- исследовать эффективность применения тригонометрических формул при решении практических задач;

- рассмотреть область применения тригонометрии в современном мире

Актуальность работы:

Данная тема актуальна, на мой взгляд, так как раздел тригонометрии, как в геометрии, так и в алгебре вызывает у всех обучающихся сложность восприятия. Поэтому очень важно показать значимость тригонометрии в решении практических задач и в жизни в целом. Это поможет избежать многих ошибок на ГИА при решении заданий с тригонометрией.

Гипотеза:

Есть ряд задач, ответ на которые можно найти только тригонометрическим способом.

Определение тригонометрии, тригонометрических функций

Термин «тригонометрия» впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии (науке, исследующей размеры и форму Земли).

Тригонометрия (от др.-греч. τρίγωνον «треугольник» и μετρέω «измеряю», то есть измерение треугольников) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и

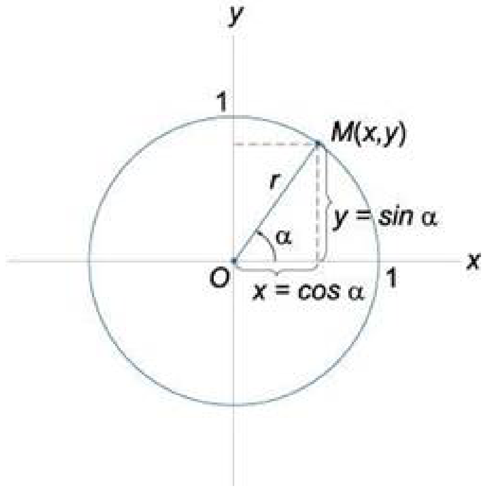
их использование в геометрии.

Под тригонометрическими функциями подразумеваются элементарные функции, аргументом которых является угол. С помощью тригонометрических функций описываются соотношения между сторонами и острыми углами в прямоугольном треугольнике.

Области применения тригонометрических функций чрезвычайно разнообразны. Так, например, любые периодические процессы можно представить в виде суммы тригонометрических функций (ряда Фурье). Данные функции часто появляются при решении дифференциальных и функциональных уравнений.

К тригонометрическим функциям относятся следующие 6 функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Для каждой из указанных функций существует обратная тригонометрическая функция.

Геометрическое определение тригонометрических функций удобно ввести с помощью единичного круга. На рисунке изображен круг радиусом r=1. На окружности обозначена точка M(x,y). Угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Ox равен α.



- Синусом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к радиусу r:
  sinα=y/r.
  Поскольку r=1, то синус равен ординате точки M(x,y).
- Косинусом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к радиусу r:
  cosα=x/r
- Тангенсом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к ее абсциссе x:
  tanα=y/x,x≠0
- Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к еeординате y:
  cotα=x/y,y≠0

Область применения тригонометрии

Существует множество областей, в которых применяются тригонометрия и тригонометрические функции. Например, метод триангуляции используется в астрономии для измерения расстояния до ближайших звезд, в географии для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах. Синус и косинус имеют фундаментальное значение для теории периодических функций, например при описании звуковых и световых волн.

Тригонометрия или тригонометрические функции используются в астрономии (особенно для расчётов положения небесных объектов, когда требуется сферическая тригонометрия), в морской и воздушной навигации, в теории музыки, в акустике, в оптике, в анализе финансовых рынков, в электронике, в теории вероятностей, в статистике, в биологии, в медицинской визуализации (например, компьютерная томография и ультразвук), в аптеках, в химии, в теории чисел (следовательно, и в криптологии), в сейсмологии, в метеорологии, в океанографии, во многих физических науках, в межевании и геодезии, в архитектуре, в фонетике, в экономике, в электротехнике, в машиностроении, в гражданском строительстве, в компьютерной графике, в картографии, в кристаллографии, в разработке игр и во многих других областях.

Хотелось бы немного осветить тему использования тригонометрии в строительстве, так как математика очень тесно взаимодействует с этой сферой

Музей Второй мировой войны. Гданьск, Польша

В конкурсе на создание музея Второй мировой войны, жюри которого возглавлял Даниэль Либескинд, победу одержало польское бюро Architektoniczne Kwadrat. Смелый проект со скошенной башней из терракотовых панелей и сплошным остеклением фасада и крыши начал реализовываться в 2012 году, и через 5 лет музей принял своих первых гостей.
Основная часть музея скрыта под землей - посетители начинают обзор с подземных этажей и постепенно перемещаются наверх.
Место для музея выбрано неслучайно - район Wiadrownia, в котором он расположился, был разрушен во время войны и затем заново отстроен. Посетители, поднимающиеся из "подземелья", символизирующего прошлое, видят настоящее - площадь перед музеем и следуют в башню - символизирующую будущее.
Форма здания вызывает различные ассоциации - музей сравнивают с бастионом, рушащимся домом, бункером, а когда он освещался ночью, то напоминает горящую свечу. В то же время здание хорошо вписывается в облик города и геометрию судовых кранов - символов Гданьского порта.

AB ≈ 9,1
BC ≈ 5.6
tg LC = AB : BC
cos LC = 9,1 : 5,6
cos LC= 1,625
LC ≈ 55^0

Необходимо определить по картинке, чему примерно равен угол наклона здания.

Центр развития характера и лидерства Военно- Воздушной Академии США. Колорадо-Спрингс, США

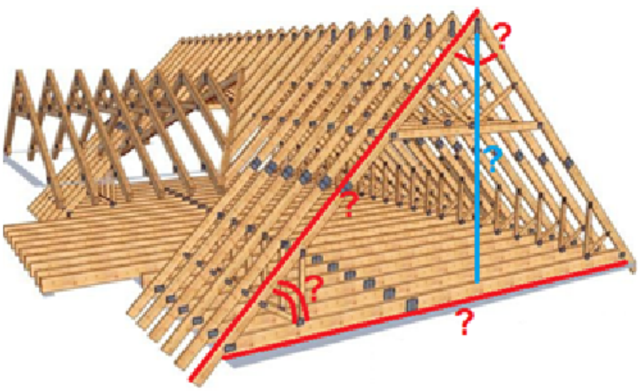
Наклонная стеклянная башня является важнейшим элементом протяженного двухэтажного здания академии. Наклон обусловлен особенностями местного климата, а именно - частыми порывистыми ветрами. Но помимо климатического влияния, угол наклона башни, в которой расположился конференц-зал, спроектирован так, чтобы 105-футовое окно в крыше расположилось строго над Полярной звездой, которая является символом ВВС США. Заметим, что по проекту бюро SOM на территории академии более 50 лет назад была построена кадетская часовня, получившая статус памятника архитектуры.

Центр

AB ≈ 5,7
BC ≈ 3,2
tg LC = AB : BC
tg LC = 5,7 : 3,2
tg LC= 1,781
LC ≈ $60^0 42^1$

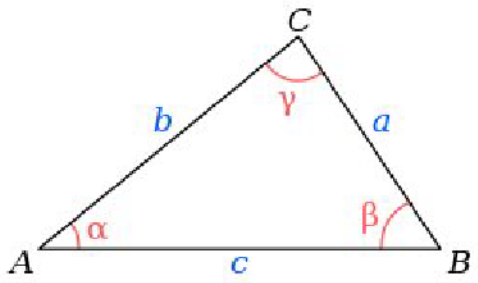
По фотографии данных зданий можно легко, используя тригонометрию вычислить приблизительный угол наклона здания(через синус, косинус или тангенс угла)

Также зная тригонометрию, нам не придётся скакать по крыше с рулеткой.



Величины углов и сторон любого будь-то равнобедренного, равностороннего или разностороннего треугольника связываются между собой определенными тригонометрическими соотношениями, основные из которых выделяют как "теорема синусов" и "теорема косинусов".

Благодаря великим математикам древних времен, выведены формулы, позволяющие по **ТРЁМ** элементам **ЛЮБОГО** треугольника - **ВОССТАНОВИТЬ** остальные три!



Немного теории из школьного курса

Теорема SIN-ов - это теорема, которая определяет зависимость и устанавливает связь между длинами сторон и противолежащими углами.

Значения длин сторон треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Теорема COS-ов звучит так: квадрат любой из сторон произвольного треугольника равняется сумме квадратов остальных двух сторон минус удвоенное произведение этих же сторон на косинус угла между ними.

Она обобщает теорему Пифагора на произвольные треугольники, таким образом теорема Пифагора - становится частным случаем теоремы косинусов.

Так, для любого треугольника, справедлива зависимость:

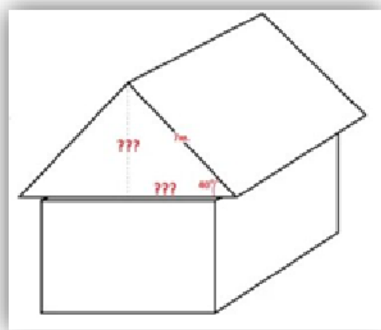
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \,.$$

После преобразований, мы можем найти косинус любого угла треугольника:

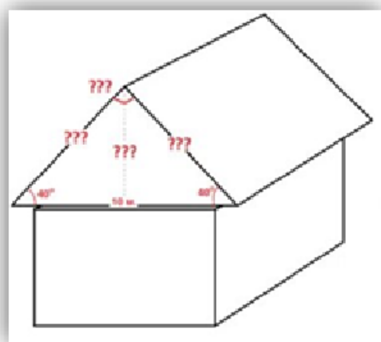
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Примеры задач, решаемых с помощью таких теорем

Зная длину ската и угол наклона кровли мы можем получить остальные значения всех составляющих элементов, будь то высота кровли до конька или длина здания:



И наоборот, зная угол наклона кровли и длину здания с кровельным свесом - высчитывается в пару действий как длина стропильных ног, так и высота крыши:

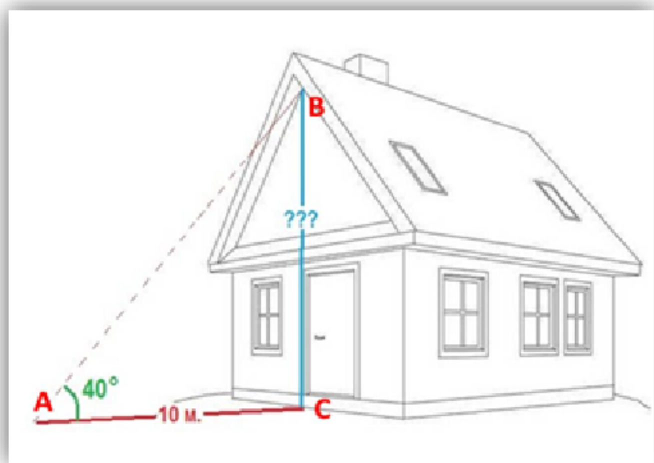


А точная высота дома? - Да не вопрос!

Угол ABC= 90^0-40^0=50^0

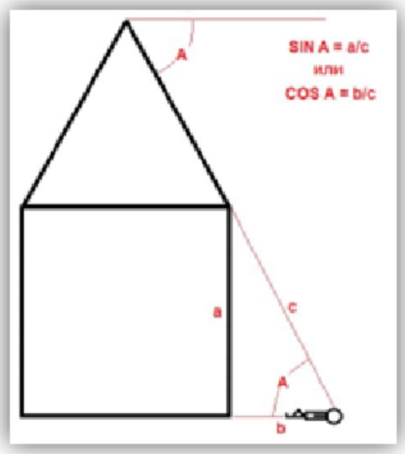
BC/Sin40° = 10/Sin50°

BC = (10 x Sin40°)/Sin50° = 10 x 0,643 : 0,766 = 8,4 м.



<u>Определение угла наклона ската</u>

Определить угол наклона ската с точностью до 1 градуса с земли тоже совершенно не напрягаясь можно сделать: для этого требуется занять положение наблюдателю так, чтобы плоскость ската легла в одну линию с линией направления взгляда.



Теперь зная высоту дома (a) и расстояние (b), а соответственно по теореме Пифагора и гипотенузу (c), мы можем посчитать величину синуса или косинуса угла А (формула на рисунке выше).

Далее таблица Брадиса в помощь!))) Находим значение в колонке Синуса и сопоставляем с соответствующим углом!

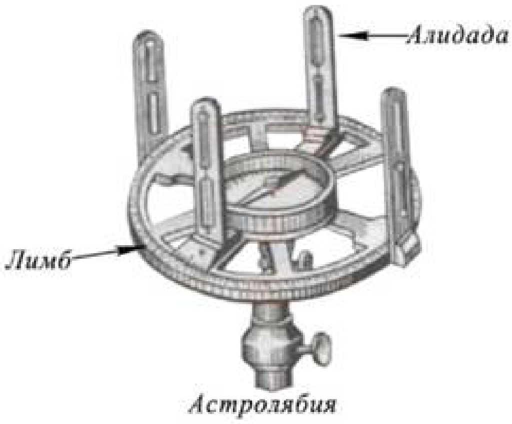
Применение тригонометрии к измерениям на местности и решению практических задач

С помощью тригонометрии решаются многие измерительные задачи на местности, как например вычисление расстояния между различными пунктами земной поверхности (если это расстояние нельзя измерить непосредственно), вычисление высоты данного предмета (горы, здания и т. п.), составление планов и карт и т. п. Будем предполагать, что измерения производятся на м а л о м участке, так что можно считать его плоским и не учитывать кривизны земной поверхности.

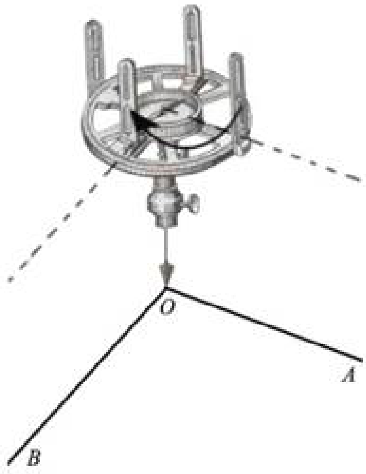
Измерение небольших расстояний производится непосредственно, при помощи, например, стальных измерительных лент.

Измерение углов на местности производится при помощи угломерных инструментов. Наиболее распространённым современным угломерным инструментом является теодолит (черт. 18).

Черт. 18

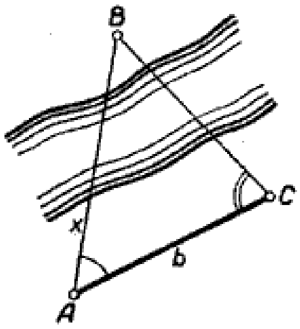


Пример: Чтобы **измерить** угол, астролябию устанавливают в его *вершине* (в нашем случае точка *O*), при этом **лимб** её должен быть в *горизонтальной* плоскости, а *отвес*, повешенный в центе диска, должен находиться точно *над вершиной угла*. Затем необходимо **установить** алидаду *вдоль* одной из сторон угла (в нашем случае *OA*), **заметить** *деление*, напротив которого находится *указатель алидады*. Далее необходимо **повернуть** алидаду по ходу часовой стрелки, так чтобы она **совпала** со *второй* стороной угла (в нашем случае **OB**), отметить деление, напротив которого оказался **указатель алидады**. Тогда, если мы найдем **разность** *второго* и *первого* измерения, мы **найдем** г*радусную меру измеряемого угла* (в нашем случае угла *AOB*).



Рассмотрим несколько простейших задач на исчисление расстояний и высот.

Задача 1. Вычислить расстояние от доступной точки А до недоступной точки В, видимой из точки А (точки А и В лежат в одной и той же горизонтальной плоскости, черт. 22).



Черт. 22

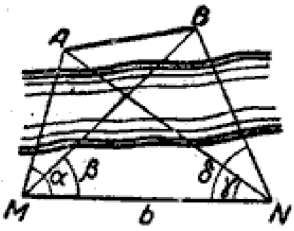
Разъяснение. Точка А считается доступной, если в ней может находиться наблюдатель с измерительными инструментами. Точка В считается недоступной, если расстояние А В не может быть измерено непосредственно (например, имеется препятствие: река, овраг и т. п.).

Решение. Выберем вблизи точки А доступную точку С, из которой видна точка В. Измерим непосредственно отрезок-базис АС = b и углы А и С. Сторону x = c треугольника АВС найдём по теореме синусов:

$^{c}/_{\sin C} = {}^{b}/_{\sin B}$, откуда $x = {}^{b \sin C}/_{\sin B} = {}^{b \sin C}/_{\sin (C+A)}$.

sin C sin B sin B sin(C-M)

Задача 2. Вычислить расстояние между двумя недоступными точками А и В, видимыми из доступной местности. Расположение точек дано на чертеже 23.



Черт. 23

Решение. Выберем в доступной местности отрезок-базис, измерим базис и углы $\alpha = \angle AMN$, $\beta = \angle BMN$, $\gamma = \angle ANM$, $\delta = \angle BNM$ между базисом и направлениями из его концов на точки А и В. Вычислим расстояния МА и МВ (см. предыдущую задачу):

$MA = {}^{b \sin \gamma}/_{\sin (\alpha+\gamma)}$; $MB = {}^{b \sin \delta}/_{\sin (\beta+\delta)}$

Зная две стороны треугольника АМВ и угол α — β между ними, можно вычислить третью сторону, например, по теореме косинусов:

$x = AB = \sqrt{MA^2 + MB^2 — 2MA \cdot MB \cos (\alpha — \beta)}$.

Задача 4. Определение высоты трубы на территории школы

Для определения угла воспользуемся фотографией.

Теперь, зная угол, определим высоту трубы.

Условие: Расстояние от человека до трубы – 19,5 м. Необходимо найти высоту трубы и расстояние от верхушки до человека, если угол обзора человека равен 42°.

Решение:

$tg\,42° = AB : 19{,}5$

$AB = 6.4 * tg\,42°$

$AB = 19{,}5 * 0.9004$