной высоте.

Функцию от модуля можно расписать в так называемом

кусочном виде по следующему правилу: $f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x\ge 0 \\ f(-x), & \text{если} \quad x<0 \end{cases}$.

В данном случае:

$$y=\sin|x|=\begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x\ge 0 \\ \sin(-x), & \text{если} \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x\ge 0 \\ -\sin x, & \text{если} \quad x<0 \end{cases}$$

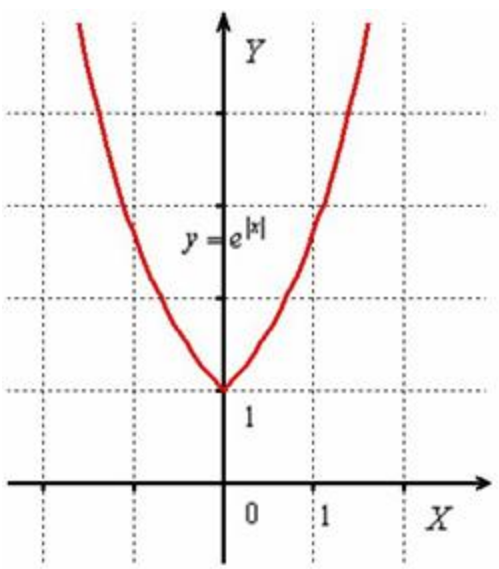
То есть, правая волна графика $y=\sin|x|$ задаётся функцией $y=\sin x$, а левая волна – функцией $y=-\sin x$ (см. Пример 13).

Пример 23

Построить график функции

$y=e^{|x|}$

Аналогично, ветвь «обычной» экспоненты $y=e^x$ правой полуплоскости отображаем симметрично относительно оси OY в левую полуплоскость:



Распишем функцию в **кусочном виде**: $y=e^{|x|}=\begin{cases} e^x, & \text{если} \quad x\ge 0 \\ e^{-x}, & \text{если} \quad x<0 \end{cases}$, то есть правая ветвь задаётся графиком функции $y=e^x$, а левая ветвь графиком $y=e^{-x}$.

Модуль не имеет смысл «навешивать» на аргумент чётной функции:

$y=x^2, \quad y=\cos x$

и т.п. (проанализируйте, почему).

И, наконец, завершим статью весёлой нотой – применим модуль к САМОЙ ФУНКЦИИ.

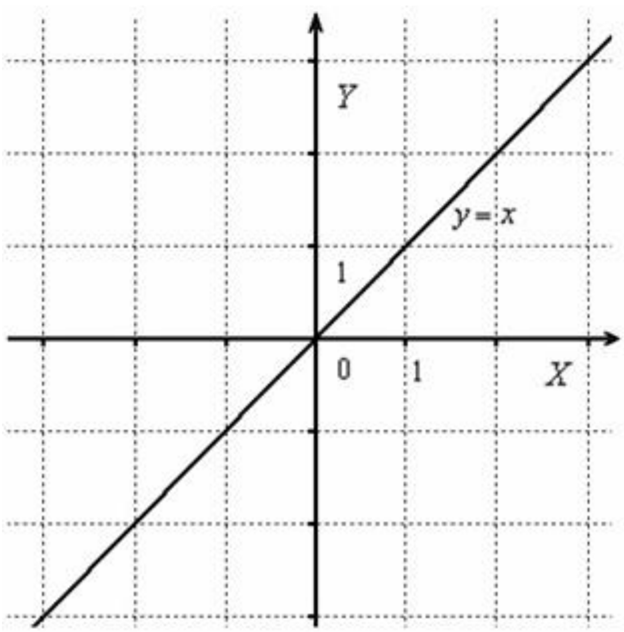
Правило: график функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ следующим образом: часть графика $f(x)$, лежащая **НАД** осью OX **сохраняется**, а часть графика $f(x)$, лежащая **ПОД** осью OX **отображается симметрично** относительно данной оси.

Странно, что широко известный график модуля «икс» оказался на 24-й позиции, но факт остаётся фактом =)

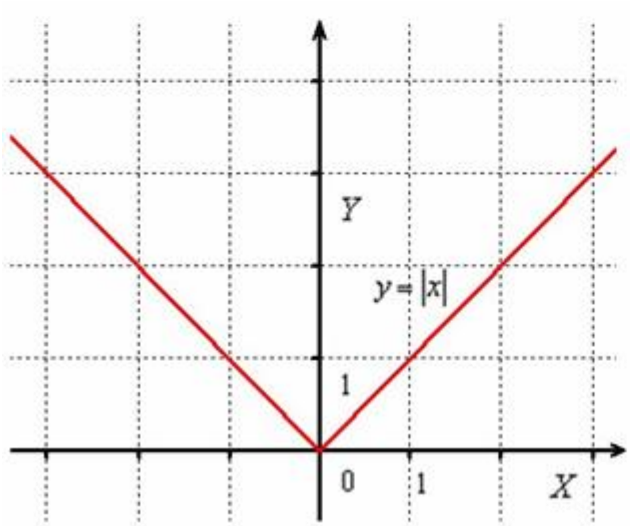
Пример 24

Построить график функции
$y = |x|$

Сначала начертим прямую, известную широкому кругу лиц:



Часть графика, которая ВЫШЕ оси OX, остаётся неизменной, а часть графика, которая НИЖЕ оси OX – отображается симметрично в верхнюю полуплоскость:



Модуль функции также раскрывается аналитически в **кусочном виде**:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Внимание! Формула отличается от формулы предыдущего пункта!

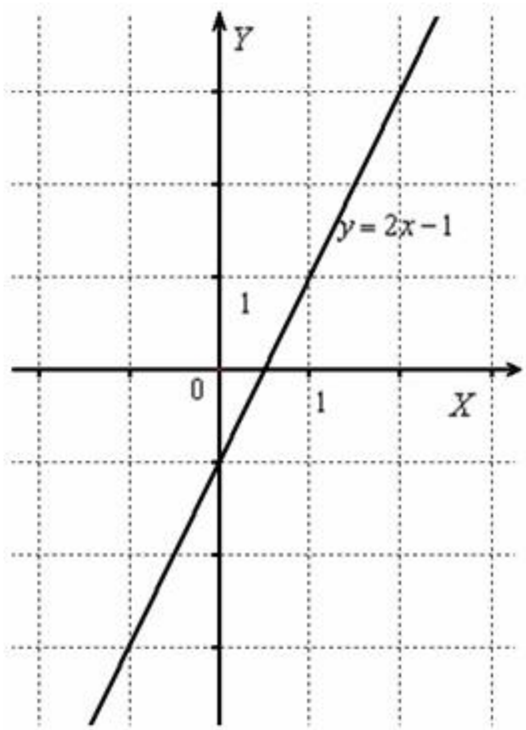
В данном случае: $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$, действительно, правый луч задаётся уравнением $y = x$, а левый луч – уравнением $y = -x$.

Кстати, $y = |x|$ – редкий экземпляр, когда можно считать, что модуль применён, как к аргументу: $f(|x|)$, так и к самой функции: $|f(x)|$. Изучим более «жизненную» ситуацию:

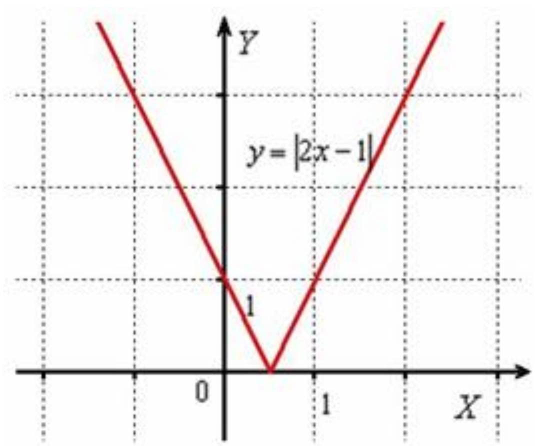
<u>Пример 25</u>

Построить график функции $y = |2x - 1|$

Сначала изобразим график линейной функции $y = 2x - 1$:



То, что ВЫШЕ оси абсцисс – не трогаем, а то, что НИЖЕ – отобразим симметрично относительно оси OX в верхнюю полуплоскость:



Согласно формуле $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0 \end{cases}$, распишем функцию аналитически в кусочном виде: $y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{если} \quad 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1), & \text{если} \quad 2x-1 < 0 \end{cases}$.

Или, упрощая оба этажа: $y = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{если} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & \text{если} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$, то есть правый луч задаётся функцией $y = 2x - 1$, а левый луч –

функцией $y=-2x+1$. Сомневающиеся могут взять несколько значений «икс», выполнить подстановку и свериться с графиком.

На какие функции модуль «не действует»? Модуль бессмысленно применять к неотрицательным функциям. Например: $y=|e^x|=e^x$. Экспоненциальная функция и так полностью лежит в верхней полуплоскости: $y=e^x>0$.

Всё возвращается на круги своя, синусом начали, синусом и закончим. Как в старой доброй сказке:

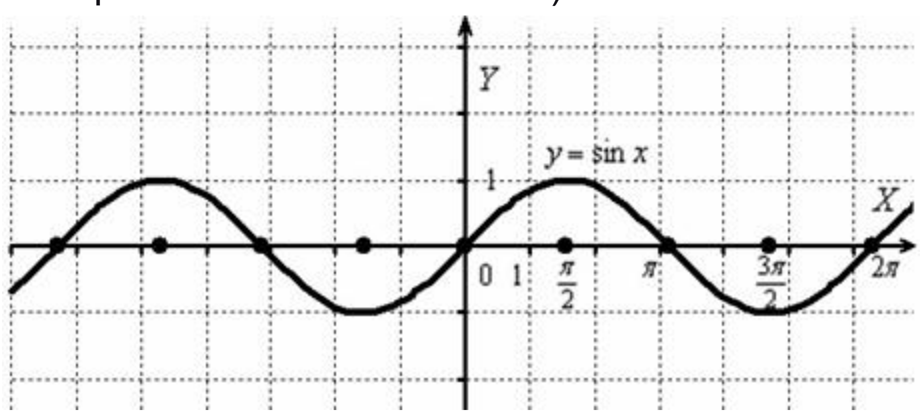
Пример 26

Построить график функции

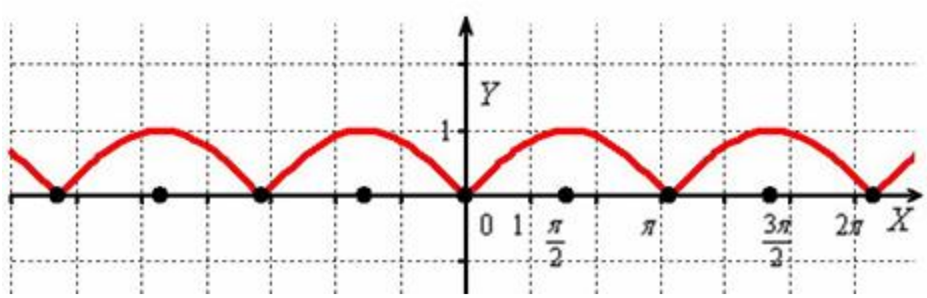
$y=|\sin x|$

.

Изобразим сами знаете что =)



И снова – то, что находиться в верхней полуплоскости – оставим в покое, а содержимое подвала – отобразим симметрично относительно оси OX:



Кстати, понятен ли вам неформальный смысл такого симметричного отображения? Модуль «съедает» у отрицательных чисел знак и делает их положительными, именно поэтому «подвальные» точки занимают противоположные места в верхней полуплоскости.

Распишем функцию в кусочном виде:

$$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & \text{если} \quad \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \text{если} \quad \sin x < 0\end{cases}$$

Решив два простейших школьных неравенства $\sin x \geq 0, \quad \sin x < 0$, получаем:

$$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & \text{если} \quad x \in (2\pi n, \pi+2\pi n) \\ -\sin x, & \text{если} \quad x \in (\pi+2\pi n, 2\pi+2\pi n)\end{cases}$$, где n – любое целое число.

Да, статья была не самой приятной, но крайне необходимой. Однако повествование завершилось и стало немножко грустно =) Чем-то напомнило мне всё это урок про метод Симпсона, который тоже создавался в марте, и тоже достаточно долгое время. Наверное, громоздкие вещи пишутся по сезону =)

Желаю успехов!

Автор: Емелин Александр

Новости проекта | Блог автора

Высшая математика для заочников и не только >>>

(Переход на главную страницу)